Друштво Математичара Србије

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА

2019/2020.

Београд, 2020.

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
62. Државног такмичења из математике

- Др Војислав Андрић – *председник ДМС*
- Др Бојан Башић, Природно-математички факултет, Нови Сад
- Др Бојана Боровићанин, Природно-математички факултет, Крагујевац
- Др Душан Ђукић, Машински факултет, Београд – *председник комисије*
- Др Марко Радовановић, Математички факултет, Београд
- Милан Ракић, гимназија „Стеван Сремац”, Ниш

Редакција и обрада:

др Душан Ђукић

Предговор

Овогодишње Државно такмичење, 62-го по реду, одржано је у ванредним околностима. Првобитно предвиђено за 21. март на ФОН-у у Београду, такмичење је одложено свега неколико дана пре тог датума због епидемије вируса корона. Пет месеци касније, када је оно коначно одржано по убрзаном поступку, епидемија је и даље трајала с променљивим интензитетом. Неки такмичари нису били доступни, што због скорог одласка на факултет, што из других разлога. Ипак, сматрали смо да такмичење, макар и у крњем облику, дугујемо ученицима који су га чекали.

Како због епидемије није било препоручљиво окупити 352 ученика на једном месту, учесници су распоређени на пет локација:

- Математичка гимназија у Београду;
- Трећа београдска гимназија;
- Природно-математички факултет у Новом Саду;
- Прва крагујевачка гимназија;
- Гимназија „Стеван Сремац” у Нишу.

Велику захвалност дугујемо људима из ових школа који су, прихвативши значајан део организационог посла, пресудно помогли да се ово такмичење одржи.

ДРЖАВНА КОМИСИЈА
за такмичења из математике ученика средњих школа

- Аго Балог Кристина – ПМФ, Нови Сад
- Балтић др Владимир – ВИШЕР, Београд
- Башић др Бојан – ПМФ, Нови Сад
- Божин др Владимир – Математички факултет, Београд
- Варга Б. Јожеф – ОШ „Петар Кочић”, Темерин
- Дробњак Душан – Математички факултет, Београд
- Ђукић др Душан – Машински факултет, Београд – *председник*
- Кнежевић др Миљан – Математички факултет, Београд
- Лукић др Миливоје – Универзитет Рајс, САД
- Маринковић Растко – Књажевачка гимназија, Књажевац
- Матић др Иван – Колеџ Барух, САД
- Милићевић др Ђорђе – Универзитет Бринмор, САД
- Милосављевић Милош – Гимназија „Светозар Марковић”, Ниш
- Митровић Данијела – Математички институт САНУ, Београд
- Петровић др Никола – Институт за физику, Београд
- Радовановић др Марко – Математички факултет, Београд
- Ранђеловић Жарко – Универзитет Кембриџ, Велика Британија
- Сеничић мр Александар – Гимназија, Краљево
- Стојаковић др Милош – ПМФ, Нови Сад
- Фон Бург Теодор – Електротехнички факултет, Београд
- Чикош Пајор Гизела – Гимназија „Бољаи”, Сента
- Шарковић Анђела – Универзитет Кембриџ, Велика Британија

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Први разред – А категорија

1. Дате су три различите тачке A, B и C на правој ℓ и тачка O ван праве ℓ. Симетрале дужи OA, OB и OC образују троугао EFG. Доказати да тачке O, E, F и G леже на истој кружници.

2. Змија полази из горњег левог поља таблице $2 \times n$, где је n природан број. Змија из једног поља може прећи у друго ако та два поља имају заједничку ивицу, али не сме посетити ниједно поље двапут. На колико начина змија може обићи сва поља таблице?

3. Наћи све троелементне скупове A који имају следећа два својства:

(i) Скуп A има бар два заједничка елемента са својим партитивним скупом $\mathcal{P}(A)$;

(ii) $3 \in A$.

(Подразумева се да ниједан скуп није елемент самог себе, нити елемент свог елемента.)

4. Нека је $m > 1$ природан број. Доказати да не постоји низ од 2^m узастопних природних бројева који сви имају тачно по m простих фактора, рачунајући и вишеструкост.

(На пример, број $8000 = 2^6 \cdot 5^3$ има $6 + 3 = 9$ простих фактора.)

5. Да ли је могуће поделити квадрат на конвексне петоуглове?

Други разред – А категорија

1. Квадар чије су ивице из једног темена међусобно различити природни бројеви сачињен је од белог материјала, обојен споља црвеном бојом, а затим изрезан на јединичне коцке. Познато је да је барем једна коцка скроз бела и да има више коцки са две црвене стране него са једном црвеном страном. Наћи димензије квадра.

2. Тачка M је средиште странице CD паралелограма $ABCD$, а тачке E и F редом подножја висина из темена A и B у троуглу ABM. Доказати да је $DE = CF$.

3. У Неправедној Краљевини Патуљака патуљци сваке године морају да чекају ред пред шалтером у Министарству Бесмислене Бирократије како би предали своје капе на годишњу инспекцију. Међутим, кад год се на крају реда појави плавокапи патуљак, он ће се безобзирно угурати у ред испред свих зеленокапих патуљака. Притом ће изазвати и инцидент у коме ће патуљак испред ког је стао бити ухапшен. Ухапшени патуљак остаје без могућности да тог дана преда своју капу.

На крају дана, током којег су у Министарство дошла 4 плавокапа и 4 зеленокапа патуљка, радник на шалтеру прави распоред свих предатих капа по редоследу предаје. Од доласка првог патуљка до одласка последњег ред ни у једном тренутку није био празан. Колико има различитих могућих распореда капа?

Капе истих боја сматрају се идентичним. Бити први у реду не значи нужно и моменталну услугу на шалтеру.

4. Природни бројеви a и b су такви да је $a + 101b$ дељиво са 103, а $a + 103b$ дељиво са 101. Колико најмање може бити $51a + b$?

5. Претпоставимо да је $A \subseteq \{0, 1, \ldots, 9\}$ скуп такав да се сваки природан број може представити у облику збира два ненегативна цела броја сачињена од цифара из скупа A. Колико најмање елемената може имати скуп A?

Трећи разред – А категорија

1. Решити неједначину
$$\frac{6 - 3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x - 1}\,.$$

2. Ако су p и q прости бројеви већи од 2, доказати да је
$$\left\lfloor \frac{p^q + q^p}{pq} \right\rfloor$$
паран број.

3. На кружници k су дате тачке A и B. Тангенте на кружницу у тачкама A и B секу се у тачки P. Нека је M средиште дужи AB. Кружница γ кроз тачке M и P сече кружницу k у тачкама C и D и поново сече дуж AB у тачки N. Доказати да се тангенте на кружницу k у тачкама C и D секу на дужи NP.

4. Одредити све парове природних бројева (a, b), при чему је $1 < a < b$, за које постоји скуп од b природних бројева са особином да је производ сваких a бројева међу њима дељив збиром тих a бројева.

5. Квадрат странице $2n$ је подељен на јединичне квадрате. Колико највише дијагонала јединичних квадрата је могуће нацртати тако да никоје две дијагонале немају заједничку тачку (чак ни теме)?

Четврти разред – А категорија

1. На страницама AB и AC једнакокраког троугла ABC $(AB = AC)$ одабране су редом тачке D и E тако да важи $AD = BC = CE$ и притом је троугао ADE једнакокрак. Одредити све могуће вредности $\sphericalangle BAC$.

2. Таблицу $n \times 3$ потребно је попунити целим бројевима који нису сви нула тако да је сваки број једнак збиру суседних бројева умањеном за збир дијагонално-суседних бројева. Наћи све природне бројеве n за које је ово могуће.

Два поља су суседна ако имају заједничку страну, а дијагонално-суседна ако имају тачно једно заједничко теме.

3. На средишње поље шаховске табле $(2n+1) \times (2n+1)$ стављена је дама. У сваком потезу дама мора да се приближи ивици (тј. растојање од центра поља на којем је дама до центра најближег ивичног поља строго опада са сваким потезом). На колико начина дама може да стигне до ивице табле?

(У једном потезу дама се помера хоризонтално, вертикално или дијагонално за произвољан број поља.)

4. Постоје ли природни бројеви a, b, c и d такви да важи

$$a^2 + b^2 = 5cd \quad \text{и} \quad c^2 + d^2 = 5ab?$$

5. Бесконачан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ је такав да су сви бројеви

$$\frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{a_1 + a_2}{a_3}, \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_4}, \quad \ldots$$

цели и непарни. Доказати да је сваки број у низу, почев од неког, тачно двапут већи од претходног.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да ниједан број облика

$$2020\ldots20202$$

у декадном запису не може бити квадрат природног броја.

2. У једној школи се одржава турнир у стоном тенису на коме учествује 1001 ученик. У сваком кругу ученици су распоређени у парове; сваки пар игра меч и победник пролази у следећи круг (нема нерешених мечева). Ако у неком кругу има непаран број ученика, један жребом изабран ученик иде у наредни круг без борбе. Када остане само један ученик, он се проглашава победником и турнир се завршава.

Колико ће укупно мечева бити одиграно?

3. У пећини медитирају три монаха. Сваки од њих лаже два узастопна дана у недељи, а осталих дана говори истину. Никоја два монаха не лажу истог дана. У понедељак је један монах казао: „Јуче сам лагао". Наредног дана надовезао се други монах: „А ја сам јуче лагао". Ког дана у недељи ниједан монах не лаже?

4. Доказати да за ма које скупове A, B, C и D важи једнакост

$$\big((A \cup B) \setminus (C \cap D)\big) \setminus \big((A \cup C) \setminus (B \cap D)\big) = (B \setminus C) \setminus (A \setminus D).$$

5. Дужине трију висина у троуглу су 3, 4 и 5. Да ли је тај троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?

Други разред – Б категорија

1. Шта је веће: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100}?

2. У квадрату $ABCD$ странице 1, тачке M и N су редом средишта страница BC и CD. Израчунати полупречник r круга уписаног у троугао AMN.

3. За које вредности параметра m графици функција

$$y = 3x - m \quad \text{и} \quad y = (m+1)x^2 + x + 1$$

имају тачно једну заједничку тачку?

4. Наћи све парове природних бројева (a, b) у којима је $a > b$ и важи

$$\text{НЗС}(a, b) - \text{НЗД}(a, b) = 2019.$$

5. Три папагаја - Пера, Мика и Лаза - чуче за округлим столом. Један од њих увек лаже, а остала два увек говоре истину. Игра *Истине и лажи* започиње тако што један од њих дâ изјаву (папагај лажов би лагао, а остали би рекли истину). Следећи у смеру казаљке на сату треба да понови ту изјаву, затим следећи понови његову, и тако у круг редом. Међутим, при томе папагај лажов неће поновити изјаву свог претходника, већ ће изрећи њену негацију.

Испоставило се да су прва и 2019-та изјава гласиле истоветно: „Пера је лажов!". Да ли је Пера заиста лажов?

Трећи разред – Б категорија

1. Ако за неки коначан скуп A важи $|A \triangle \mathcal{P}(A)| = 1$, доказати да је $|A| \leqslant 1$.

(Са $X \triangle Y$ означена је *симетрична разлика* скупова X и Y, тј. $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$.)

2. Претпоставимо да је x природан број такав да бројеви x и x^2 имају исти k-тоцифрени завршетак. Доказати да тада сви степени броја x имају исти k-тоцифрени завршетак.

3. Решити једначину:
$$4\sin^3 x = \sin x + \cos x.$$

4. У једној школи се одржава турнир у стоном тенису. У сваком кругу ученици су распоређени у парове; сваки пар игра меч и победник пролази у следећи круг (нема нерешених мечева). Ако у неком кругу има непаран број ученика, један жребом изабран ученик иде у наредни круг без борбе. Када остане само један ученик, он се проглашава победником и турнир се завршава.

Колико ће укупно мечева бити одиграно, ако је учествовало:

(а) 2020 ученика? **(б)** n ученика, где је n произвољан природан број?

5. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$ са основицом AB и $AB : CD = 2 : 1$. Тачка M је сре- диште дијагонале AC, а тачка N пресек праве BM и дужи AD. Доказати да је
$$P(ABM) : P(NMCD) = 3 : 2.$$

($P(\mathcal{A})$ означава површину многоугла $\mathcal{A}$.)

Четврти разред – Б категорија

1. Ако котангенси углова неког троугла чине аритметички низ, доказати да онда квадрати страница тог троугла такође чине аритметички низ.

2. Доказати да за природне бројеве a и b важи
$$\text{НЗД}(a,b) + \text{НЗС}(a,b) = a + b$$
ако и само ако је један од бројева a и b дељив другим.

3. Постоји ли полином са целим коефицијентима чија је једна нула $x_1 = \sqrt{2018} + \sqrt{2019}$?

4. Наћи сва решења једначине
$$P(x) = 2x^3 - (5+6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i = 0,$$
ако је познато да је бар једно њено решење реално.

5. Пред Марком су три гомиле са 21, 45 и 33 колачића. Он на њима врши измене једног од следећа два типа, једну по једну:

(1°) одабере гомилу са парним бројем колачића (ако таква постоји) и подели је на два једнака дела, или

(2°) споји две гомиле у једну.

Ако Марко успе да направи гомилу са само једним колачићем, сме да га поједе. Може ли он икада појести колачић?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

1. март 2020.

Први разред – А категорија

1. Релацију $\diamondsuit$ на скупу $\mathbb{R}$ дефинишемо на следећи начин:

$$x \diamondsuit y \quad \text{ако и само ако је} \quad |x-1| + |y-2| \leqslant 1.$$

Ако је $x \diamondsuit (y-x)$ и $x \diamondsuit (y+x)$, одредити y.

2. Природни бројеви су обојени у две боје с периодом d (тј. бројеви x и $x+d$ увек имају исту боју). Претпоставимо да постоје природни бројеви a, b и c такви да је, за свако $x \in \mathbb{N}$, тачно један од бројева $x+a$, $x+b$ и $x+c$ црвен. Доказати да је d дељиво са 3.

3. Наћи све тачке X унутар квадрата $ABCD$ за које важи

$$AX + CX = BX + DX.$$

4. Скуп од 2020 узастопних природних бројева подељен је на два подскупа од по 1010 бројева. Може ли најмањи заједнички садржалац свих бројева у првом скупу бити једнак најмањем заједничком садржаоцу свих бројева у другом скупу?

5. Одредити најмању могућу вредност израза

$$F = \max\{x, 1-y\} + \max\{y, 2-z\} + \max\{z, 3-x\},$$

где су x, y и z реални бројеви. Наћи све тројке (x, y, z) за које се та вредност достиже.

Други разред – А категорија

1. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева дељивих са 11 код којих је збир цифара једнак производу цифара.

2. Реални бројеви a, b, c и d су такви да важи

$$a+b+c+d = 5 \quad \text{и} \quad (a+b)(c+d) + (a+c)(b+d) + (a+d)(b+c) = 15.$$

Доказати да је бар један од бројева a, b, c, d мањи од 1.

3. Кружница γ додирује изнутра кружницу Γ у тачки X. Права ℓ сече кружницу Γ у тачкама A и D, а кружницу γ у тачкама B и C, при чему је тачка B између A и C. Доказати да је

$$\frac{XA^2}{XD^2} = \frac{AB \cdot AC}{DB \cdot DC}.$$

4. Нека су m и n природни бројеви. У свако поље квадратне табле $n \times n$ уписан је по један цео број. *Пут* је низ међусобно различитих поља у коме је прво поље у првој врсти, последње у n-тој, и свака два узастопна поља имају заједничку страницу. Доказати да:

(а) ако је $m \leqslant n$, увек постоји пут у коме је збир уписаних бројева дељив са m;

(б) ако је $m > n$, такав пут не мора да постоји.

5. Дато је неколико тачака у равни, при чему никоје три нису колинеарне. Нацртано је неколико дужи са крајевима у датим тачкама тако да је свака тачка теме највише четири дужи. Доказати да се свака дуж може обојити једном од две боје тако да никоје три дате тачке нису темена једнобојног троугла.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC је $AB = 17$ и $AC = 14$, а тачке D, E и F на страницама BC, CA и AB редом су такве да је

$$BD : DC = CE : EA = AF : FB = 1 : 2.$$

Ако тачке A, D, E и F леже на истом кругу, наћи дужину странице BC.

2. Решити систем једначина у скупу комплексних бројева:

$$\begin{cases} |z|^2 + zw + \overline{w} = 2 + 6i \\ |w|^2 + \overline{zw} + z = 2 - 4i. \end{cases}$$

3. Наћи све бројевне системе у којима је број 3 806 130 четвороцифрен палиндром.

(*Палиндром* је број или низ карактера који се исто чита унапред и уназад.)

4. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи

$$f(f(x) + f(y)) = xf(f(y))f(x + y).$$

5. Да ли постоје два дисјунктна скупа целих бројева, сваки са бар три елемента, таква да:

(а) за свака два различита броја a и b из истог скупа постоји број c из другог скупа такав да је $2c \in \{a+b,\ a+b+1\}$?

