ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА

СРЕДЊОШКОЛАЦА

2017/2018

Београд, 2018

Организациони одбор 60. Државног такмичења из математике

1. !!Дејан Јосиповић, директор Девете гимназије „Михаило Петровић Алас“
2. !!Наташа Марковић Атар, проф. српског језика и књижевности
3. !!Стручно веће математике и рачунарства и информатике
4. Др Војислав Андрић, председник ДМС
5. Др Бојан Башић, ПМФ, Нови Сад, председник Државне комисије

Организацију такмичења помогли

1. *!!Подравка*
2. *!!Књаз Милош*
3. *!!McCann*

Редакција и обрада: др Бојан Башић

Запис о Београду

Београд, град веома бурне историје, један је од најстаријих у Европи. Његова историја траје пуних 7 000 година. Простор око великих река Саве и Дунава био је насељен још у палеолитском периоду. Из старијег каменог доба потичу остаци људских костију и лобања неандерталаца, пронађени у каменолому код Лештана, у пећини на Чукарици и у близини Бајлонијеве пијаце.

Остаци културе млађег каменог доба пронађени су у Винчи, Жаркову и Горњем граду, изнад ушћа Саве у Дунав. То указује да је простор Београда био насељен у континуитету и да је интезитет тог насељавања бивао све јачи. Многа данашња насеља београдске околине леже на културним слојевима ранијих праисторијских насеобина.

Винча крај Београда спада у ред најзначајнијих насеобина и културних налазишта праисторијског периода. Археолошке ископине на Роспи ћуприји, Горњем граду, Карабурми, Земуну и Винчи потврђују претпоставке да је подручје Београда било интезивно насељено и да се његово становништво бавило плужном земљорадњом и другим пратећим привредним делатностима. На овим локалитетима откривене су некрополе бронзаног и металног доба, као и докази различитих културних утицаја.

Београд је средиште културе и уметности Србије. У Београду стварају многи наши значајни уметници, годишње се одржи више од 9 000 позоришних представа, изложби, концерата, перформанса и других уметничких програма, гостују бројни еминентни ствараоци из света уметности. Београд је седиште највиших државних и националних институција културе и уметности: Српске академије наука и уметности, Народне библиотеке Србије, Народног музеја, Народног позоришта, Универзитета у Београду, Универзитета уметности.

У Београду се налазе значајна дела архитектуре, Калемегдан и Београдска тврђава, споменици културе и друга непокретна културна добра, бројна археолошка налазишта са материјалним остацима који сведоче о развијеној цивилизацији и култури на тлу Београда од праисторије до данас.

Град Београд оснивач је 36 установа културе (11 позоришта, 8 установа заштите, 4 библиотеке, 13 центара за културу и галерија) и 2 јавна предузећа за које обезбеђује услове рада, а истовремено помаже реализацију програма и програмских пројеката 101 установе и уметничке асоцијације.

Београд, као универзитетски центар, има 2 државна универзитета и више приватних високообразовних институција. У Београду има 280 основних и средњих школа. Од 195 основних школа – 162 су редовне основне, 14 је специјалних основних школа, 15 уметничких и 4 школе за основно образовање одраслих.

Београд је и седиште врхунских научних и истраживачких установа из свих области.