(б) за свака два различита броја a и b из истог скупа постоји број c из другог скупа такав да је $2c \in \{a+b,\ a+b+2\}$?

Четврти разред – А категорија

1. Скуп природних бројева S има својство да се сваки природан број може представити као збир неколико (један или више) различитих бројева из S. За $x \in \mathbb{N}$, са $f(x)$ означавамо највећи могући број сабирака у таквом представљању броја x.

Доказати да за свако $a \in S$ постоји бесконачно много природних бројева x за које је $f(x+a) = f(x) + 1$.

2. Низ (a_n) је задат условима

$$a_1 = 4 \quad \text{и} \quad a_n = \frac{4n^2 a_{n-1} - 1}{a_{n-1} + 4n^2 - 2} \quad \text{за} \quad n \geqslant 2.$$

Израчунати a_{2020} (у експлицитном облику).

3. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle ACB$. Његов уписани круг има центар I и додирује страницу AC у тачки D. Права AI поново сече описану кружницу троугла ABC у тачки M. Тачка K на страници AC је таква да је $IK \parallel BC$, а права MK сече страницу BC у тачки L. Доказати да нормала из тачке D на праву MC полови дуж KL.

4. Знајући да важи

$$53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = \overline{22{*}\,6{*}3\,493\,6{*}9\,{*}96\,8{*}4\,{*}10\,6{*}4\,{*}{*}{*}\,{*}{*}{*}},$$

одредити цифре означене звездицом.

(Са $n!!$ је означен *двоструки факторијел*: $n!! = n(n-2)(n-4)(n-6)\cdots$)

5. Низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ је такав да је

$$a_i = |a_{i-1} - a_{i-2}| \ \text{ за свако } \ i \geqslant 3 \quad \text{и} \quad a_i \leqslant 2020 \ \text{ за } \ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Наћи највећу могућу дужину овог низа.

Први разред – Б категорија

1. Дата је тачка X унутар правоугаоника $ABCD$. Ако је $P_{XAB} = 15$, $P_{XBC} = 16$ и $P_{XCD} = 17$, одредити P_{XDA}.

(Са P_Φ означена је површина фигуре Φ.)

2. Одредити број парних шестоцифрених бројева чији је збир цифара једнак 51.

3. У троуглу ABC у коме је $\sphericalangle B = 110^\circ$ и $\sphericalangle C = 30^\circ$, спољашња симетрала угла BAC сече праву BC у тачки L. Ако је O центар описаног круга троугла ABC, израчунати угао AOL.

4. Могу ли се броју 2020 здесна дописати још три цифре тако да се добије седмоцифрен број који је дељив сваким од бројева 8, 9 и 11? Одредити сва решења.

5. Један радник у фабрици дневно произведе шест пари ципела. Радници раде у две смене, при чему је планирано да у неком периоду прва смена произведе 240 пари више него друга. Међутим, услед епидемије грипа одсуствовало је 5 радника из прве смене и 4 из друге, тако да је и једној и другој смени било потребно по два дана више да постигну предвиђену норму. Колико има радника у свакој смени?

Други разред – Б категорија

1. Приказати графички скуп тачака у xOy-равни за које је $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

2. Троцифрен број $\overline{abc}$ је паран, а његове цифре међусобно различите и различите од нуле. Познато је да је збир свих троцифрених бројева који се састоје од цифара a, b и c (без понављања) већи од 2700, а мањи од 3100. Који је највећи могући овакав број $\overline{abc}$?

3. У спољашњости троугла ABC конструисани су троуглови BCD, CAE и ABF који су слични у неком редоследу темена. Ако је шестоугао $AFBDCE$ тетиван, доказати да је троугао ABC једнакостраничан.

4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{cases} x^2 + xz = y^2 + yz \\ xy + 1 = x + y \\ x^2 + yz = z^2 - xy. \end{cases}$$

5. На табли су написани бројеви 1 и 2. Нове бројеве дописујемо на следећи начин: ако на табли већ постоје различити бројеви a и b, можемо да допишемо број $ab - 5a + 7b$. Можемо ли применом овог поступка икада записати број:

(а) 2020? **(б)** 2019?

Трећи разред – Б категорија

1. У правилној четвоространој пирамиди $SABCD$ бочна страна SAB заклапа са основом $ABCD$ угао од 60°. Израчунати косинус угла између бочних страна SAB и SBC.

2. Посматрајмо све троцифрене бројеве чије су све цифре у скупу $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (не обавезно различите; прва цифра не може бити нула). Да ли међу овим бројевима има више оних дељивих са 3 или оних дељивих са 5?

3. Дат је квадрат $ABCD$ странице a и кружница k са центром у центру квадрата O и полупречником r. Нека је P произвољна тачка на кружници k. Доказати да је вредност израза

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$$

константна, тј. да не зависи од избора тачке P на кружници.

4. Дат је природан број n. Одредити све реалне бројеве x такве да за сваку пермутацију (a, b, c, d) бројева $n, n+1, n+2, n+3$ важи

$$\sin ax \cdot \sin bx = \sin cx \cdot \sin dx.$$

5. Означимо са $S(n)$ збир цифара природног броја n. Решити једначину

$$n \cdot S(n) = 2020 + n.$$

Четврти разред – Б категорија

1. Дат је скуп $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Колико има пресликавања $f : A \to A$ која сваки паран број сликају у паран број, а сваки број дељив са 3 у број дељив са 3?

2. Некопланарне тачке A, B, C и D у простору су такве да је $AB = BC = CD = DA$. Нека је M средиште дужи AC, а N средиште дужи BD. Доказати да је MN заједничка нормала за праве AC и BD.

3. Решити једначину

$$x^2 + (x-3)\log_2 x = 4x - 3.$$

4. На хипотенузи AB једнакокрако-правоуглог троугла ABC дате су тачке P и Q (при чему је P између A и Q) такве да је $\sphericalangle PCQ = 45^\circ$. Доказати да је $AP^2 + QB^2 = PQ^2$.

5. У скупу целих бројева решити једначину

$$2x^3 + 3x^2 + 3x = 2020 + 9y.$$

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Први разред – А категорија

1. Позитивни бројеви a, b, c, d, e су такви да је

$$a(b+c) = b(c+d) = c(d+e) = d(e+a) = e(a+b).$$

Доказати да је $a = b = c = d = e$.

2. Два играча играју следећу игру: они наизменично записују по једну цифру, редом слева надесно, при чему ниједан играч не сме поновити већ искоришћену цифру. Игра се завршава после шест потеза. Први играч побеђује ако је тако добијен шестоцифрени број сложен, а други ако је прост. Који играч има победничку стратегију?

3. Дат је природан број n такав да $6 \mid n$. Доказати да постоји конвексан n-тоугао чији су сви углови једнаки и који се може поделити на фигуре следећа два типа:

(1°) правилне k-тоуглове за неко $k < n$;

(2°) троугаоне одсечке $A_1A_2A_3$ правилног ℓ-тоугла $A_1A_2 \ldots A_\ell$ за неко $\ell < n$.

4. Одредити све ненегативне целе бројеве n и цифре a, b и c за које је број

$$M = \overline{1\underbrace{0\ldots0}_{n}a\underbrace{0\ldots0}_{n}b\underbrace{0\ldots0}_{n}c}$$

производ три узастопна природна броја.

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао ABC површине 2020. Максим и Мина играју следећу игру: најпре Максим одабере тачку P на страници AB (може и теме), затим Мина бира тачку Q на страници BC, и најзад Максим бира тачку R на страници CA. Колику највећу површину троугла PQR Максим може да обезбеди независно од Мининог потеза?

2. Реални бројеви x, y и z задовољавају једнакост

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Одредити најмању могућу вредност броја x.

3. Да ли постоји бесконачно дугачак низ простих бројева са особином да је сваки члан низа осим првог једнак двоструком претходном увећаном или умањеном за 1?

(На пример, такву особину има низ $2, 3, 5, 11, 23, 47$, али он се не може продужити.)

4. Колико највише поља шаховске табле (8×8) се може одабрати тако да ни са једног одабраног поља коњ не може стићи на друго са мање од 4 скока?

(По шаховским правилима, коњ једним скоком стиже на поље удаљено две врсте и једну колону или две колоне и једну врсту.)

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = a + bi$ такве да су a и b цели бројеви и да важи

$$z^{2020} + |z| = \overline{z} + 2^{2020}.$$

2. Фигура *паук* креће се по шаховској табли (8×8) тако што у сваком потезу скочи три реда десно и два горе, или два реда лево и један доле. Паука имамо право да поставимо било где. Колико највише потеза ова фигура може да направи?

3. Нека је n природан број, а p и q природни бројеви већи од 1. Број m је (p, q, n)-*псеудопалиндром* ако постоје природни бројеви a_0 и a_n и ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, сви мањи и од p и од q, такви да је

$$m = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_p = (a_0 a_1 \ldots a_{n-1} a_n)_q + 1.$$

Наћи све (p, q, n)-псеудопалиндроме у којима је $n \geqslant 2^{q-1} - 1$.

(Са $x = (d_k \ldots d_1 d_0)_b$ означава се запис броја $x \in \mathbb{N}$ у основи b, тј. $x = d_k b^k + \cdots + d_1 b + d_0$.)

4. Тачка P унутар оштроуглог троугла ABC је таква да је $\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB$. Тачке P_a и P_b су редом симетричне тачки P у односу на праве BC и AC. Права P_aP_b сече описани круг троугла ABC у тачкама M и N, при чему су тачке P_a и P_b између M и N. Доказати да је $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPN$.

Четврти разред – А категорија

1. Постоји ли нелинеарна реална функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која има изводе било ког реда и при томе је

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in \mathbb{R}?$$

2. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да важи $f(x) \leqslant x^2$ за све $x \in \mathbb{N}$ и

$$m+n \mid f(m)-f(n) \quad \text{за све} \quad m,n \in \mathbb{N}.$$

3. Две подударне кружнице k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2 редом секу се у тачкама A и B. Произвољна права кроз тачку A поново сече кружнице k_1 и k_2 редом у тачкама C и D. Нормале из O_1 и O_2 на праву CD редом секу тангенте у тачки A на кругове k_1 и k_2 у тачкама E и F. Даље, нормале из тачака E и F на праве O_1D и O_2C редом секу се у тачки P. Најзад, тачке Q и R су редом подножја нормала из D на O_1P и из C на O_2P.

Доказати да центар O описаног круга троугла PQR лежи на правој AB.

4. Дато је $6n$ тачака на кружници, означених са $A_1,\dots,A_{6n}$ у цикличном поретку, где је $n \geqslant 2$ природан број. Свака од тачака $A_1, A_2, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{4n+1}, A_{4n+2}$ обојена је плаво ако јој је индекс паран, а црвено ако је непаран. Свака од осталих тачака A_i обојена је црвено ако јој је индекс i паран, а плаво ако је непаран.

Скуп $3n$ дужи је *магичан* ако свака дуж има по један црвен и плав крај и никоје две дужи немају заједничку тачку (ни теме). Колико има магичних скупова дужи?

Први разред – Б категорија

1. Тачке A, B, C, D и E на кружници су такве да су $ABCD$, $ACBE$ и $DEBC$ трапези чије су дуже основице редом AB, AC и DE. Ако су дијагонале трапеза $ABCD$ међусобно нормалне, одредити углове троугла ABE.

2. Доказати да је број

$$21!+3!+2020!+n!$$

сложен за сваки природан број n.

3. У равни је дат конвексан четвороугао. Конструисати квадрат чија је површина једнака површини четвороугла.

4. Дата је формула

$$F = \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow t\big) \Rightarrow \big((r \Rightarrow t) \Rightarrow (s \Rightarrow t)\big).$$

Одредити сва исказна слова $x \in \{p,q,r,s,t\}$ са особином да, кад год је $x=\top$, важи и $F=\top$.

5. У доњем левом угаоном пољу табле са 6 врста и 3 колоне стоји фигура. У једном потезу фигура може да се помери за једно поље нагоре или надесно.

Нека је A број путања фигуре које завршавају у неком пољу крајње десне колоне, а B број путања које завршавају у неком пољу крајње горње врсте. Шта је веће: A или B?

(Путања може садржати и потезе дуж крајње десне колоне или крајње горње врсте.)

Други разред – Б категорија

1. Циркус се састоји од шесторо људи и три слона: Јоце, Жике и Персе. Они треба да путују у четири различита камиона. У сваком камиону мора бити бар по један човек (слонови не возе), али два слона не могу да стану у један камион. Са слоницом Персом у камиону мора да буде бар двоје људи. Других ограничења нема. На колико начина се цео циркус може распоредити у камионе?

2. Нека је O обим, а P површина датог троугла. Доказати да важи $O^2 \geqslant 18P$.

3. За које вредности реалног параметра p систем

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x^2 + y^2 + p^2 = 2x + 2py \end{cases}$$

има бар једно реално решење?

4. Дато је осам дужи чије су дужине не мање од 100 и не веће од 2020. Доказати да се међу овим дужима могу одабрати три тако да буду странице неког троугла.

5. Доказати да број

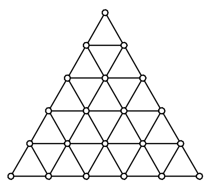
$$21! + 3! + 2020! + n!$$

није потпун квадрат ни за један природан број n.

Трећи разред – Б категорија

1. Да ли постоје цифре $x > 0$ и y такве да је број $\overline{xxxyyy}$ потпун квадрат?

2. Једнакостранични троугао странице 5 подељен је на 25 јединичних троуглова као на слици. У свако од темена јединичних троуглова уписан је природан број. Ако је збир бројева у теменима сваког јединичног троугла дељив са 3, доказати да је збир бројева у теменима сваког једнакостраничног троугла састављеног од јединичних такође дељив са 3.



3. У простору су дате три некопланарне праве кроз тачку O. Колико има правих кроз тачку O које са овим трима правим заклапају једнаке углове?

4. Доказати да важи

$$\frac{\sqrt{3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots \sqrt{6}}}}}}{\sqrt{3 - \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots \sqrt{6}}}}} > \frac{1}{\sqrt{6}},$$

где се у бројиоцу појављује 2020 корена, а у имениоцу 2019.

5. На шаховској табли (8×8) у другом реду стоји осам пиона исте боје. Анка и Бранка наизменично померају по једног пиона по шаховским правилима. Прва игра Анка. Побеђује играч који први дотера једног пиона на осми ред табле. Ако оба играча играју савршено, ко ће победити?

(По шаховским правилима сви пиони иду право напред, и то за по једно поље; изузетак су пиони у другом реду коју могу да се помере за једно или два поља напред.)

Четврти разред – Б категорија

1. Да ли је број

$$a = \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{9\pi}{18}$$

рационалан или ирационалан?

2. **(а)** Доказати да се од 9 узастопних чланова аритметичке прогресије увек може саставити магичан квадрат 3×3.

(б) Показати да постоји и магичан квадрат 3×3 чији су сви чланови различити, а у растућем поретку не чине аритметичку прогресију.

(У *магичном квадрату* збир бројева у свакој врсти, свакој колони и обема дијагоналама је исти.)

3. Одредити све природне бројеве x и y и ненегативне целе бројеве a, b и c такве да важе следеће једнакости:

$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c,$$
$$x^3 + y^3 - x - y + 2 = 2^c \cdot 3^b \cdot 5^a.$$

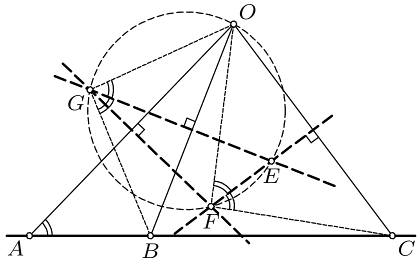
4. Конструисати троугао ABC ако су дати његов угао α, висина h_a и тежишна дуж t_a из темена A.

5. Означимо са $p(n)$ производ цифара природног броја n у декадном запису. Наћи све природне бројеве n такве да је

$$p(n) = n^2 - 21n - 40.$$

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ – РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1А.1. Не умањујући општост, претпостављамо да је тачка B између A и C. Темена троугла EFG су центри описаних кругова троуглова OBC, OAC и OAB - нека су то редом тачке E, F и G. Тада је $\sphericalangle OGE = \frac{1}{2}\sphericalangle OGB = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OAC = \frac{1}{2}\sphericalangle OFC = \sphericalangle OFE$, одакле следи тврђење задатка.



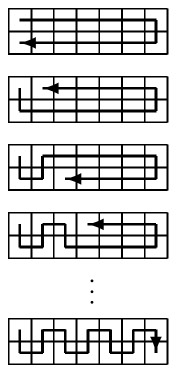
Друго решење. Средишта A', B' и C' дужи OA, OB и OC, редом, су колинеарна. Како су A', B' и C' подножја нормала из O на странице троугла EFG, тврђење задатка следи из *теореме о Симсоновој правој*:

- Подножја нормала из тачке P на странице троугла ABC су колинеарна ако и само ако P лежи на описаној кружници $\triangle ABC$.

1А.2. Докажимо индукцијом по n да змија има тачно n могућих путања. Ово је тривијално тачно за $n \leqslant 2$. Претпоставимо да тврђење важи за таблицу $2 \times (n-1)$, где је $n > 2$, и посматрајмо таблицу $2 \times n$. Имамо два случаја:

(1°) Ако у првом кораку змија иде десно, она и у другом мора да настави десно (ако скрене надоле, не може обићи сва поља) и тако даље, све до горњег десног поља таблице. Тако у овом случају змија има само једну могућу путању.

(2°) Ако у првом кораку змија иде доле, онда у другом иде десно. Надаље змија треба да обиђе сва поља преостале таблице $2 \times (n-1)$ полазећи из угаоног поља, а по индуктивној претпоставци она то може извести на $n-1$ начина.



Према томе, змија има укупно $(n-1)+1 = n$ могућих путања.

1А.3. Нека је $A = \{3, X, Y\}$. Како $3 \notin \mathcal{P}(A)$, оба елемента X и Y морају се налазити у $\mathcal{P}(A)$, тј. морају бити подскупови скупа A. Пошто не може да важи истовремено $X \in Y$ и $Y \in X$, сматраћемо без смањења општости да $Y \notin X$. Такође, $X \notin X$, па важи $X \subseteq \{3\}$. Даље, пошто $Y \notin Y$, важи $Y \subseteq A \setminus Y = \{3, X\}$. Дакле, имамо следеће могућности.

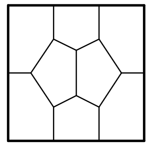
(1°) $X = \emptyset$. Тада је $Y \subset \{3, \emptyset\}$, а A је један од скупова $\{3, \emptyset, \{3\}\}$, $\{3, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ и $\{3, \emptyset, \{3,\emptyset\}\}$. Сви они задовољавају услов задатка.

(2°) $X = \{3\}$. Тада је $Y \subset \{3, \{3\}\}$, а A је један од скупова $\{3, \{3\}, \{\{3\}\}\}$, $\{3, \{3\}, \{3,\{3\}\}\}$ и $\{3, \{3\}, \emptyset\}$. Сви они задовољавају услов задатка, али овај трећи нам је већ познат.

Све у свему, задатак има пет решења:

$$\{3, \emptyset, \{3\}\}, \quad \{3, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{3, \{3\}, \{\{3\}\}\}, \quad \{3, \emptyset, \{3,\emptyset\}\}, \quad \{3, \{3\}, \{3,\{3\}\}\}.$$

1А.4. Претпоставимо да такав низ постоји. У том низу мора да постоји број који је дељив са 2^m. Тај број мора бити једнак 2^m, јер би у супротном имао више од m простих фактора. Међутим, тада се у низу мора налазити и бар један од бројева 2^{m-1} и $5 \cdot 2^{m-2}$, а оба имају само по $m-1$ простих фактора. Ова контрадикција завршава доказ.



1А.5. Могуће је. Једно решење је приказано на слици десно.

2А.1. Нека су дужине ивица квадра $p+2 < q+2 < r+2$. Из постојања необојене коцке следи да су $p, q, r > 0$. Коцкица са ниједном, једном и две црвене стране тада има редом pqr, $2(pq+pr+qr)$ и $4(p+q+r)$.

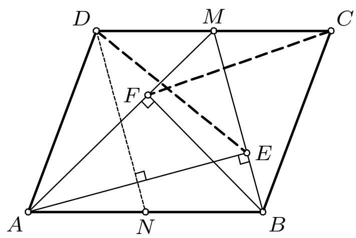
По услову задатка важи $4(p+q+r) > 2(pq+pr+qr)$. Међутим, ако је $p \geqslant 2$, онда је

$$2p > (pq+pr+qr) - 2(q+r) = (p-2)(q+r) + qr > (p-2) \cdot 2p + p^2,$$

тј. $4p > 3p^2$, што је немогуће. Дакле, $p = 1$. Сада је $2(q+r+1) > q+r+qr$, тј. $qr - q - r < 2$ и одатле $(q-1)(r-1) < 3$, што као једину могућност даје $q = 2$ и $r = 3$.

Према томе, дужине ивица квадра су 3, 4 и 5.

2А.2. Нека је N средиште странице AB. Тада је $NB = DM$, па је $BMDN$ паралелограм и отуда $DN \parallel BM$, тј. $DN \parallel BE$. Следи да је DN средња линија у (правоуглом) троуглу ABE, што је уједно и симетрала дужи AE, па је $DE = DA$. Аналогно је $CF = CB$, па како је $CB = DA$, тврђење задатка је доказано.



2А.3. Нека има k плавокапих патуљака којима је претходио зеленокапи. Кад год се неки од ових плавокапих патуљака појавио, ред није био празан - дакле, чекао је неки зеленокапи, а он га је избацио. Следи да је бар k зеленокапих патуљака истерано и одатле $k \leqslant 2$.

Ако је $k = 0$, примљене су 4 плаве капе, а за њима највише 4 зелене (неки зеленокапи патуљци могли су бити избачени). У овом случају има 5 могућих распореда.

Ако је $k = 1$, примљене су 4 плаве капе у једној или две групе, за шта има 4 могућности $(0{+}4, 1{+}3, 2{+}2, 3{+}1)$ и једна зелена капа пре последње групе плавих. Остају још највише две зелене капе које су могле бити предате пре или после друге групе плавих, а за то има 6 могућности $(2{+}0, 1{+}1, 0{+}2, 1{+}0, 0{+}1, 0{+}0)$. Ово даје укупно $4 \cdot 6 = 24$ распореда.

Ако је $k = 2$, примљене су 4 плаве капе у две или три групе (за шта има 6 могућности) и две зелене капе, по једна пре последње две групе плавих. То даје 6 распореда.

Укупан број могућих распореда капа је $5 + 24 + 6 = 35$.

2А.4. Како је

$$(a+103b)+101(a-b)=2(51a+b)=103(a+b)-(a+101b),$$

из услова задатка следи да је $51a+b$ дељиво са 101 и 103, те је дељиво и са $101\cdot 103 = 10403$ и одатле $51a+b \geqslant 10403$.

С друге стране, ако је $51a+b = 10403$ (нпр. за $a=1$ и $b=10352$), из горњих једнакости одмах следи да $103 \mid a+101b$ и $101 \mid a+103b$. Према томе, одговор је 10403.

2A.5. Претпоставимо да се скуп A састоји од само четири цифре. Тада збирови по две цифре из A, којих има 10, морају да дају све могуће остатке при дељењу са 10. Међутим, ако у скупу A има k парних и $4-k$ непарних цифара, онда се међу збировима по две цифре из A може наћи највише $k(4-k) \leqslant 4$ непарних, што је контрадикција. Дакле, скуп A садржи бар 5 цифара.

С друге стране, нпр. скуп $A = \{0,1,2,3,6\}$ задовољава услове. Заиста, свака цифра се може написати као збир две цифре из скупа A. Према томе, одговор је 5.

3A.1. Израз је дефинисан за $x \neq 0$ и $x \neq \frac{1}{2}$. Разликоваћемо два случаја.

(1°) $x < 0$ или $x > \frac{1}{2}$. Тада је неједначина еквивалентна са $(6-3^{x+1})(2x-1) > 10x$, што се своди на

$$f(x) = (1-2x)(3^{x+1}-1) > 5.$$

За $x < -1$ или $x > \frac{1}{2}$ важи $f(x) < 0$. Остаје да испитамо случај $-1 \leqslant x < 0$. Тада је $0 < 3^{x+1}-1 < 2$, па мора бити $1-2x > \frac{5}{2}$, тј. $x < -\frac{3}{4}$. Међутим, тада је $3^{x+1}-1 < \sqrt[4]{3}-1 < \frac{1}{3}$, па због $1-2x < 3$ следи $f(x) < 1$. Дакле, у овом случају нема решења.

(2°) $0 < x < \frac{1}{2}$. У овом случају неједначина се своди на $f(x) < 5$, али на овом интервалу свакако важи $|1-2x| < 1$ и $|3^{x+1}-1| < \sqrt{27}-1 < 5$, па је $f(x) < 5$, тј. свако $x \in (0, \frac{1}{2})$ је решење, а то је и укупно решење задатка.

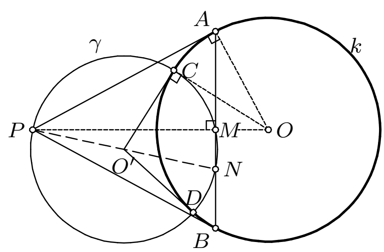
3A.2. Ако је $p=q$, онда је $\frac{p^q+q^p}{pq} = 2p^{p-2}$ паран број.

Нека је $p \neq q$. По Фермаовој теореми је $p^q \equiv p \pmod{q}$, па $pq \mid p^q - p$. Слично, $pq \mid q^p - q$. Дакле, $pq \mid p^q + q^p - p - q$, што је паран број. Како је $p+q < pq$, имамо

$$\left\lfloor \frac{p^q+q^p}{pq} \right\rfloor = \frac{p^q+q^p-p-q}{pq},$$

а то је парно.

3A.3. Означимо са O и O' редом центре кругова k и γ. Троуглови OMA и OAP су слични, па је $OM \cdot OP = OA^2 = OC^2$. Одавде следи да је OC тангента на круг γ. Аналогно је и OD тангента на γ. Према томе, важи $\sphericalangle OCO' = \sphericalangle ODO' = 90°$, што значи да се тангенте на k у тачкама C и D секу у тачки O', тј. средишту дужи NP.



Друго решење. Инверзија у односу на круг k слика тачке M и P једну у другу, па она фиксира круг γ. Следи да су кругови k и γ ортогонални, па се тангенте на k у C и D секу у центру круга γ.

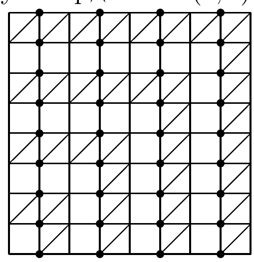
3А.4. *Одговор:* Сви парови (a, b), $1 < a < b$.

Тражени скуп се може конструисати на следећи начин. Узмимо произвољних b природних бројева, нпр. $x_1, x_2, \ldots, x_b$, и означимо

$$N = \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_a \leqslant b} (x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_a}).$$

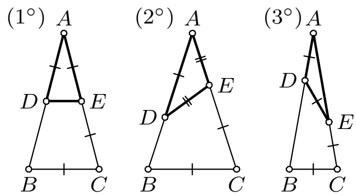
Тада скуп $\{Nx_1, Nx_2, \ldots, Nx_b\}$ има жељено својство.

3А.5. Нека два наспрамна темена великог квадрата имају координате $(0, 0)$ и $(2n, 2n)$. Означимо све тачке (x, y) у којима је $0 < x < 2n$ непарно и $0 \leqslant y \leqslant 2n$. Означено је укупно $n(2n+1)$ тачака. Свака нацртана дијагонала има бар једно теме у означеној тачки, али никоје две немају заједничко теме. Следи да не може бити нацртано више од $n(2n+1)$ дијагонала.



С друге стране, ако нацртамо све дијагонале AB са теменима $A(x, y)$ и $B(x+1, y+1)$ у којима је $\max\{x, y\}$ непарно, то ће бити укупно $n(2n+1)$ дијагонала без заједничких тачака. Заиста, темена $A(x, y)$ у којима је $\max\{x, y\} = k$ има $2k-1$, тако да је укупно нацртано $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n-1) = n(2n+1)$ дијагонала.

4А.1. Означимо $\sphericalangle BAC = \alpha$. Имамо три могућности.



(1°) $AD = AE$. Тада је $AE = CE = BC$, тј. $AC = 2BC$, одакле следи $\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{4}$.

(2°) $AE = DE$. Тада је и $BD = DE$. Како је такође $BC = CE$, четвороугао $CBDE$ је делтоид, па је $90° - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DEC = 180° - \sphericalangle AED = 2\alpha$, тј. $\alpha = 36°$.

(3°) $AD = DE$. Ако је M средиште дужи AE, онда је $\sphericalangle AMD = 90°$, па је овај случај еквивалентан са $BD = AE = 2AM = 2AD \cos \alpha$. Даље важи $AB = AD + BD = AD(1 + 2\cos\alpha) = 2AB(1 + 2\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}$. Према томе, $\frac{1}{2} = (1 + 2\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = (3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{3\alpha}{2}$. Следи да је $\alpha = 20°$ или $\alpha = 100°$, при чему друго решење очигледно отпада.

Дакле, могуће вредности угла BAC су $2 \arcsin \frac{1}{4}$, $36°$ и $20°$.

4А.2. Број у i-тој врсти и j-тој колони ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant n$) означићемо са $a_{i,j}$. Додефинисаћемо $a_{i,j} = 0$ за све остале парове индекса i, j.

Нека је $d_{i,0} = d_{i,n+1} = 0$ и $d_{i,j} = a_{i-1,j} - a_{i,j} + a_{i+1,j}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$. Услов задатка нам даје

$$d_{i,j-1} - d_{i,j} + d_{i,j+1} = 0 \quad \text{за} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \text{ и } 1 \leqslant j \leqslant n \tag{$*$}$$

и важи

$$a_{1,j} = d_{2,j} + d_{3,j}, \quad a_{2,j} = d_{1,j} + d_{2,j} + d_{3,j}, \quad a_{3,j} = d_{1,j} + d_{2,j}.$$

Ако је $d_{1,1} = d_{2,1} = d_{3,1} = 0$, следи да је $d_{i,j} = 0$ и одатле $a_{i,j} = 0$ за све i, j. Према томе, услов задатка се своди на одабир бројева $d_{i,j}$ који нису сви нула и задовољавају $(*)$. Међутим, из $(*)$ следи да низ $d_{i,j}$ $(j = 0, 1, \dots)$ има облик $0, x, x, 0, -x, -x, 0, x, x, 0, \dots$, па како је $d_{i,n+1} = 0$, то може да не буде нула-низ само ако $3 \mid n + 1$.

Према томе, одговор су сви бројеви n облика $n = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

4А.3. Растојањем даме од ивице зовемо растојање од центра свог тренутног поља до центра најближег ивичног поља. Доказаћемо индукцијом по k да дама која је на растојању $k \geqslant 1$ од ивице има $8 \cdot 9^{k-1}$ начина да стигне до ивице.

Ако је $k = 1$, дама може доћи до ивице потезом у било ком од 8 могућих смерова, што даје 8 начина. Нека је $k > 1$. Дама има 8 начина да стигне до ивице у једном потезу. Осим тога, за свако $i = 1, \dots, k - 1$, има 8 начина да стигне до поља које је на растојању i од ивице, а одатле $8 \cdot 9^{i-1}$ начина до ивице. То јој укупно даје $8 + 8\sum_{i=1}^{k-1} 8 \cdot 9^{i-1} = 8 + 8(9^{k-1} - 1) = 8 \cdot 9^k$ начина, чиме је индукција закључена.

Централно поље је на растојању n од ивице, те тада дама има $8 \cdot 9^{n-1}$ начина.

4А.4. Не умањујући општост, претпоставићемо да је НЗД$(a, b, c, d) = 1$.

Сабирањем датих једначина и одузимањем $2(ab + cd)$ од обеју страна добијамо

$$(a - b)^2 + (c - d)^2 = 3(ab + cd).$$

Одавде следи да су $a - b$ и $c - d$ дељиви са 3, а тада је десна страна дељива са 9, тј. $3 \mid ab + cd \equiv a^2 + c^2 \pmod 3$. Међутим, сада и a и c, а самим тим и b и d, морају бити дељиви са 3, што је противно полазној претпоставци.

4А.5. Нека је $a_1 + a_2 + \dots + a_n = x_n a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$, где су по услову x_n непарни бројеви. Тада је $x_n a_{n+1} = (a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_n = x_{n-1} a_n + a_n = (x_{n-1} + 1) a_n$, тј. $a_{n+1} = \frac{x_{n-1}+1}{x_n} \cdot a_n$. Индукцијом следи

$$a_{n+1} = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_{n-1} + 1)}{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot a_1 = \frac{2^{n-1}}{x_n} \cdot \frac{\frac{x_1+1}{2} \cdot \frac{x_2+1}{2} \cdots \frac{x_{n-1}+1}{2}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot a_1.$$

Како је бројилац $x_1 z_2 \cdots x_n$ непаран и бројеви $\frac{x_1+1}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+1}{2}$ цели, следи да $2^{n-1} \mid a_{n+1}$, те је

$$y_n = \frac{x_n a_{n+1}}{2^{n-1}} = a_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{x_i + 1}{2x_i}$$

природан број. Међутим, како је $\frac{x_i+1}{2x_i} \leqslant 1$ за све i, низ (y_n) не расте, одакле закључујемо да је он почев од неког члана константан. Дакле, за свако довољно велико i, нпр. за $i \geqslant N$, важи $\frac{x_i+1}{2x_i} = 1$, тј. $x_i = 1$, што је еквивалентно са $a_{n+1} = 2a_n$.