!!!!О Деветој гимназији

Девета гимназија „Михаило Петровић Алас“ (Нови Београд, Булевар маршала Толбухина 41) основана је 30. јуна 1961. године и од 1. септембра те године почела је са радом. Под именом Гимназија „Нови Београд“ школа прву школску годину започиње у згради Основне школе „Владимир Иљич Лењин“ уписавши у први разред 176 ученика распоређених у пет одељења. Највећи проблем Гимназије био је недостатак адекватног простора јер се настава одржавала и у Основној школи „Иван Гундулић“ пошто школа није имала сопствену зграду. У јулу 1964. године Гимназија се коначно усељава у своју зграду, подигнуту за потребе Основне школе „Жикица Јовановић Шпанац“, близу Студентског града. У то време она је била прва средња школа и задуго једина гимназија на Новом Београду. У Одлуци о оснивању Гимназије унесени су и њени основни задаци: *„Проширити и продубити знање природних и друштвених наука и опште-техничког образовања: неговати и подстицати личне способности и склоности ученика и помагати им у избору даљег школовања и позива: доприносити даљем интелектуалном, физичком, друштвеном, моралном и естетском васпитању и усавршавању ученика ради њиховог оспособљавања за активан друштвени рад, као и за здрав и културан живот“*. Школске 1961/62. године Гимназија је примила у радни однос 4 а наредне године још 17 наставника, када је уписала у први и други разред 456 ученика. Исте школске године гимназија је отворила и трећи разред, једно одељење друштвено-језичког и два одељења природно-математичког смера, уписавши 81 ученика. Школа је временом мењала називе. Године 1963. уписана је у регистар као Гимназија „Нови Београд“ а 1965. као Девета београдска гимназија „Нови Београд“. Гимназија није могла да избегне ни усмерено образовање, ни интеграцију. Од 1979. до 1984. године била је интегрисана са Образовним центром „Први мај“. Тада је имала и полазнике Вечерње школе. После неуспеле интеграције регистрована је 1984. код Окружног привредног суда у Београду као Радна организација математичко-техничка средња школа „Михаило Петровић Алас“, а три године касније код истог суда мења назив у Математичка школа „Михаило Петровић Алас“. Садашњи назив – Девета гимназија „Михаило Петровић Алас“ – носи од децембра 1990. године. После готово две деценије од оснивања ова узорна школа добила је име великог научника Михаила Петровића – Мике Аласа – иманентно њеном профилу и угледу међу гимназијама.

Данас је ово савремена школа коју похађа приближно 1000 ученика распоређених у 32 одељења – по осам одељења у сваком разреду од којих су три одељења друштвено-језичког и пет одељења природно-матемаричког смера. Девету гимназију уписују најбољи и најуспешнији ученици Републике Србије и града Београда. У Гимназији последњих година успешно раде: ђачки парламент, дебатни клуб, драмска, музичка, рецитаторска, литерарна, биолошка и антична секција, као и разне спортске секције. Ученици Девете гимназије освајали су и освајају највиша признања и награде на различитим такмичењима и олимпијадама знања из готово свих наставних предмета, на спортским такмичењима, конкурсима и смотрама. Стога они лако обезбеђују проходност на жељени факултет и у Србији и у иностранству. Бројни ученици сваке године похађају програме у Истраживачкој станици Петница као и у Регионалном центру за таленте. Исто тако, континуирано и успешно, наши ученици се баве и хуманитарним радом – сарађују са Црвеним крстом Србије, Домом за децу ометену у развоју у Сремчици и Центром за заштиту одојчади, деце и омладине у Звечанској улици и њиховим Домом на Вождовцу. Протеклих година учествовали су у бројним пројектима попут *Здраво Европо*, *Еко Девета*, *Интернест*, *Вики гимназијалац*, *Ученичко предузеће „Аласи“*. Неколико узастопних генерација Гимназија има успешне представнике у пројекту *БеоГрадска КулТура* у организацији Завода за заштиту споменика културе града Београда.

Девета гимназија је остварила и успешну међународну сарадњу са гимназијама у Русији и Словенији, као и вишегодишњу културно-просветну сарадњу са Руским домом и Руском школом у Београду.

Од јуна 2007. године управа Гимназије установила је свечани пријем и награде за најуспешније ученике који су својим ангажовањем у различитим ваннаставним активностима достојно и успешно представили своју школу у текућој школској години. Овом приликом обично се награђује око 50 ученика који су остварили најбоље резултате на међународним, републичким и градским такмичењима из математике, физике, хемије, биологије, историје, географије, српског језика, страних језика, књижевности, филозофије, различитих спортова. Међу њима су и ученици који су својим музичким умећем обогатили културни живот у школи.

Ученици наше школе су увек показивали посебну заинтересованост за математику и рачунарство и информатику. То показују њихови одлични резултати на досадашњим такмичењима. Зато су у великом броју учествовали на окружним, а у завидном броју на државним такмичењима из ових предмета. Наставници наше школе, задовољни таквим резултатима, преузели су одговорност да у више наврата буду домаћини окружним такмичењима, а ове године су домаћини Државном такмичењу из математике.