1Б.1. Претпоставимо да је $x^2 = 2020\dots202$ за неки природан број x. Број x мора бити паран, тј. $x = 2y$, па имамо $4y^2 = 2020\dots202$. Дељењем са 2 следи $2y^2 = 1010\dots101$, што је немогуће, јер је лева страна парна, а десна непарна.

Друго решење. Квадрат целог броја увек се завршава једном од цифара 0, 1, 4, 9, 6 или 5. Никад се не завршава цифром 2.

1Б.2. У првом кругу одиграно је 500 мечева (након чега остаје 501 ученик), у другом 250 (остаје 251 ученик), у трећем 125 (остаје 126 ученика), у четвртом 63, а надаље редом $31, 16, 8, 4, 2, 1$ мечева. Укупан број мечева је $500 + 250 + 125 + 63 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1000$.

Друго решење. У сваком мечу испада по један ученик. Да би остао само један ученик, треба да их испадне 1000, тј. да буде одиграно 1000 мечева.

1Б.3. Ако први монах лаже понедељком, из његове изјаве тада следи да недељом говори истину, што значи да уторком лаже. У том случају изјава другог монаха је истинита, па и он лаже понедељком, што је немогуће. Према томе, први монах заиста јесте лагао у недељу, а пошто у понедељак није лагао, јесте у суботу.

Други монах је у уторак рекао да лаже понедељком. Ако је то истина, онда он лаже и недељом, што је немогуће. Према томе, он је лагао у уторак, а лаже и средом. За трећег монаха остаје као једина могућност да лаже четвртком и петком. Понедељком не лаже ниједан.

1Б.4. Леву страну једнакости означићемо са $\mathcal{L}$, а десну са $\mathcal{R}$. За $X \subseteq U = A \cup B \cup C \cup D$, са $\overline{X} = U \setminus X$ означавамо комплемент скупа X (у односу на U). Тада за $X, Y \subseteq U$ важи $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$. Користећи особине комплемената имамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (A \cup B) \cap \overline{(C \cap D)} \cap \overline{\big((A \cup C) \cap \overline{(B \cap D)}\big)} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup \overline{D}) \cap \big(\overline{(A \cup C)} \cup (B \cap D)\big) \\
&= (A \cup B) \cap \big[\big((\overline{C} \cup \overline{D}) \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big) \cup \big((\overline{C} \cup \overline{D}) \cap (B \cap D)\big)\big] \\
&= (A \cup B) \cap \big[\big(\overline{A} \cap \overline{C}\big) \cup \big(\overline{C} \cap B \cap D\big)\big] \\
&= \big((A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big) \cup \big((A \cup B) \cap (\overline{C} \cap B \cap D)\big) \\
&= \big(\overline{C} \cap B \cap \overline{A}\big) \cup \big(\overline{C} \cap B \cap D\big) = \big(\overline{C} \cap B\big) \cap \big(\overline{A} \cup D\big) = (B \setminus C) \cap \overline{(A \setminus D)} = \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Друго решење. Једнакост доказујемо помоћу таблице припадности:

A	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
B	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
C	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
D	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$A \cup B$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$C \cap D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$A \cup C$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$B \cap D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$(A \cup B) \setminus (C \cap D)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$(A \cup C) \setminus (B \cap D)$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$
$B \setminus C$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$A \setminus D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\boldsymbol{\mathcal{R}}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$

1Б.5. Подсетимо се да је троугао са страницама a, b и c, где је $a \leqslant b \leqslant c$:

- оштроугли ако је $a^2 + b^2 > c^2$;
- правоугли ако је $a^2 + b^2 = c^2$;
- тупоугли ако је $a^2 + b^2 < c^2$.

Означимо са P површину датог троугла, а са a, b и c редом странице које одговарају висинама 5, 4 и 3. Тада је $5 \cdot a = 4 \cdot b = 3 \cdot c = 2P$, тј. $a = \frac{2P}{5}$, $b = \frac{2P}{4}$ и $c = \frac{2P}{3}$. При томе је $a < b < c$. Како је

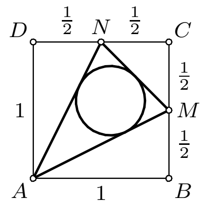
$$a^2 + b^2 = \frac{4P^2}{25} + \frac{4P^2}{16} = \frac{41P^2}{100} < \frac{4P^2}{9} = c^2,$$

дати троугао је тупоугли.

2Б.1. Веће је 4^{100}. Заиста, $2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100} < \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 3^{100} < \left(\frac{4}{3}\right)^{100} \cdot 3^{100} = 4^{100}$.

2Б.2. Са $P_{\mathcal{A}}$ означаваћемо површину многоугла $\mathcal{A}$, а са $O_{\mathcal{A}}$ његов обим.
По Питагориној теореми је $AM = AN = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ и $MN = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, па је $O_{AMN} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$, док је $P_{AMN} = P_{ABCD} - P_{AMB} - P_{AND} - P_{CMN} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Следи да је

$$r = \frac{2P_{AMN}}{O_{AMN}} = \frac{3/2}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{12}.$$



2Б.3. Апсциса x пресечне тачке задовољава једначину $3x - m = (m+1)x^2 + x + 1$, тј.

$$(m+1)x^2 - 2x + m + 1 = 0. \qquad (*)$$

Дакле, ова једначина треба да има само једно реално решење.

(1°) Ако је $m \neq -1$, онда дискриминанта $D = 4 - 4(m+1)^2$ једначине $(*)$ мора да буде нула, одакле је $m = 0$ или $m = -2$.

За $m = 0$ дате функције су $y = 3x$ и $y = x^2 + x + 1$, а додирна тачка $(1, 3)$;

за $m = -2$ то су $y = 3x + 2$ и $y = -x^2 + x + 1$, а додирна тачка $(-1, -1)$.

(2°) Ако је $m = -1$, дате функције су $y = 3x + 1$ и $y = x + 1$, а (једини) пресек тачка $(0, 1)$.

Према томе, одговор је $m \in \{-2, -1, 0\}$.

2Б.4. Означимо $d = \text{НЗД}(a, b)$ и $a = da_1$, $b = db_1$, при чему је $\text{НЗД}(a_1, b_1) = 1$. Тада је $\text{НЗС}(a, b) = da_1b_1$, па дата једначина постаје $da_1b_1 - d = 2019$, тј. $d(a_1b_1 - 1) = 2019 = 3 \cdot 673$ (број 673 је прост). Имамо следеће могућности.

(1°) $d = 1$, $a_1b_1 = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Пошто је $\text{НЗД}(a_1, b_1) = 1$, пар $(a_1, b_1) = (a, b)$ може бити $(2020, 1)$, $(505, 4)$, $(404, 5)$ или $(101, 20)$.

(2°) $d = 3$, $a_1b_1 = 674 = 2 \cdot 337$. Пар (a_1, b_1) може бити $(674, 1)$ или $(337, 2)$, а одговарајући парови (a, b) су $(2022, 3)$ и $(1011, 6)$.

(3°) $d = 673$, $a_1b_1 = 4$. Мора бити $(a_1, b_1) = (4, 1)$, па је $(a, b) = (2692, 673)$.

(4°) $d = 2019$, $a_1b_1 = 2$. Мора бити $(a_1, b_1) = (2, 1)$, па је $(a, b) = (4038, 2019)$.

Укупно има 8 решења: $(2020, 1)$, $(505, 4)$, $(404, 5)$, $(101, 20)$, $(2022, 3)$, $(1011, 6)$, $(2692, 673)$ и $(4038, 2019)$.

2Б.5. Истинитост изјаве се мења само приликом оглашавања лажљивог папагаја. Приликом 2019 изјава након прве (закључно са 2020-том) сваки папагај (па и лажљиви) би се огласио тачно $\frac{2019}{3} = 673$ пута, те ће 2020-та изјава представљати негацију прве - „Пера није лажов”. Међутим, то значи да је папагај који је изрекао 2020-ту изјаву негирао 2019-ту, те је он лажов, а то је исти онај папагај који је започео игру. Другим речима, лажов је оптужио Перу да лаже, што значи да Пера не лаже.

3Б.1. Ако је $|A| = k$, онда је $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$ и одатле $1 = |\mathcal{P}(A) \setminus A| \geqslant |2^k - k|$.

Међутим, за $k \geqslant 2$ важи $2^k - k \geqslant 2$. Ово се лако доказује индукцијом по k, јер је $2^2 - 2 = 2$ и $2^{k+1} - (k+1) = (2^k - k) + (2^k - 1) > 2^k - k$ за све k. Према томе, $k \geqslant 2$ је немогуће, те мора бити $k \leqslant 1$.

3Б.2. По услову задатка је разлика $x^2 - x$ дељива са 10^k. Следи да је, за свако $n = 2, 3, \dots$, разлика $x^{n+1} - x^n = x^{n-1}(x^2 - x)$ такође дељива са 10^k, што значи да бројеви x^n и x^{n+1} имају исти k-тоцифрени завршетак. Одавде следи (нпр. индукцијом по n) да сви бројеви $x, x^2, x^3, x^4, \dots$ имају исти k-тоцифрени завршетак.

3Б.3. Из дате једначине квадрирањем следи $(4\sin^3 x - \sin x)^2 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, што након развијања даје једначину по $\sin x$:

$$0 = 16\sin^6 x - 8\sin^4 x + 2\sin^2 - 1 = (2\sin^2 x - 1)(8\sin^4 x + 1).$$

Други фактор није нула, па мора бити $2\sin^2 x - 1 = 0$, тј. $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(1°) У случају $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ полазна једначина даје $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(2°) у случају $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ полазна једначина даје $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Према томе, опште решење је $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Друго решење. Дељењем са $\cos x$ дату једначину можемо записати као $\operatorname{tg} x(4\sin^2 x - 1) = 1$. Како је $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, одавде добијамо еквивалентну једначину по $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x \left(\frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - 1 \right) = 1, \quad \text{тј.} \quad 3\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

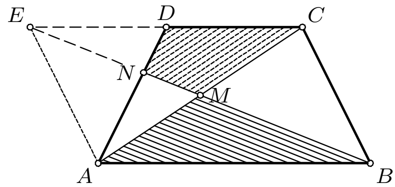
што се факторише као $(\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1) = 0$. Једино реално решење је $\operatorname{tg} x = 1$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3Б.4. **(б)** У сваком мечу испада по један ученик. Да би остао само један ученик, треба да их испадне $n - 1$, тј. да буде одиграно $n - 1$ мечева.

Одавде следи и део (а): за $n = 2020$ биће одиграно 2019 мечева.

Друго решење дела (а). У првом кругу бива одиграно 1010 мечева, а пролази 1010 ученика. У другом кругу биће одиграно 505 мечева и остаће исто толико ученика. У наредним круговима биће одиграно редом 252, 126, 63, 32, 16, 8, 4, 2 и 1 мечева, што је укупно 2019.

3Б.5. Нека се праве BM и CD секу у тачки E. Троуглови MAB и MCE су подударни (једнаки углови и $MA = MC$), па је $CE = AB = 2CD$, тј. $DE = CD$. Следи да је тачка N тежиште троугла ACE, па је $EN = \frac{2}{3}EM$.



Ако је сада $P(MAB) = P(MCE) = P$, имамо $P(EDN) = \frac{2}{3}P(EDM) = \frac{1}{3}P(ECM) = \frac{1}{3}P$ и $P(CDNM) = P(ECM) - P(EDN) = \frac{2}{3}P$, одакле следи тврђење.

4Б.1. Углове троугла означавамо уобичајено са α, β, γ, а странице наспрам њих редом a, b, c. По косинусној теореми је $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, а по синусној $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Одавде је

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R}{2abc}(b^2+c^2-a^2)$$

и слично

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{R}{2abc}(c^2+a^2-b^2), \quad \operatorname{ctg}\gamma = \frac{R}{2abc}(a^2+b^2-c^2).$$

Сада, ако је нпр. $\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha$, тј. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma = 2\operatorname{ctg}\beta$, множењем са $\frac{2abc}{R}$ добијамо $(b^2+c^2-a^2) + (a^2+b^2-c^2) = 2(c^2+a^2-b^2)$, тј. $a^2 + c^2 = 2b^2$, па a^2, b^2 и c^2 заиста чине аритметички низ.

4Б.2. Означимо $d = \text{НЗД}(a,b)$ и $a = da_1$, $b = db_1$, при чему је $\text{НЗД}(a_1,b_1) = 1$. Тада је $\text{НЗС}(a,b) = da_1b_1$, па дата једнакост постаје

$$da_1b_1 + d = da_1 + db_1, \quad \text{тј.} \quad 0 = da_1b_1 - da_1 - db_1 + d = d(a_1-1)(b_1-1).$$

Следи да је $a_1 = 1$ или $b_1 = 1$, тј. $a = d \mid b$ или $b = d \mid a$.

4Б.3. Приметимо да је $\left(x_1 - \sqrt{2018}\right)^2 = 2019$, тј. $x_1^2 - 1 = 2x_1\sqrt{2018}$.

Квадрирањем добијамо $(x_1^2-1)^2 - 4 \cdot 2018x_1^2 = x_1^4 - 8074x_1^2 + 1 = 0$, па је x_1 нула полинома

$$P(x) = x^4 - 8074x^2 + 1.$$

Напомена. Четири нуле добијеног полинома $P(x)$ су $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2018} \pm \sqrt{2019}$.

Иначе, формулација каква је дата на такмичењу допушта и тривијално решење $P(x) \equiv 0$.

4Б.4. Нека је x_1 реално решење дате једначине. Имагинарни део броја $P(x_1)$ је $-6x_1^2 + 9x_1 - 3$, па је $0 = -6x_1^2 + 9x_1 - 3 = -3(2x_1-1)(x_1-1)$, одакле следи $x_1 = 1$ или $x_1 = \frac{1}{2}$. Лако се проверава да је заиста $P(\frac{1}{2}) = 0$, те је $x_1 = \frac{1}{2}$. Сада дељењем са $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$ налазимо

$$P(x) = (2x-1)\big(x^2 - (2+3i)x - 1 + 3i\big).$$

Остаје да се реши једначина $f(x)=x^2-(2+3i)x-1+3i=0$. Допуњавањем до квадрата добијамо $f(x)=\left(x-1-\frac{3}{2}i\right)^2+\frac{1}{4}$, одакле следи $\left(x-1-\frac{3}{2}i\right)^2=-\frac{1}{4}$, тј. $x=1+\frac{3}{2}i\pm\frac{1}{2}i$.

Тако добијамо сва три решења: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=1+i$ и $x_3=1+2i$.

Напомена. Једначина $f(x)=0$ се може решити и применом уобичајене формуле за решења квадратне једначине: $x_{2,3}=\frac{2+3i+\sqrt{(2+3i)^2-4(3i-1)}}{2}=\frac{2+3i\pm\sqrt{-1}}{2}=\frac{2+3i\pm i}{2}$. Ипак, то је у овом решењу избегнуто јер, строго узевши, квадратни корен на скупу $\mathbb{C}$ није дефинисан.

4Б.5. Гомилу на којој је број колачића дељив са три назваћемо *тројном.*

У почетном стању све гомиле су тројне. Ово својство ће заувек остати на снази. Заиста, поделом тројне гомиле на два једнака дела, као и спајањем двеју тројних гомила, опет се добијају тројне гомиле. Како "гомила" са само једним колачићем није тројна, Марко је неће моћи направити.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ – РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1A.1. За почетак, из $x \diamondsuit (y-x)$ одмах следи $|x-1| \leqslant 1$, па мора бити $x \geqslant 0$.

Означимо $|x-1| = d \geqslant 0$. Тада је $x = 1 \pm d$, али из услова $x \diamondsuit (y-x)$ добијамо и $d + |(y-x)-2| \leqslant 1$, тј. $|(y-x)-2| \leqslant 1-d$. Одавде следи $d \leqslant 1$ и $1+d \leqslant y-x \leqslant 3-d$.

На исти начин, из услова $x \diamondsuit (y+x)$ добијамо $1+d \leqslant y+x \leqslant 3-d$.

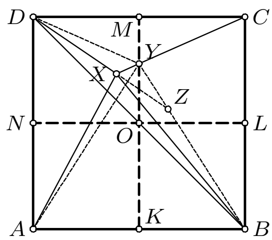
Међутим, сада из $y+x \leqslant 3-d$ и $y-x \geqslant 1+d$ следи $2x = (y+x)-(y-x) \leqslant (3-d)-(1+d) = 2-2d$, тј. $x \leqslant 1-d$. Према томе, $x = 1-d$, $y-x = 1+d$ и $y+x = 3-d$, одакле добијамо $y = 2$.

1A.2. Нека је k број црвених бројева унутар једног периода дужине d. Посматрајмо бројеве

$$\begin{array}{cccc} a+1 & a+2 & \dots & a+d \\ b+1 & b+2 & \dots & b+d \\ c+1 & c+2 & \dots & c+d. \end{array}$$

У свакој врсти ове табеле има по k црвених бројева, што укупно даје $3k$ црвених бројева. С друге стране, свака од d колона садржи по један црвен број. Дакле, $d = 3k$.