После пет и по деценија трајања и више од 13 000 изведених матураната, Девета гимназија с поносом може рећи да је остварила своју просветну, педагошку и културну мисију која јој је поверена још давне 1961. године.

ДРЖАВНА КОМИСИЈА
за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2017/2018.

1. Балтић др Владимир, Математичка гимназија, Београд

2. Башић др Бојан, ПМФ, Нови Сад – председник комисије

3. Божин др Владимир, Математички факултет, Београд

4. Варга Б. Јожеф, ОШ „Петар Кочић“, Темерин

5. Ђикић др Марко, ПМФ, Ниш

6. Ђукић Душан, Машински факултет, Београд

7. Кнежевић др Миљан, Математички факултет, Београд

8. Лукић др Миливоје, Рајс, САД

9. Маринковић Растко, Књажевачка гимназија, Књажевац

10. Матић др Иван, Барух колеџ, САД

11. Милосављевић Милош, Гимназија „Светозар Марковић“, Ниш

12. Петровић др Никола, Институт за физику, Београд

13. Радовановић др Марко, Математички факултет, Београд

14. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево

15. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад

16. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево

17. Чикош Пајор Гизела, Гимназија „Бољаи“, Сента

Превод на мађарски језик:

1. Аго Балог Кристина, ПМФ, Нови Сад

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 13. 1. 2018.

Први разред – А категорија

1. За природан број n, нека је $f(n)$ број написан истим цифрама али обратним редоследом (тј. здесна налево) ако n није дељив са 10, а иначе дефинишемо $f(n) = 0$. (На пример, $f(123) = 321$ и $f(30) = 0$.)

a) Ако важи $n = 3f(n)$, доказати да је n дељив са 27.

b) Ако важи $n = 2f(n)$, доказати да је n дељив са 9.

2. Нека је тачка K средиште странице CD правоугаоника $ABCD$. Праве BK и AC су ортогоналне и секу се у тачки H, а тачка G је подножје нормале из D на AC. Доказати:

a) $\measuredangle ACB = \measuredangle DHA$;

b) $GH = \dfrac{1}{3}AC$.

3. Математичка комисија се састоји од $2n$ чланова, $n \geqslant 3$. Познато је да је сваки члан комисије у свађи с тачно једним другим чланом комисије (ова релација је симетрична). На колико начина је могуће поделити комисију у три одбора: један за састављање задатака, један за оцењивање задатака и један за организацију такмичења, тако да сваки одбор има бар два члана и да никоја два члана комисије која су у свађи не буду у истом одбору?

4. Сат има три казаљке које се све окрећу равномерном брзином. Секундна казаљка направи круг за један минут, минутна за један сат, а сатна за 12 сати. У поноћ су све казаљке у истој позицији. Колико ће пута у периоду од 24 часа од тада једна казаљка са сваком од друге две заклапати угао од $30°$?

5. Барон Минхаузен живи у земљи Z у којој постоји 2018 градова и неки градови су повезани путевима (путевима је могуће кретати се у оба смера). Барон је установио да постоји град A из ког можемо кренути на путовање, на крају тог путовања се вратити у град A, а да током путовања прођемо свим путевима у тој земљи тачно једном. Он тврди да из те чињенице следи да за било која два пута p и r која иду из истог града постоји путовање из неког града B на крају ког се враћамо у град B, током путовања пролазимо свим путевима тачно једном, и притом путевима p и r пролазимо непосредно једним за другим. Да ли је он праву или по обичају лаже?

Други разред – А категорија

1. Решити једначину:

$$\sqrt{17 - 7\sin 2x} = 3\cos x - 5\sin x.$$

2. Дат је $\triangle ABC$ чије су странице a, b и c, $a \leqslant b \leqslant c$, а тежишне дужи које њима одговарају су t_a, t_b и t_c, респективно. Доказати:

a) једнакост $a^2 + c^2 = 2b^2$ важи ако и само ако важи $t_a^2 + t_c^2 = 2t_b^2$;

b) једнакост $a^2 + c^2 = 2b^2$ важи ако и само ако је $\triangle ABC$ сличан троуглу чије су странице дужина t_a, t_b и t_c.

3. Наћи све просте бројеве облика $1010101\ldots0101$ (тј. чији децимални запис се састоји од цифре 1 иза које следи блок „01“ поновљен произвољан број пута).

4. Наћи сва ненегативна реална решења $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ система једначина

$$x_{i+1} = x_i^2 - (x_{i-1} - 1)^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(Индексе узимамо циклично по модулу n.)

5. Дат је непаран природан број n. Квадрат странице n је подељен на n^2 јединичних квадрата. Странице ових квадрата одређују укупно $2n(n+1)$ јединичних дужи. Неке од ових дужи су обојене црвено, при чему сваки јединични квадрат има бар две црвене странице. Колико најмање дужи може бити обојено?

Трећи разред – А категорија

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f(xy)) = |x|f(y) + 3f(xy).$$

2. Нека је I центар кружнице уписане у $\triangle ABC$, $AB < AC$. Права AI поново сече његову описану кружницу у тачки D. Кружница описана око $\triangle CDI$ поново сече праву BI у тачки K. Доказати: $BK = CK$.

3. Дат је троугао чије су дужине страница природни бројеви и чија је површина природан број. Једна од његових страница је аритметичка средина друге две, а збир најкраће странице и површине је једнак збиру преостале две странице. Наћи дужине његових страница и његову површину.

4. Дата је табла $(2n+1) \times (2n+1)$ у чијем се ћошку налази паук. Паук у једном потезу може да се помери једно или два поља вертикално или дијагонално, или једно поље хоризонтално. Колико најмање потеза је потребно пауку да обиђе сва поља на табли? (Сматрамо да поље на ком паук стоји на почетку, као и поље на које стигне на крају, јесу поља која је обишао; такође, уколико паук одигра потез у ком се помери за два поља, сматрамо да паук јесте обишао и поље између њих.)

5. Примитивном Питагорином тројком називамо уређену тројку природних бројева (a, b, c), узајамно простих по паровима, за које важи $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Доказати да се ниједна примитивна Питагорина тројка не може записати користећи само две различите цифре.

b) Доказати да се бесконачно много примитивних Питагориних тројки може записати помоћу цифара 0, 1 и 5.

Четврти разред – А категорија

1. У зависности од ненегативног параметра k одредити граничну вредност:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} kx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

2. Октаедар $ABCDEF$ има за своју основицу квадрат $ABCD$, док је права EF нормална на раван одређену квадратом $ABCD$ и пролази кроз његов центар. Познато је да лопта која додирује све пљосни октаедра и лопта која додирује све бочне ивице (тј. EA, EB, EC, ED, FA, FB, FC и FD) имају исти центар и да лопта која додирује бочне ивице има за 50% већу површину. Наћи однос $\dfrac{EF}{AB}$.

3. Перица стоји на једном од четири спрата зграде. У једном потезу он прелази на суседан спрат (спрат изнад или спрат испод, ако такав постоји). На колико начина Перица може да направи n потеза, где је n задат ненегативан цео број, ако може почети на било ком спрату а мора завршити на последњем?

4. Дата су два проста броја p и q који задовољавају услов $p < q < 2p$. Доказати да постоје два узастопна природна броја таква да је највећи прост делилац једног од њих једнак p, а највећи прост делилац другог једнак q.

5. У јединичном кругу Γ је дато n дужи укупне дужине $2\sqrt{n}$. Доказати да постоји кружница концентрична с кругом Γ која сече бар две дате дужи.

Први разред – Б категорија

1. Мерни бројеви углова троугла, изражени у степенима, представљају три проста броја. Наћи све могуће вредности за углове тог троугла.