1A.3. Одговор је унија дужи KM и LN, где су K, L, M и N редом средишта страница AB, BC, CD и DA. Ове тачке заиста задовољавају услов задатка: нпр. за X на дужи KM важи $AX{=}BX$ и $CX{=}DX$.



Претпоставимо да X није на дужима KM и LN. Без смањења општости, X лежи унутар $\triangle OMD$ или на дужи OD. Нека је $CX \cap OM = \{Y\}$ и $DX \cap BY = \{Z\}$. Како је $AY = BY$ и $CY = DY$, имамо неједнакости троугла:

(i) $AX + CX = AX + XY + CY > AY + CY = BY + DY$;

(ii) $BY + DY = BZ + YZ + DY \geqslant BZ + DZ$;

(iii) $BZ + DZ = BZ + XZ + DX \geqslant BX + DX$.

Комбиновањем ових неједнакости следи $AX + CX > BX + DX$.

Друго решење. Означимо са x, y, z и w редом растојања тачке X од правих DA, AB, BC и CD. По Питагориној теореми услов $AX + CX = BX + DX$ постаје

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+w^2} = \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{x^2+w^2}.$$

Квадрирање обеју страна даје $\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)} = \sqrt{(y^2+z^2)(x^2+w^2)}$, што поновним квадрирањем постаје $(x^2+y^2)(z^2+w^2) = (y^2+z^2)(x^2+w^2)$, тј.

$$\cancel{x^2z^2} + x^2w^2 + z^2y^2 + \cancel{y^2w^2} = x^2y^2 + \cancel{x^2z^2} + \cancel{y^2w^2} + z^2w^2 \quad \Rightarrow$$
$$x^2w^2 - x^2y^2 - z^2w^2 + z^2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2-z^2)(w^2-y^2) = 0.$$

Према томе, $x = z$ или $y = w$, што значи да тачка X лежи на једној од две средње линије квадрата. С друге стране, ако је $x = z$ или $y = w$, све горње једнакости тривијално важе.

1A.4. Одговор је *не*.

Претпоставимо супротно. Међу датих 2020 бројева бар један, а највише два су дељива са $2^{10} = 1024$. То значи да је најмањи заједнички садржалац за оба скупа дељив са 2^{10}, па сваки скуп садржи тачно по један број дељив са 2^{10}. Према томе, у једном скупу налази се број $2^{10}k$, а у другом $2^{10}(k+1)$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Међутим, тачно један од та два броја је дељив и са 2^{11}. Следи да ће најмањи заједнички садржалац у само једном од два скупа бити дељив са 2^{11}, што је контрадикција.

1A.5. Одговор је $F = 3$ и достиже се само за тројку $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

Како је $\max\{x, 1-y\} \geqslant x$, $\max\{y, 2-z\} \geqslant y$ и $\max\{z, 3-x\} \geqslant z$, имамо $F \geqslant x+y+z$. Слично важи $F \geqslant (1-y)+(2-z)+(3-x) = 6-x-y-z$. Сабирањем следи $2F \geqslant 6$, тј. $F \geqslant 3$. Ова вредност се достиже само ако у свим наведеним неједнакостима важи знак једнакости, а то је само ако је $x = 1-y$, $y = 2-z$ и $z = 3-x$. Одавде лако добијамо $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

2A.1. Сваки број облика

$$\underbrace{22\ldots22}_{2n}\underbrace{11\ldots11}_{2^{2n}-4n}$$

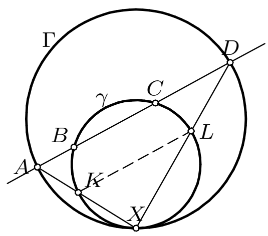
задовољава услов задатка. Заиста, он је очигледно дељив са 11, а збир и производ цифара су му једнаки 2^{2n}.

2A.2. Друга једначина је еквивалентна са $ab+ac+ad+bc+bd+cd = \frac{15}{2}$. Сада је

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)&+(a-1)(c-1)+(a-1)(d-1)+(b-1)(c-1)+(b-1)(d-1)+(c-1)(d-1)\\ &= ab+ac+ad+bc+bd+cd-3(a+b+c+d)+6 = -\tfrac{3}{2},\end{aligned}$$

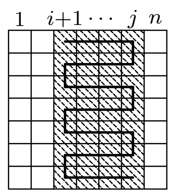
па је бар један од бројева $a-1$, $b-1$, $c-1$ и $d-1$ негативан, одакле следи тврђење.

2A.3. Нека праве XA и XD редом поново секу кружницу γ у тачкама K и L. Потенције тачака A и D у односу на кружницу γ дају нам $AB \cdot AC = AX \cdot AK$ и $DB \cdot DC = DX \cdot DL$.



С друге стране, хомотетија са центром X која слика круг Γ у γ пресликава праву ℓ у праву KL, те је $KL \parallel \ell$. Одатле је $\frac{AK}{DL} = \frac{AX}{DX}$, па је $\frac{AB \cdot AC}{DB \cdot DC} = \frac{AX \cdot AK}{DX \cdot DL} = \frac{AX^2}{DX^2}$.

2A.4. **(а)** За $i = 0, 1, \ldots, n$ означимо са S_i збир елемената у првих i колона. Бар два од ових збирова су конгруентна по модулу m, рецимо S_i и S_j $(i < j)$, те $m \mid S_j - S_i$. То значи да је збир свих бројева у колонама од $(i{+}1)$-ве до j-те дељив са m. Било који пут који обилази сва ова поља (такав постоји: видети слику) задовољава услов задатка.

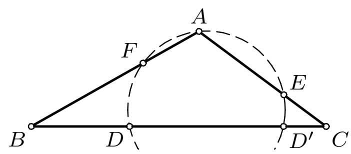


(б) Упишимо у поља прве врсте јединице, а у сва остала поља нуле. Збир бројева на сваком путу је између 1 и n, па није дељив са m.

2A.5. Тврђење доказујемо индукцијом по броју тачака n. Оно важи за $n \leqslant 5$. Заиста, ако има 5 тачака A, B, C, D, E и сваке две повезује дуж, можемо обојити дужи AB, BC, CD, DE, EA једном бојом, а преостале дужи другом. Претпоставимо да је $n \geqslant 6$ и да тврђење важи за мање од n тачака. Одаберимо тачку P из које излазе 4 дужи, рецимо PA, PB, PC, PD (ако такве тачке нема, можемо доцртати нове дужи). По индуктивној претпоставци, можемо обојити све дужи осим ове четири тако да услов задатка буде задовољен.

Ако су међу тачкама A, B, C, D сваке две спојене, онда између скупа $\{P, A, B, C, D\}$ и скупа свих осталих тачака нема дужи, па ова два скупа можемо обојити независно. С друге стране, ако нема нпр. дужи CD, онда PA и PB бојимо једном бојом тако да PAB не буде једнобојан троугао, а PC и PD другом бојом. Ово бојење задовољава услов.

3A.1. Означимо $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$.



Нека круг $ADEF$ поново сече страницу BC у тачки D'. Из потенције тачке B је $BA \cdot BF = BD \cdot BD'$, тј. $\frac{2}{3}c^2 = \frac{1}{3}a \cdot BD'$, што нам даје $BD' = \frac{2c^2}{a}$. Слично имамо $CA \cdot CE = CD \cdot CD'$, тј. $\frac{1}{3}b^2 = \frac{2}{3}a \cdot CD'$, што нам даје $CD' = \frac{b^2}{2a}$. Најзад, из услова $a = BD' + CD' = \frac{b^2+4c^2}{2a}$ следи $2a^2 = b^2 + 4c^2$. У нашем случају је $BC = 26$.

3A.2. Како је $|z|^2 = z\overline{z}$ и $|w|^2 = \overline{w}$, сабирање датих једначина даје

$$4 + 2i = z\overline{z} + zw + w\overline{w} + \overline{zw} + z + \overline{w} = (z + \overline{w})(\overline{z} + w) + z + \overline{w} = |z + \overline{w}|^2 + (z + \overline{w}).$$

Ако означимо $z + \overline{w} = a + bi$, добићемо $4 + 2i = a^2 + b^2 + a + bi$, одакле је $b = 2$ и $a^2 + b^2 + a = 4$, тј. $a \in \{-1, 0\}$. Испитаћемо оба случаја.

(1°) $a = 0$. Тада је $z + \overline{w} = 2i$, тј. $\overline{w} = 2i - z$, па је $\overline{z} + w = -2i$. Сада прва једначина даје $2 + 6i = z(\overline{z} + w) + \overline{w} = 2i - (1 + 2i)z$ и одатле $z = -2$ и $w = 2 - 2i$.

(2°) $a = -1$. Тада је $z + \overline{w} = -1 + 2i$, тј. $\overline{w} = -1 + 2i - z$, па је $\overline{z} + w = -1 - 2i$. Сада је $2 + 6i = (-1-2i)z + \overline{w} = -1 + 2i - (2+2i)z$ и одатле $z = -\frac{3+4i}{2+2i} = \frac{-7-i}{4}$ и $w = \frac{3-9i}{4}$.

Према томе, решења (z, w) су $(-2,\ 2-2i)$ и $(\frac{-7-i}{4}, \frac{3-9i}{4})$.

3A.3. За почетак, ако је број $3\,806\,130$ четвороцифрен у основи b, онда је $b^3 \leqslant 3\,806\,130 < b^4$. Груба оцена даје $40 \leqslant b \leqslant 160$ (заправо, $45 \leqslant b \leqslant 156$).

Број $3\,806\,130$ се раставља на просте чиниоце као $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 439$. Нека је он четвороцифрени палиндром у основи b, тј. $3\,806\,130 = \langle x, y, y, x \rangle_b = x(b^3 + 1) + y(b^2 + b) = (b + 1)\big((b^2 - b + 1)x + by\big)$. Имамо $b + 1 \mid 3\,806\,130$, што даје као једине могућности $b \in \{50, 84, 101\}$. Остаје само мало рачуна:

$$3\,806\,130 = \langle 30, 22, 22, 30 \rangle_{50} = \langle 6, 35, 35, 6 \rangle_{84} = \langle 3, 70, 11, 46 \rangle_{101}.$$

Дакле, одговор су бројевни системи са основама 50 и 84.

3A.4. Заменом места y и x добијамо $xf(f(y)) = \frac{f(f(x)+f(y))}{f(x+y)} = yf(f(x))$, одакле је

$\frac{f(f(x))}{x} = \frac{f(f(y))}{y} = c$ константно, тј.

$$f(f(x)) = cx \quad \text{за све } x.$$

Следи да је f бијекција и да важи $f(cx) = f(f(f(x))) = cf(x)$. Сада заменом $(x, y) = (1, \frac{1}{c})$ у једначину из задатка добијамо

$$f(f(1) + f(\tfrac{1}{c})) = 1 \cdot f(f(\tfrac{1}{c}))f(1 + \tfrac{1}{c}) = 1 \cdot c \cdot \tfrac{1}{c}f(1 + \tfrac{1}{c}) = f(1 + \tfrac{1}{c}).$$

Бијективност даје $(1 + \frac{1}{c})f(1) = f(1) + f(\frac{1}{c}) = 1 + \frac{1}{c}$, одакле је $f(1) = 1$. Следи $c = f(f(1)) = 1$, па је $f(f(x)) = x$. Најзад, уметањем $y = f(x)$ у полазну једначину добијамо $f(x + f(x)) = xf(x)f(x + f(x))$, па је $xf(x) = 1$, тј. $f(x) = \frac{1}{x}$ за све x.

Лако се проверава да је функција $f(x) = \frac{1}{x}$ заиста решење.

3А.5. Означимо скупове са A и B.

(а) Посматрајмо $k = \min\{|x - y| \mid x \text{ и } y \text{ су из истог скупа}\}$. Нека су $a, b \in A$ такви да је $b - a = k$. Одаберимо елемент $c \in A \setminus \{a, b\}$. Постоје m и n (не нужно различити) у скупу B такви да је $a + c \leqslant 2m \leqslant a + c + 1$ и $b + c \leqslant 2n \leqslant b + c + 1$, а тада је $2(n - m) \leqslant b - a + 1 = k + 1$. Дакле, ако је $k > 1$, онда је $0 < n - m \leqslant \frac{k+1}{2} < k$, противно избору броја k. Према томе, мора бити $k = 1$, али тада постоји број $m \in B$ такав да је $2m \in \{a + b, a + b + 1\} = \{2b - 1, 2b\}$, па је $m = b$, што је контрадикција. Дакле, одговор је *не*.

(б) Одговор је *да*, а услове задовољавају $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$.

4А.1. Нека су $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ елементи скупа S и нека је $a = a_n$. Посматрајмо

$$x = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_{n+1} + \dots + a_m, \quad \text{где је} \quad m > n.$$

Очигледно је $f(x) \geqslant m - 1$ и $f(x + a_n) \geqslant m$. С друге стране, како је $x < \sum_{i=1}^{m} a_i$ и $x + a_n < \sum_{i=1}^{m+1} a_i$, имамо $f(x) = m - 1$ и $f(x + a_n) = m$. Према томе, број x задовољава услов задатка (за свако $m > n$).

4А.2. Директно се налази $a_2 = \frac{7}{2}$, $a_3 = \frac{10}{3}$ и $a_4 = \frac{13}{4}$. Индукцијом се једноставно доказује да је $a_n = \frac{3n+1}{n}$. Заиста, ако је $a_{n-1} = \frac{3n-2}{n-1}$, онда је

$$a_n = \frac{4n^2 \cdot \frac{3n-2}{n-1} - 1}{\frac{3n-2}{n-1} + 4n^2 - 2} = \frac{4n^2(3n-2) - (n-1)}{3n - 2 + (4n^2 - 2)(n-1)} = \frac{(3n+1)(2n-1)^2}{n(2n-1)^2} = \frac{3n+1}{n}.$$

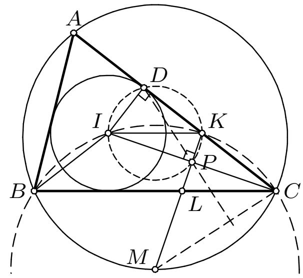
Према томе, $a_{2020} = \frac{6061}{2020}$.

Друго решење. Израз за a_n је еквивалентан са

$$\frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Сумирањем по $n = 2, 3, \dots, 2020$ добијамо $\frac{1}{a_{2020} - 1} = \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8082} = \frac{2020}{4041}$, тј. $a_{2020} = \frac{6061}{2020}$.

4А.3. Пошто је $\sphericalangle IBC = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle KCB$, трапез $BCKI$ је једнакокрак. Штавише, важи $\sphericalangle CIK = \sphericalangle ICB = \sphericalangle KCI$, па је $IK = CK = BI$. Познато је да је $MI = MB = MC$, па је M центар описаног круга трапеза $BCKI$ и $MK \perp CI$.



Означимо са P средиште дужи KL. Како је $\sphericalangle CLK = \sphericalangle IKL = \sphericalangle LKC$, четвороугао $IKCL$ је ромб, па је $\sphericalangle IPK = 90° = \sphericalangle IDK$. Следи да је четвороугао $JDKP$ тетиван, па је $\sphericalangle CDP = \sphericalangle KDP = \sphericalangle KIP = 90° - \sphericalangle MKI = 90° - \sphericalangle MCK$, тј. $DP \perp MC$, чиме је тврђење доказано.

4А.4. Број $14!! \cdot 33!!$ је дељив са 2^{11} и са 5^5, али не са 5^6. Следи да се овај број завршава с тачно пет нула:

$$N = 53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = \overline{22a\,6b3\,493\,6c9\,d96\,8e4\,f10\,6g4\,h00\,000}.$$

Овај број је дељив и са 9 и 11, па нам критеријум дељивости овим бројевима даје $9 \mid 82 + S$ и $11 \mid S - 52$, тј. $S \equiv 8 \pmod 9$ и $S \equiv 8 \pmod{11}$, где је $S = a+b+c+d+e+f+g+h$. Одавде је $S \equiv 8 \pmod{99}$, па због $0 \leqslant S \leqslant 72$ следи $S = 8$.

Даље, како $64 \mid N/10^5$, шестоцифрени завршетак $\overline{106\,g4h}$ овог броја је дељив са 64. При томе знамо да је $h \neq 0$, па због дељивости са 4 имамо $h \in \{4, 8\}$. Ако је $h = 4$, онда би из $S = 8$ и $8 \mid \overline{g44}$ следило $g \in \{1, 3\}$, али ниједан од завршетака $\overline{106\,144}$ и $\overline{106\,344}$ није дељив са 64. Ово као једину могућност оставља $h = 8$, а због $S = 8$ следи $a{=}b{=}c{=}d{=}e{=}f{=}g{=}0$. Све у свему, „израчунали” смо:

$$53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = 220\,603\,493\,609\,096\,804\,010\,604\,800\,000.$$

4А.5. Доказаћемо индукцијом по M да, ако је $a_2 \leqslant a_1 = M$, онда је дужина низа највише $\frac{3M+1}{2}$. То је тачно за $M \leqslant 2$. Претпоставимо да је $M > 2$ и да тврђење важи за $a_1 < M$.

(1°) Ако је $\frac{M}{2} \leqslant a_2 \leqslant M$, онда је $a_3 < a_2$, па је дужина низа почев од a_2 не већа од $\frac{3a_2+1}{2} \leqslant \frac{3M-2}{2}$. Укупна дужина је највише $\frac{3M-2}{2} + 1 < \frac{3M+1}{2}$.

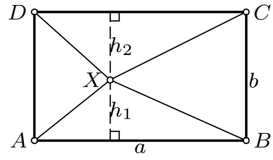
(2°) Ако је $2 \leqslant a_2 \leqslant \frac{M}{2}$, онда је $a_4 < a_3 \leqslant M-2$, па је дужина низа почев од a_3 највише $\frac{3a_3+1}{2} \leqslant \frac{3M-5}{2}$, а укупна дужина највише $\frac{3M-5}{2} + 2 < \frac{3M+1}{2}$.

(3°) Ако је $a_2 = 1$, добија се низ $M, 1, M-1, M-2, 1, M-3, \ldots$ дужине $\lfloor \frac{3M+1}{2} \rfloor$.

Индукција је завршена. Према томе, како је $a_2 \leqslant a_1 \leqslant 2020$ или $a_3 \leqslant a_2 \leqslant 2020$, низ има највише $\lfloor \frac{3 \cdot 2020+1}{2} \rfloor + 1 = 3031$ чланова. Ова дужина се достиже за низ

$$2019, 2020, 1, 2019, 2018, 1, 2017, 2016, 1, \ldots, 5, 4, 1, 3, 2, 1, 1.$$

1Б.1. Ако је $AB = a$ и $BC = b$, а h_1 и h_2 редом висине из темена X у троугловима XAB и XCD, онда је $h_1 + h_2 = b$ и $P_{XAB} + P_{XCD} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. На исти начин важи и $P_{XBC} + P_{XDA} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. Према томе, $P_{XDA} = P_{XAB} + P_{XCD} - P_{XBC} = 15 + 17 - 16 = 16$.



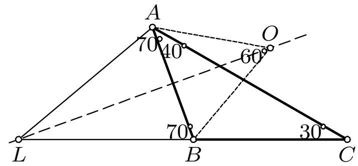
1Б.2. Како је збир првих пет цифара не већи од $5 \cdot 9 = 45$, последња цифра је 6 или 8.

Ако је последња цифра 6, једина могућност је број 999996.

Ако је последња цифра 8, првих пет цифара могу бити четири деветке и седмица неким редом (5 могућности), или три деветке и две осмице ($\binom{5}{2} = 10$ могућности).

Према томе, тражених бројева има $1 + 5 + 10 = 16$.

1Б.3. Како је $\sphericalangle A = 40^\circ$, имамо $\sphericalangle LAB = \frac{180^\circ - \sphericalangle A}{2} = 70^\circ = \sphericalangle LBA$. Према томе, троугао LAB је једнакокрак и $LA = LB$, а како је такође $OA = OB$, права LO је симетрала дужи AB. При томе су троуглови LOA и LOB подударни (три пара једнаких страница), па је $\sphericalangle AOL = \sphericalangle BOL = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB = 30^\circ$.



1Б.4. Добијени седмоцифрени број, који лежи између $2\,020\,000$ и $2\,020\,999$, мора да буде дељив са $8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$. Како је $2\,020\,000 = 2550 \cdot 792 + 400$, једини такав број је $2551 \cdot 792 = 2\,020\,392$.

Друго решење. Нека је тражени број $\overline{2020abc}$. Цифра c мора бити парна. Критеријуми дељивости са 9 и 11 дају $9 \mid 4{+}a{+}b{+}c$ и $11 \mid 4{+}a{-}b{+}c$. Следи да је $a{+}b{+}c \in \{5, 14, 23\}$ и $a{-}b{+}c \in \{-4, 7\}$. Притом се бројеви $a{+}b{+}c$ и $a{-}b{+}c$ разликују за $2b$, те морају имати исту парност.

Ако је $a{-}b{+}c = -4$, мора бити $a{+}b{+}c = 14$, одакле следи $b = 9$ и $a + c = 5$, па је $\overline{abc} \in \{\overline{194}, \overline{392}, \overline{590}\}$. Провером налазимо решење $2\,020\,392$.

Ако је $a{-}b{+}c = 7$, мора бити $a{+}b{+}c = 23$, одакле следи $b = 8$ и $a + c = 15$, па је $\overline{abc} \in \{\overline{788}, \overline{986}\}$. Провером не налазимо ниједно решење.

1Б.5. Означимо са a и b редом бројеве радника у првој и другој смени, а са n број планираних дана. Услов задатка нам даје једначине

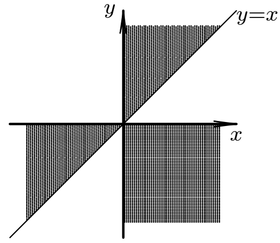
$$6n(a - b) = 240, \quad na = (n + 2)(a - 5), \quad nb = (n + 2)(b - 4).$$

Развијањем друге и треће једначине добијамо $2a - 5n - 10 = 2b - 4n - 8 = 0$, тј. $a = \frac{5}{2}(n{+}2)$ и $b = 2(n{+}2)$, тако да прва једначина постаје $240 = 6n \cdot \frac{1}{2}(n{+}2)$, тј. $n(n + 2) = 80$. Једино решење ове једначине у скупу природних бројева је $n = 8$. Следи да је $a = 25$ и $b = 20$, тј. у првој смени има 25 радника, а у другој 20.

2Б.1. У првом и трећем квадранту је $xy > 0$, па множењем са xy услов задатка постаје $x < y$.

У другом и четвртом квадранту је $xy < 0$, па се множењем са xy мења знак, тј. услов задатка постаје $x > y$.

Тражени скуп је приказан на слици (осе и права $x = y$ не припадају скупу).



2Б.2. Троцифрени бројеви састављени од цифара a, b и c су $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$, а њихов збир је $222(a+b+c)$. Једини број дељив са 222 између 2700 и 3100 је $222 \cdot 13 = 2886$, одакле закључујемо да је $a+b+c=13$.

Цифра a не може бити 9 (следило би $\overline{abc} = 922$, што отпада). Ако је $a=8$, могући бројеви $\overline{abc}$ су 814 и 832. Према томе, одговор је 832.

2Б.3. Означимо $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$. Претпоставимо да троугао ABC није једнакостраничан: рецимо, $\alpha \neq \beta$. Из тетивности четвороуглова $ABDC$ и $BCEA$ следи $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \alpha$ и $\sphericalangle CEA = 180^\circ - \beta$, па су то два различита угла сваког од троуглова BDC, CEA и AFB. Међутим, ово је немогуће, јер је $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) > 180^\circ$.

2Б.4. Из датих једначина имамо

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - y^2 + xz - yz = (x-y)(x+y+z), \\ 0 &= xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1), \\ 0 &= x^2 - z^2 + xy + yz = (x+z)(x+y-z). \end{aligned}$$

Друга једначина даје $x=1$ или $y=1$.

(1°) Ако је $x=y=1$, трећа једначина даје $z \in \{-1, 2\}$.

(2°) Ако је $y \neq x = 1$, из прве једначине је $x+y+z=0$, тј. $z=-1-y$, што заменом у трећу даје $-y(2+2y)=0$, тј. $y \in \{-1, 0\}$.

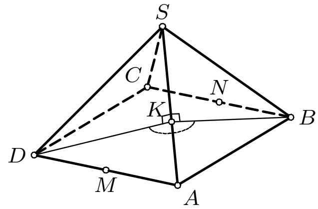
(3°) Ако је $x \neq y = 1$, из прве једначине опет следи $z=-1-x$, што заменом у трећу даје $-(2+2x)=0$, тј. $x=-1$ и $z=0$.

Овако смо добили пет решења (x,y,z): $(1,1,-1)$, $(1,1,2)$, $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ и $(-1,1,0)$. Директно се проверава да су то заиста решења.

2Б.5. **(а)** Ако су један или оба броја a и b непарни, број $ab - 5a + 7b$ ће такође бити непаран. Пошто је на табли само један број паран, никада нећемо записати други паран број, па тако ни број 2020.

(б) У ствари, сви новонастали бројеви даваће остатак 2 при дељењу са 3. Заиста, кад год макар један од бројева a и b даје остатак 2 при дељењу са 3, број $(a+7)(b-5) = ab - 5a + 7b - 35$ биће дељив са 3, тако да ће $ab - 5a + 7b$ давати остатак 2. Према томе, ни број 2019 није могуће дописати.

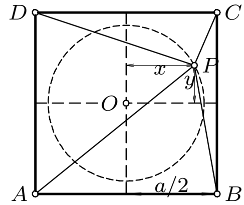
3Б.1. Нека је K подножје висине из D у троуглу SAD. Пошто је $\triangle SAD \cong \triangle SAB$, тачка K је уједно и подножје висине из B у $\triangle SAD$. Угао θ између страна SAD и SAB заправо је $\sphericalangle BKD$.



По услову задатка, ако су M и N редом средишта ивица AD и BC, троугао SMN је једнакостраничан, тј. $SM = SN = MN = a$. Како је $AM = \frac{1}{2}a$, Питагорина теорема нам даје $SA = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Даље, површина троугла SAD је $\frac{1}{2}SM \cdot AD = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}SA \cdot DK$, одакле је $DK = BK = \frac{2}{\sqrt{5}}a = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$. Како је $BD = a\sqrt{2}$, угао θ налазимо по косинусној теореми у $\triangle BKD$: $\cos\theta = \frac{KB^2 + KD^2 - BD^2}{2KB \cdot KD} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{4}{5} - 2}{2 \cdot \frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}$.

3Б.2. Прве две цифре $a, b \in \{0,1,2,3,4,5\}$ могу се одабрати на $5 \cdot 6 = 30$ начина. Међу шест узастопних бројева $\overline{ab0}, \overline{ab1}, \dots, \overline{ab5}$ тачно два су дељива са три. Такође, тачно два међу њима ($\overline{ab0}$ и $\overline{ab5}$) су дељива са пет. Према томе, тражених бројева дељивих са 3, као и оних дељивих са 5, има по 60.

3Б.3. Кроз тачку O нацртајмо праве p и q редом паралелне правим AB и BC. Означимо растојања тачке P од правих p и q редом са x и y. Тада је $x^2 + y^2 = r^2$ и



$$\begin{aligned} & PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 \\ = \quad & \big((\tfrac{a}{2}+x)^2+(\tfrac{a}{2}+y)^2\big) + \big((\tfrac{a}{2}-x)^2+(\tfrac{a}{2}+y)^2\big) \\ & + \big((\tfrac{a}{2}-x)^2+(\tfrac{a}{2}-y)^2\big) + \big((\tfrac{a}{2}+x)^2+(\tfrac{a}{2}-y)^2\big) \\ = \; & 2a^2 + 4x^2 + 4y^2 = 2a^2 + 4r^2. \end{aligned}$$

Друго решење. Имамо $PA^2 = \big(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\big)^2 = PO^2+OA^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA} = r^2+\frac{1}{2}a^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}$. Сабирајући ову и аналогне једнакости за PB^2, PC^2 и PD^2 налазимо

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4r^2 + 2a^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \cancelto{0}{\big(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\big)} = 2a^2 + 4r^2.$$

3Б.4. Ако уврстимо $(a,b,c,d) = (n, n{+}3, n{+}1, n{+}2)$ у дату једначину, добићемо

$$\begin{aligned} \cos 3x - \cos(2n{+}3)x &= 2\sin nx \sin(n{+}3)x \\ &= 2\sin(n{+}1)x\sin(n{+}2)x = \cos x - \cos(2n{+}3)x, \end{aligned}$$

одакле имамо $\cos x = \cos 3x$. Како је $0 = \cos x - \cos 3x = 2\sin x \sin 2x$, можемо да закључимо да је $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ или $x = k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$.

С друге стране, ако уврстимо $(a,b,c,d) = (n, n{+}2, n{+}1, n{+}3)$, добићемо

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos(2n{+}2)x &= 2\sin nx \sin(n{+}2)x \\ &= 2\sin(n{+}1)x\sin(n{+}3)x = \cos 2x - \cos(2n{+}4)x, \end{aligned}$$

па имамо и $\cos(2n{+}2)x = \cos(2n{+}4)x$. Сада $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ можемо да искључимо, јер је тада $\cos(2n{+}2)x - \cos(2n{+}4)x = 2\sin x \sin(2n{+}3)x = \pm 2$.

Као једина могућност остаје нам $x = k\pi$. То и јесте решење задатка, јер је тада $\sin ax = \sin bx = \sin cx = \sin dx = 0$.

3Б.5. Знамо да n и $S(n)$ дају исти остатак при дељењу са 9, тј. $S(n) = n - 9k$ за неки цео број k. Дата једначина постаје $n(n-9k-1) = 2020$, па број $n(n-1) = 2020 + 9nk = 1 + 3(673 + 3nk)$ даје остатак 1 при дељењу са 3. Међутим, ово је немогуће јер, када n даје остатке 0, 1 и 2 при дељењу са 3, број $n(n-1)$ даје редом остатке 0, 0 и 2.

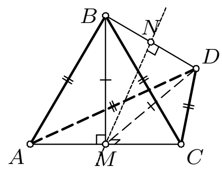
Према томе, једначина нема решења.

4Б.1. Дати скуп делимо у четири подскупа:

$$\{6\}, \quad B = \{2,4,8,10\}, \quad C = \{3,9\} \quad \text{и} \quad D = \{1,5,7\}.$$

Тражена пресликавања сликају 6 у 6, затим B у $B \cup \{6\}$ (што се може учинити на 5^4 начина), C у $C \cup \{6\}$ (3^2 начина) и D било где у A (10^3 начина). То укупно даје $5^4 \cdot 3^2 \cdot 10^3 = 5\,625\,000$ пресликавања.

4Б.2. Троуглови BAC и DAC су подударни, па су њихове одговарајуће тежишне дужи BM и DM једнаке. То значи да је MBD једнакокраки троугао, а MN његова висина, тј. $MN \perp BD$. На исти начин се доказује и да је $MN \perp AC$.



4Б.3. Записаћемо једначину у облику $(x-3)\log_2 x = -x^2+4x-3 = (1-x)(x-3)$. Очигледно је $x=3$ једно решење. За $x \neq 3$ дељењем са $x-3$ добијамо $\log_2 x = 1-x$, тј.

$$f(x)=1, \quad \text{где је} \quad f(x)=x+\log_2 x.$$

Видимо да је једно решење ове једначине $x=1$. С друге стране, функција $f(x)$ је строго растућа, па је $f(x)>1$ за $x>1$ и $f(x)<1$ за $0<x<1$, тако да других решења нема.

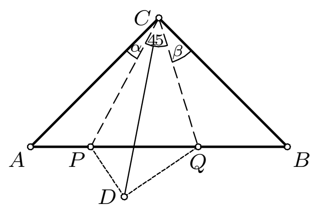
Дакле, једина решења су $x=1$ и $x=3$.

4Б.4. Означимо $\sphericalangle ACP=\alpha$ и $\sphericalangle BCQ=\beta=45^\circ-\alpha$. Како је $\sphericalangle CQP=45^\circ+\beta=90^\circ-\alpha$, синусна теорема у $\triangle ACP$ и $\triangle CPQ$ даје $\frac{AP}{\sin\alpha}=\frac{CP}{\sin 45^\circ}$ и $\frac{PQ}{\sin 45^\circ}=\frac{CP}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{CP}{\cos\alpha}$, тј.

$$AP = CP\frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ} = PQ\frac{\cos\alpha}{\sin 45^\circ}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ} = PQ\sin 2\alpha.$$

На исти начин добија се и $BQ=PQ\sin 2\beta = PQ\cos 2\alpha$. Сада се једнакост $AP^2+QB^2=PQ^2$ своди на тривијалну: $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$.

Друго решење. Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на праву CP. Тада је $\triangle CPD \cong \triangle CPA$, па је $DP=AP$. Штавише, $\sphericalangle DCQ = 45^\circ - \sphericalangle PCD = 45^\circ - \sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$. То заједно са $CD=CA=CB$ и $CQ=CQ$ даје $\triangle CQD \cong \triangle CQB$, па је $DQ=BQ$.



Најзад, из $\sphericalangle PDC=\sphericalangle PAC=45^\circ$ и $\sphericalangle CDQ=\sphericalangle CBQ=45^\circ$ следи $\sphericalangle PDQ=90^\circ$. Сада је $PQ^2=DP^2+DQ^2=AP^2+BQ^2$.

4Б.5. Из једначине следи да број $x^3+(x+1)^3=2021+9y$ даје остатак 5 при дељењу са 9. Међутим, куб целог броја при дељењу са 9 увек даје један од остатака 0, 1 и 8, па $x^3+(x+1)^3$ може дати само остатке $0,1,2,7,8$. Према томе, једначина нема решења.

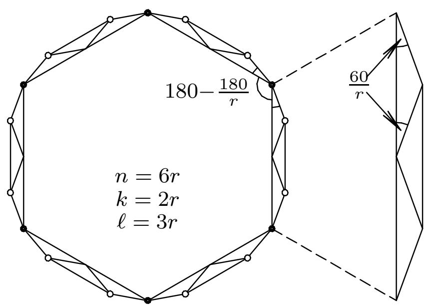
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ – РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1A.1. Ако је нпр. $a = b$, онда је $b+c = c+d$, тј. $b = d$, а одатле $c+d = e+a$, тј. $c = e$, али онда је $d + e = a + b$, тј. $e = a$, па је $a = b = c = d = e$. Истом закључку водило би и $b = c$ итд. Зато надаље сматрамо да је $a \neq b \neq c \neq d \neq e \neq a$.

Нека је (без смањења општости) $a < b$. Ако је $b < c$, онда је $b+c > c+d > d+e$, одакле добијамо $b > d$ и $c > e$, али тада из $b(c+d) = d(e+a) < b(c+a)$ следи $d < a$. Сада из $a(b + c) = d(e + a) < a(e + b)$ следи $c < e$, што је контрадикција. Дакле, $b > c$. Настављајући на сличан начин, закључујемо да важи $a < b > c < d > e < a > b$, а и то је немогуће.

1A.2. Први играч има победничку стратегију. Он у своја прва два потеза треба да обезбеди да цифре 3 и 9 буду искоришћене. Тада је други играч принуђен да у свом последњем потезу употреби цифру 1 или 7. Међутим, први може да се својим трећим потезом побрине да и овако добијени бројеви буду дељиви са 3. Довољно је да другоме препусти број који даје остатак 2 при дељењу са 3. Ако је из сваке класе остатака доступна бар по једна цифра, он то свакако може постићи, а у јединprincipal преосталом случају, када су искоришћене четири цифре $0, 3, 6, 9$, може да употреби цифру 2.

1A.3. Нека је $n = 6r$. Тражени n-тоугао има све углове једнаке $180° - \frac{60°}{r}$. Почнимо од правилног $2r$-тоугла. Како је његов унутрашњи угао једнак $180° - \frac{180°}{r}$, довољно је на сваку његову страницу накалемити једнакокраки трапез са углом на основи $\frac{60°}{r}$. Један овакав трапез може се склопити од три троугаона одсечка правилног $3r$-тоугла, чиме је конструкција примера готова.



1A.4. Дати број је једнак $M = x^3+ax^2+bx+c$, где је $x = 10^{n+1}$. Нека је $M = (y-1)y(y+1)$. Како је $(x-1)x(x+1) < x^3$ и $(x+3)(x+4)(x+5) > x^3 + 10x^2$, мора бити $x + 1 \leqslant y \leqslant x + 3$. Тада имамо

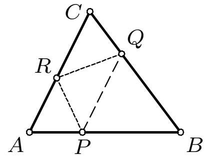
$$\begin{aligned} x(x+1)(x+2) &= x^3+3x^2+2x &&= 10\ldots030\ldots0020\ldots000, \\ (x+1)(x+2)(x+3) &= x^3+6x^2+11x+6 &&= 10\ldots060\ldots0110\ldots006 \quad \text{за } n \geqslant 1, \\ (x+2)(x+3)(x+4) &= x^3+9x^2+26x+24 &&= 10\ldots090\ldots0260\ldots024 \quad \text{за } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Видимо да за $n > 0$ једино случај $y = x+1$ даје решење. Остаје да испитамо $n = 0$ и тада налазимо још једно решење: $x = 12$ и $M = 1716$.

Према томе, једина решења $(n; a, b, c)$ су $(0; 7, 1, 6)$ и $(n; 3, 2, 0)$ за $n \geqslant 0$.

2A.1. Ако Максим одабере тачку P у средишту дужи AB, онда коју год тачку Q да Мина одабере, важи $P_{PQA} + P_{PQC} = P_{PQB} + P_{PQC} = P_{PBC} = 1010$. Сада Максим може узети једно од темена A и C као тачку R тако да обезбеди површину $P_{PQR} \geqslant 505$.

С друге стране, ако је $AP = k \cdot AB$ $(0 \leqslant k \leqslant 1)$, Мина може да одабере тачку Q тако да је $PQ \parallel AC$. Тада ће бити $P_{PQR} = P_{PQA} = k \cdot P_{BQA} = 2020k(1-k) \leqslant 505$ (јер је $k(1-k) \leqslant \left(\frac{k+(1-k)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$), независно од избора тачке R.



Према томе, одговор је 505.

2A.2. Напишимо дату једнакост као квадратну једначину по z: $z^2-(x+y)z+(x^2+xy+2y^2-1)=0$. Њена дискриминанта мора бити ненегативна:

$$D = (x+y)^2 - 4(x^2+xy+2y^2-1) \geqslant 0, \quad \text{тј.} \quad 7y^2+2xy+(3x^2-4) \leqslant 0.$$

У добијеној квадратној неједначини по y детерминанта опет мора бити ненегативна, па је $4x^2-28(3x^2-4) \geqslant 0$, тј. $5x^2 \leqslant 7$. Следи да је $x \geqslant -\frac{7}{\sqrt{35}}$.

При томе, за $x = -\frac{7}{\sqrt{35}}$ вредности $y = \frac{1}{\sqrt{35}}$ и $z = -\frac{3}{\sqrt{35}}$ су једнозначно одређене.

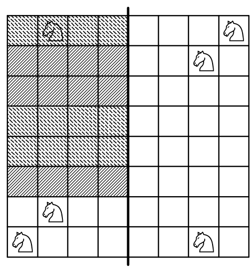
2A.3. Претпоставимо да је (p_n) један такав бесконачан низ. Бришући почетне чланове по потреби, можемо да сматрамо да су сви чланови већи од 3.

Ако је $p_1 \equiv \epsilon \pmod 3$ за $\epsilon = \pm 1$, онда мора бити и $p_2 = 2p_1 - \epsilon \equiv \epsilon \pmod 3$ (у супротном је $p_2 = 2p_1 + \epsilon \equiv 0 \pmod 3$), па индукцијом следи $p_{n+1} = 2p_n - \epsilon$ и одатле

$$p_n = 2^{n-1}p_1 - (2^{n-1}-1)\epsilon \quad \text{за све } n \in \mathbb{N}.$$

Међутим, тада за $n = p_1$ по Фермаовој теореми важи $p_n \equiv 0 \pmod{p_1}$, па је p_n сложен број, што је контрадикција. Дакле, тражени низ не постоји.

2A.4. Шест поља **a1, b2, b8, h8, g7, g1** задовољавају услов задатка. Заиста, свих 6 поља су црна, па је од једног до другог увек потребан паран број потеза, али два потеза ни у једном пару нису довољна.



Претпоставимо да је могуће одабрати 7 поља. Тада у бар једној половини табле, рецимо левој (колоне **a-d**) има бар 4 поља. Поделимо ову половину на три групе поља:

(1°) врсте 1 и 2, $\quad$ (2°) врсте 3, 6 и 7 $\quad$ и $\quad$ (3°) врсте 4, 5 и 8.

Унутар једне групе, од сваког поља до сваког другог стиже се у највише три потеза - једини изузетак су поља **a1** и **b2** из групе (1°). Према томе, оба ова поља морају бити међу одабранима. Слично, и поља **a8** и **b7** морају бити међу одабранима, али то је немогуће, јер се од поља **b2** до поља **b7** може стићи у три потеза.

Према томе, одговор је 6.

3A.1. Имагинарни део десне и леве стране дате једначине је

$$-b = b\sum_{k=0}^{1009}(-1)^k\binom{2020}{2k+1}a^{2019-2k}b^{2k}.$$

Како је $\binom{2020}{2k+1} = \frac{2020}{2k+1}\binom{2019}{2k}$ паран број за свако k, ова једнакост узима облик $-b = 2A \cdot b$ за неки цео број A, па мора бити $b = 0$. Сада се једначина своди на $a^{2020} + |a| - a = 2^{2020}$, одакле је $a^{2020} \leqslant 2^{2020}$, тј. $|a| \leqslant 2$. Провером добијамо да је једино решење $z = a = 2$.

3А.2. Означимо са (x, y) поље у x-тој колони слева надесно и y-тој врсти одоздо нагоре. Потез значи скок са поља (x, y) на $(x+3, y+2)$ или $(x-2, y-1)$. При сваком потезу величина $A = 5y - 3x$ се увећава за 1.

Поља $(6,1), (7,1), (8,1), (8,2), (1,7), (1,8), (2,8), (3,8)$ су „изолована” - са њих паук може направити највише један потез. На остатку табле минимална вредност A је -11 на пољу $(7,2)$, а максимална 29 на пољу $(2,7)$, тако да паук може да направи највише 40 потеза. Овај број постиже тако што почне са поља $(7,2)$ и игра произвољно све до поља $(2,7)$.

			39	**36**	**33**	30	**27**
	40	**37**	**34**	**31**	**28**	25	**22**
38	**35**	**32**	**29**	**26**	**23**	20	**17**
33	**30**	27	**24**	**21**	**18**	15	**12**
28	**25**	22	**19**	**16**	**13**	10	**7**
23	**20**	17	**14**	**11**	**8**	**5**	**2**
18	**15**	12	**9**	**6**	**3**	**0**	
13	**10**	7	**4**	**1**			

Друго решење. Означимо поље $(7,2)$ бројем 0, а за $n > 0$ бројем n означимо сва поља до којих се може стићи с неког поља означеног бројем $n-1$. Добијамо таблицу као на слици. У њој се налази и осам изолованих поља, а највећи број који се појављује је 40 на пољу $(2,7)$.

3А.3. Заменом места p и q ако је потребно, можемо да сматрамо да је $p = q + \delta > q$ и $(a_n \dots a_0)_p = (a_0 \dots a_n)_q \pm 1$, уз (можда слабији) услов $n \geqslant 2^{q-1} - 1$.

Имамо $p^n < (a_n \dots a_0)_p \leqslant (a_0 \dots a_n)_q + 1 \leqslant q^{n+1}$, тј. $(\frac{p}{q})^n < q$. С друге стране,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{\delta}{q}\right)^n = 1 + \frac{n\delta}{q} + \binom{n}{2}\frac{\delta^2}{q^2} + \dots \geqslant 1 + \frac{n\delta}{q}, \quad \text{одакле је} \quad \delta < \frac{q^2 - q}{2^{q-1} - 1}.$$

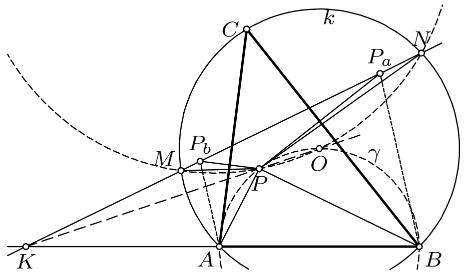
Међутим, одавде за $2 \leqslant q \leqslant 5$ следи $\delta = 1$, док се за $q \geqslant 6$ једноставном индукцијом доказује да важи $2^{q-1} > q^2 - q + 1$, те тада нема решења: заиста, ако то важи за q, онда је $2^q > 2(q^2 - q + 1) > q^2 + q + 1$, тј. важи и за $q + 1$. Дакле, $q \leqslant 5$ и $p = q + 1$.

Преостале случајеве испитујемо ручно. За $(p, q) = (6, 5)$ или $(5, 4)$ имамо $n \geqslant 15$, односно $n \geqslant 7$, што није могуће, јер је у оба случаја $(\frac{p}{q})^n > q$. За $(p, q) = (3, 2)$ у обзир долази само $n = 1$, тј. $\pm 1 = (ab)_3 - (ba)_2 = 2a - b$, одакле је $a = b = 1$ и $m = 4$. Најзад, за $(p, q) = (4, 3)$ мора бити $n = 3$, тј. $\pm 1 = (abcd)_4 - (dcba)_3 = 63a + 13b - 5c - 26d \geqslant 63 \cdot 1 + 13 \cdot 0 - 5 \cdot 2 - 26 \cdot 2 = 1$, те је једина могућност $(a, b, c, d) = (1, 0, 2, 2)$ и $m = 74$.

Једина решења су $m = 4 = (11)_3 = (11)_2 + 1$ и $m = 74 = (1022)_4 = (2201)_3 + 1$.

3А.4. Нека је O центар описаног круга k троугла ABC. Пошто је $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = \sphericalangle APB$, тачке A, B, O и P леже на истом кругу γ. Тачка O је средиште лука APB овог круга, па је PO спољашња симетрала угла APB. Не умањујући општост, сматраћемо да је P на краћем луку AO круга γ.

С друге стране, како је $\sphericalangle P_aBP + \sphericalangle PAP_b = 2\sphericalangle CBP + 2\sphericalangle PAC = 2(\sphericalangle APB - \sphericalangle ACB) = \sphericalangle APB$, важи $AP_b \parallel BP_a$. Ако права P_aP_b сече праву AB у тачки K, по Талесовој теореми имамо $AK : KB = AP_b : BP_a = AP : PB$, одакле следи да и K лежи на спољашњој симетрали угла APB. Дакле, праве AB, OP и P_aP_b имају заједничку тачку K.



Сада потенција тачке K даје $KM \cdot KN = KA \cdot KB = KP \cdot KO$, одакле следи да тачке M, N, O и P леже на једном кругу. При томе је O средиште лука MPN, па је PO спољашња симетрала угла MPN. То значи да је $\sphericalangle MPK = \sphericalangle OPN$, а такође је и $\sphericalangle KPA = \sphericalangle BPO$, одакле следи $\sphericalangle MPA = \sphericalangle BPN$.

4A.1. Постоји. Једна таква функција је $f(x) = \sin\frac{x}{2}$. Заиста, тада је $f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$ и, уопште, индукцијом следи да за сваки цео број $k \geqslant 0$ важи

$$f^{(2k)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\sin\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad f^{(2k+1)}(x) = \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}\cos\frac{x}{2},$$

те је у оба случаја $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$.

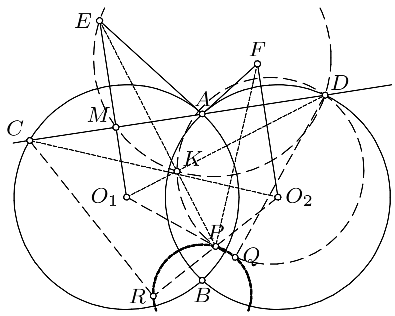
4A.2. Одмах имамо $f(1) = 1$, а из услова задатка за $(m,n) = (2,1)$ добијамо $f(2) \in \{1,4\}$.

Претпоставимо прво да је $f(2) = 1$. Услов задатка за $(m,n) = (x,1)$ и $(m,n) = (x,2)$ даје $(x+1)(x+2) \mid f(x)-1$ за све $x \in \mathbb{N}$, па како је $f(x) \leqslant x^2 < (x+1)(x+2)$, мора бити $f(x) = 1$.

Остаје случај $f(2) = 4$. Тада услов задатка даје $x+1 \mid f(x)-1$ и $x+2 \mid f(x)-4$ за све $x \in \mathbb{N}$, па је $f(x) - x^2$ дељиво са $(x+1)(x+2)$, те због $f(x) \leqslant x^2$ следи $f(x) = x^2$ за све x.

Дакле, одговор су функције $f(x) \equiv 1$ и $f(x) \equiv x^2$.

4A.3. Довољно је доказати да су потенције тачака O_1 и O_2 у односу на описани круг троугла PQR једнаке, тј. да је $O_1P \cdot O_1Q = O_2P \cdot O_2R$.



Означимо са K и M редом подножја нормала из тачке E на праве O_1D и CD. Тачке D, K, P и Q леже на истој кружници, па је $O_1P \cdot O_1Q = O_1K \cdot O_1D$. Такође, и тачке D, E, M и K леже на истој кружници, па је $O_1K \cdot O_1D = O_1M \cdot O_1E$. Најзад, због $\triangle O_1MA \sim \triangle O_1AE$ је $O_1M \cdot O_1E = O_1A^2$. Према томе, $O_1P \cdot O_1Q = O_1A^2$.

Аналогно важи $O_2P \cdot O_2R = O_2A^2 = O_1A^2$, одакле следи тврђење.

4A.4. Почнимо испитивањем броја магичних скупова k дужи с крајевима у тачкама $P_1, \ldots, P_{2k}$ на кругу обојеним наизменично црвено и плаво. Означимо овај број са c_k. Тачка P_1 се може спојити само с неком тачком P_j друге боје, те j мора бити парно: $j = 2i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. На скуповима тачака

$\{P_2, \ldots, P_{2i-1}\}$ и $\{P_{2i+1}, \ldots, P_{2k}\}$ има c_{i-1}, односно c_{k-i} магичних скупова дужи. Добијамо релацију

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} c_{i-1}c_{k-i}, \quad \text{уз услов} \quad c_1 = 1,$$

што је позната рекурентна релација за Каталанове бројеве: $c_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$.

У нашем случају свака тачка скупа $D = \{A_1, A_2, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{4n+1}, A_{4n+2}\}$ може бити спојена само с тачком друге боје и друге парности индекса, дакле, с другом тачком скупа D. Тачке скупа D се могу овако (тј. „магично") повезати на 5 начина:

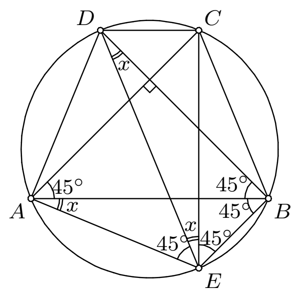
(1°) ако су то дужи $A_2A_{2n+1}, A_{2n+2}A_{4n+1}, A_{4n+2}A_1$, оне деле осталих $6n-6$ тачака на три скупа од по $2n-2$ тачака, те тада има c_{n-1}^3 магичних скупова дужи;

(2°) ако су то дужи $A_1A_2, A_{2n+1}A_{2n+2}, A_{4n+1}A_{4n+2}$, очигледно има c_{3n-3} магичних скупова;

(3°) сваки од преостала три начина даје по $c_{n-1}c_{2n-2}$ магичних скупова.

Укупан број магичних скупова је $c_{3n-3} + 3c_{2n-2}c_{n-1} + c_{n-1}^3$.

1Б.1. Трапези $ABCD$, $ACBE$ и $DEBC$ су једнакокраки, јер су тетивни. Из $AC \perp BD$ добијамо $2\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABD = 90°$, тј. $\sphericalangle CAB = 45°$. Такође је $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEC = \sphericalangle DEA = 45°$ (углови над једнаким тетивама AE, BC и DA). Даље, ако означимо $\sphericalangle EAB = x$, онда је и $\sphericalangle CED = \sphericalangle EDB = x$ (углови над једнаким тетивама CD и EB). Сада је збир углова у троуглу ABE једнак $3 \cdot 45° + 2x = 180°$, одакле је $x = 22{,}5°$.



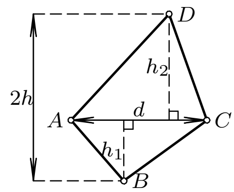
Према томе, углови троугла ABE су $\sphericalangle A = 22{,}5°$, $\sphericalangle B = 45°$ и $\sphericalangle E = 112{,}5°$.

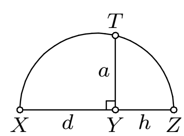
1Б.2. Ако је $n > 1$, сваки од сабирака је паран, па је и дати број паран (и већи од 2) и самим тим сложен.

Ако је $n = 1$, дати број је једнак $21! + 2020! + 7$, што је дељиво са 7 (и веће од 7) и самим тим сложен број.

1Б.3. Нека је $d = AC$, а h_1 и h_2 редом висине из темена B и D у $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$. Тада је $P_{ABCD} = \frac{1}{2}d(h_1 + h_2)$, па је страница траженог квадрата $a = \sqrt{d \cdot h}$, где је $h = \frac{h_1+h_2}{2}$.

Дужину a лако конструишемо. Одаберимо тачке X, Y и Z у том поретку на правој тако да је $XY = d$ и $YZ = h$. Нека нормала из Y на XZ сече полукруг над пречником XZ у тачки T. Тада је $YT = \sqrt{YX \cdot YZ} = a$.





1Б.4. Испитаћемо за које вредности p, q, r, s, t је $F = \bot$. Знамо да је $(x \Rightarrow y) = \bot$ само ако је $x = \top$ и $y = \bot$. Дакле, мора бити $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow t\big) = \top$ и $\big((r \Rightarrow t) \Rightarrow (s \Rightarrow t)\big) = \bot$. Из друге једнакости следи да је $(r \Rightarrow t) = \top$ и $(s \Rightarrow t) = \bot$, а одатле је опет $s = \top$ и $t = \bot$, што због $\big((p \Rightarrow q) \Rightarrow t\big) = (r \Rightarrow t) = \top$ даје и $(p \Rightarrow q) = r = \bot$. Најзад, одатле је $p = \top$ и $q = \bot$.

Све у свему, $F = \bot$ само за $(p, q, r, s, t) = (\top, \bot, \bot, \top, \bot)$. Следи да исказна слова q, r и t имају жељену особину, док је p и s немају.

1Б.5. Путања која завршава у крајњој десној колони састоји се од два потеза надесно и $k \leqslant 5$ потеза нагоре. За дато k оваква путања има $k+2$ потеза међу којима се позиције два потеза нагоре могу одабрати на $\binom{k+2}{2}$ начина. Укупну вредност A добијамо сабирањем за $k = 0, 1, \ldots, 5$: $A = \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{7}{2} = 1+3+6+10+15+21 = 56$.

Путања која завршава у крајњој горњој врсти састоји се од пет потеза нагоре и $j \leqslant 2$ потеза надесно. За дато j оваква путања има $j+5$ потеза међу којима се позиције j потеза надесно могу одабрати на $\binom{j+5}{j}$ начина. Укупну вредност B добијамо сабирањем за $j = 0, 1, 2$: $B = \binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\binom{7}{2} = 1+6+21 = 28$. Веће је A.

2Б.1. Камион у коме нема слона може се одабрати на 4 начина, а слонови се могу распоредити у преостала три камиона на 6 начина. Остаје да распоредимо људе.

(1°) Ако у једном камиону има троје људи, то мора бити камион у коме је Перса. Ово троје људи могу се одабрати на $\binom{6}{3} = 20$ начина, а остало троје се могу распоредити на 6 начина. То је $20 \cdot 6 = 120$ начина.

(2°) Ако се у два камиона вози по двоје људи, један од тих камиона је Персин, а други се бира на 3 начина. Персини пратиоци се могу одабрати на $\binom{6}{2} = 15$ начина, двоје путника у другом камиону на $\binom{4}{2} = 6$ начина, а преостало двоје се могу распоредити на два начина. То је укупно $3 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 2 = 540$ начина.

Укупно има $4 \cdot 6 \cdot (120 + 540) = 15\,840$ начина.

2Б.2. Ако странице троугла означимо са a, b и c, имамо

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \geqslant 2\sqrt{2P}.$$

На исти начин имамо и $a + c \geqslant 2\sqrt{2P}$ и $b + c \geqslant 2\sqrt{2P}$. Сабирањем ове три неједнакости добијамо $2O = 2(a + b + c) \geqslant 6\sqrt{2P}$, што квадрирањем даје $O^2 \geqslant 18P$.

Напомена. У ствари, важи и јача неједнакост: $O^2 \geqslant 12\sqrt{3} \cdot P$.

2Б.3. Сабирање датих једначина даје квадратну једначину $y^2 - (2p-1)y + p^2 = 0$ чија су решења

$$y_1 = \frac{2p - 1 + \sqrt{1-4p}}{2} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{2p - 1 - \sqrt{1-4p}}{2}.$$

Да би ова решења била реална, мора бити $p \leqslant \frac{1}{4}$. Штавише, из прве једначине налазимо $x = 1 \pm \sqrt{y+1}$, што може бити реално само ако је $y_1 \geqslant -1$. Овај услов се може записати као $2p - 1 + \sqrt{1-4p} \geqslant -2$, тј.

$$\sqrt{1-4p} \geqslant -(2p+1).$$

Ако је $p \geqslant -\frac{1}{2}$, ово је аутоматски тачно. Ако је $p < -\frac{1}{2}$, квадрирањем добијамо $1-4p \geqslant (2p+1)^2$, тј. $4p^2+8p \leqslant 0$, одакле је $p \geqslant -2$.

Према томе, скуп тражених вредности p је интервал $[-2, \frac{1}{4}]$.

2Б.4. Претпоставимо да никоје три дате дужи не чине троугао. Нека су дате дужи у неопадајућем поретку $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_8$. Тада је по претпоставци $a_3 \geqslant a_1+a_2 \geqslant 200$, $a_4 \geqslant a_2+a_3 \geqslant 300$, $a_5 \geqslant a_3+a_4 \geqslant 500$, $a_6 \geqslant a_4+a_5 \geqslant 800$, $a_7 \geqslant a_5+a_6 \geqslant 1300$ и $a_8 \geqslant a_6+a_7 \geqslant 2100$. Ово је контрадикција, чиме је доказ завршен.

2Б.5. Видимо да су за $n \geqslant 4$ сви сабирци осим другог (3!) дељиви са 4, па је дати број паран, а није дељив са 4, те не може бити квадрат.

За $n=3$ дати број је $21!+2020!+12$ и дељив је са 3, а није са 9, па опет није квадрат.

За $n=2$ дати број је $21!+2020!+8$ и дељив је са 8, а није са 16, па ни он није квадрат.

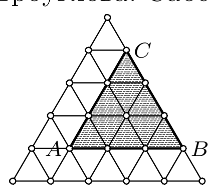
Најзад, за $n=1$ дати број је $21!+2020!+7$ и дељив је са 7, а није са 49, па ни он није квадрат.

3Б.1. Дати број се може записати као $111(1000x+y)$ и дељив је са $111 = 3\cdot 37$. Ако је он квадрат природног броја a, онда је и a дељиво са 3 и 37, тј. дељиво је са 111. Међутим, провером вредности $a \in \{111, 222, \ldots, 999\}$ не налазимо ниједно решење, што значи да решења нема:

$$\begin{array}{lllll} 111^2 = \ \ 12321, & 222^2 = \ \ 49284, & 333^2 = 110889, & 444^2 = 197136, & 555^2 = 308025, \\ 666^2 = 443556, & 777^2 = 603729, & 888^2 = 788544, & 999^2 = 998001. & \end{array}$$

Друго решење. Потпун квадрат се увек завршава једном од цифара $0,1,4,5,6,9$. Цифра y не може бити 0 (број нула на крају мора бити паран), не може бити ни нека од цифара $1,5,9$ (иначе би био облика $4k+3$), као ни цифра 6 (иначе би био облика $4k+2$). Дакле, мора бити $y=4$. Међутим, ниједан од бројева $111444, 222444, \ldots, 999444$ није потпун квадрат, што се директно проверава.

3Б.2. Посматрајмо неки троугао ABC састављен од јединичних троуглова. Саберимо бројеве у теменима ових јединичних троуглова. Резултат је по услову задатка дељив са 3. При томе су:



- бројеви у теменима A, B и C рачунати по једном;
- остали бројеви на дужима AB, BC и CA рачунати по 3 пута;
- бројеви унутар троугла ABC рачунати по 6 пута.

Према томе, и збир бројева само у теменима A, B и C је дељив са 3.

3Б.3. Означимо са $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ јединичне векторе дуж датих трију правих, а са $\vec{v}$ јединични вектор дуж тражене праве ℓ. Треба да важи $|\vec{v}\cdot\vec{a}| = |\vec{v}\cdot\vec{b}| = |\vec{v}\cdot\vec{c}|$. То се може записати као

$$\vec{v}\cdot(\vec{a}\pm\vec{b})=\vec{v}\cdot(\vec{a}\pm\vec{c})=0$$

за неки од четири избора знакова $\pm$, што значи да је ℓ заједничка нормала на (неколинеарне) векторе $\vec{a}\pm\vec{b}$ и $\vec{a}\pm\vec{c}$. Како сваки избор знакова $\pm$ даје по једну такву праву, постоје тачно 4 тражене праве ℓ.

3Б.4. Означимо $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}$ (2018 корена). Тражена неједнакост се може записати као

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{6+x}}}{\sqrt{3-x}}>\frac{1}{\sqrt{6}}. \qquad (*)$$

За почетак, приметимо да је израз из задатка дефинисан, јер је

$$x<\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}_{2018}=\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{9}}}}_{2017}=\cdots=\sqrt{6+\sqrt{9}}=\sqrt{9}=3.$$

Неједнакост$(*)$ квадрирањем и множењем са $3-x>0$ постаје $3-\sqrt{6+x}>\frac{1}{6}(3-x)$. Ово се заменом $t=\sqrt{6+x}$ своди на $6(3-t)>9-t^2=(3-t)(3+t)$, тј. $3+t<6$, што је тачно.

3Б.5. Играч који затекне пиона на седмом реду побеђује у наредном потезу. То значи да губи играч који буде принуђен да постави пиона на седми ред, а то ће бити само ако су већ сви пиони у шестом реду. Према томе, победник је онај након чијег потеза су сви пиони у шестом реду.

Поделимо пионе у четири пара. Бранкина стратегија је да, кад год Анка помери пиона из једног пара, она на исти начин помери и другог пиона из тог пара. Овако ће, све док не буду сви пиони у шестом реду, након сваког Анкиног потеза Бранка имати свој. Дакле, победиће Бранка.

4Б.1. Дати израз је једнак

$$\begin{aligned}&\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ\sin 90^\circ\\&=\frac{1}{2}\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{1}{4}\sin 10^\circ(\cos 20^\circ-\cos 120^\circ)\\&=\frac{1}{4}\sin 10^\circ\cos 20^\circ+\frac{1}{8}\sin 10^\circ=\frac{1}{8}(\sin 30^\circ-\sin 10^\circ)+\frac{1}{8}\sin 10^\circ=\frac{1}{16},\end{aligned}$$

што је рационалан број.

Друго решење. За сваки од углова $\varphi\in\{10^\circ,50^\circ,-70^\circ\}$ важи $\sin 3\varphi=3\sin\varphi-4\sin^3\varphi=\frac{1}{2}$. Другим речима, сваки од бројева $x\in\{\sin 10^\circ,\sin 50^\circ,-\sin 70^\circ\}$ је решење једначине

$$8x^3-6x+1=0,$$

а по Вијетовим формулама производ три решења ове кубне једначине је $-\frac{1}{8}$. Према томе, $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ=\frac{1}{8}$, одакле следи да је вредност израза из задатка $\frac{1}{16}$.

4Б.2. Лева таблица је познати пример магичног квадрата са бројевима $1,2,\ldots,9$. Пример за део (а) добијамо заменом ових бројева са $a+d,a+2d,\ldots a+9d$, а пример за део (б) заменом бројевима $11,12,13,21,22,23,31,32,33$:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

(а)

$a{+}4d$	$a{+}9d$	$a{+}2d$
$a{+}3d$	$a{+}5d$	$a{+}7d$
$a{+}8d$	$a{+}d$	$a{+}6d$

(б)

21	33	12
13	22	31
32	11	23

4Б.3. Бројеви x^2+x и y^2+y су парни, па је број у првој једнакости непаран, тј. $a=0$. Такође, x^3-x и y^3-y су дељиви са 3, па број у другој једнакости није дељив са 3, тј. $b=0$. Дати систем се свео на

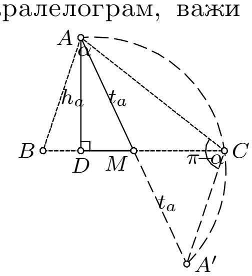
$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y+1=5^c, \\ x^3+y^3-x-y+2=2^c. \end{cases}$$

Из прве једначине је $c>0$, па је

$$-3 \geqslant 2^c-5^c = x^3-x^2-2x+y^3-y^2-2y+1 = f(x)+f(y)+1,$$

где је $f(t)=t(t-2)(t+1)$. Како је $f(1)=-2$ и $f(t)\geqslant 0$ за $t\geqslant 2$, мора бити $f(x)=f(y)=-2$, тј. $x=y=1$. Тада је $c=1$ и $(x,y,a,b,c)=(1,1,0,0,1)$ је једино решење задатка.

4Б.4. Троугао означавамо са ABC, подножје висине из A са D, а средиште странице BC са M. Посматрајмо тачку A' симетричну тачки A у односу на M. Тада је $AD=h_a$ и $AA'=2t_a$, а како је $ABA'C$ паралелограм, важи и $\sphericalangle ABA' = \sphericalangle ACA' = 180^\circ-\alpha$, што значи да тачке B и C припадају кружним луковима над тетивом AA' са периферијским углом $180^\circ-\alpha$.



Почнимо конструкцију цртањем троугла ADM у коме је $AD=h_a$, $AM=t_a$ и $\sphericalangle ADM=90^\circ$. Затим пресликајмо тачку A симетрично у односу на M, до тачке A'. Сада конструишимо кружни лук над дужи AA' као тетивом и периферијским углом $180^\circ-\alpha$. У пресеку овог лука са правом MD добијамо тачку C. Најзад, тачку B налазимо симетрично тачки C у односу на M.

Решење постоји под условом да је $t_a\geqslant h_a$ и јединствено је до на симетрију.

4Б.5. Приметимо да је $p(n)\leqslant n$ за све природне бројеве n. Заиста, ако је $n=\overline{a_k\dots a_1a_0}$, онда је

$$p(n)=a_0a_1\cdots a_k \leqslant 10^k a_k \leqslant n$$

(једнакост важи само када је n једноцифрен број). Међутим, из $0\leqslant p(n)=n^2-21n-40\leqslant n$ следи $22<\frac{21+\sqrt{601}}{2}\leqslant n\leqslant 11+\sqrt{161}<24$, па у обзир долази само $n=23$. То заиста јесте решење.

САДРЖАЈ