2. Свака карта с једне стране има број, а с друге стране има слово (две карте које с једне стране имају исто слово не морају нужно с друге стране имати исти број, и обратно). На столу стоје карте које на видљивој страни имају:

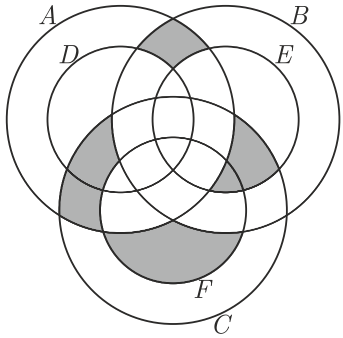
М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К, А, 2, 0, 1, 8.

Влада тврди следеће: „Ако је на карти самогласник, онда је с друге стране паран број“. Миљан жели да провери Владино тврђење. Колико најмање карата (и које) треба да окрене да би утврдио тачност тврђења?

3. Да ли постоје узастопни природни бројеви a, b, c и d такви да важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2018}{1301} \quad ?$$

4. На слици је дат Венов дијаграм за шест скупова A, B, C, D, E и F, при чему важи $D \subseteq A$, $E \subseteq B$ и $F \subseteq C$. Написати формулу за скуп који одговара осенченој области.



5. Свако слово у речи *МАШТОВИТ* представља једну цифру из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Различита слова представљају различите цифре. Број *МАШТОВИТ* је непаран и дељив са 3, а сви сугласници представљају цифре исте парности. Колико има таквих бројева?

Други разред – Б категорија

1. Одредити колико има скупова X који задовољавају оба следећа услова:

- $X \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7, 8\}$;
- $X \cup \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

2. Ако је полином

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$$

дељив полиномом

$$x^2 + 2ax + b,$$

онда је први полином потпун куб, а други потпун квадрат. Доказати.

3. У правоуглом трапезу дужина средње линије је 43. Краћа дијагонала тог трапеза је истовремено симетрала тупог угла тог трапеза, и њена дужина износи 60. Одредити дужине свих страница тог трапеза.

4. Наћи све просте бројеве p такве да су и бројеви $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ прости.

5. У скупу реалних бројева решити неједначину:

$$2|x-2| - \left|\frac{3}{|x-3|} - 1\right| \geqslant 1.$$

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све просте бројеве p, q, r и s такве да важи

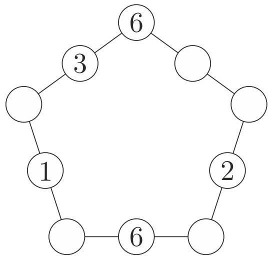
$$6p + 7pq + 8pqr + 9pqrs = 2018.$$

2. Дати су бројеви $a_1 = \log_2(3^x - 1)$, $a_2 = \log_4(9^x - 3^{x+1} + 2)$ и $a_3 = \log_2(3 - 3^x)$.

a) Одредити све реалне вредности x за које су сва 3 броја a_1, a_2 и a_3 дефинисана.

b) Одредити све реалне вредности x за које важи $a_1 + a_3 = 2a_2$.

3. Марко је уписао 5 бројева у 5 кружића на слици.



Марко жели да упише бројеве природне бројеве мање од 100 у остале кружиће, а да при томе збир 3 броја дуж сваке странице петоугла буде исти. На колико различитих начина он може то да уради?

4. Анђелија уписује редом слова С,Р,Б,И,Ј,А у поља таблице:

(по једно слово у свако поље). Прво слово може да упише у било које поље, а свако следеће слово може да упише само у поље суседно пољу у које је написала претходно слово (поља су суседна ако имају бар једну заједничку тачку). На колико различитих начина она може да упише слова у таблицу?

5. Ивице тетраедра $ABCD$ имају дужине 7, 13, 18, 27, 36 и 41 (у неком поретку). Ако је AB дужине 41, одредити дужину ивице CD.

Четврти разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$(x-7)^3 + (x+3)^3 = 278(x-2).$$

2. У зависности од ненегативног параметра a одредити граничну вредност:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{a + 2018^x}{2} \right)^{\frac{2018}{x}}.$$

3. Колико има петоцифрених природних бројева који имају тачно две парне цифре?

4. Основа пирамиде је правоугли троугао коме је један од оштрих углова 60°. Бочне ивице имају дужину 2018 и свака од њих заклапа угао од 45° с равни основе. Наћи површину и запремину те пирамиде.

5. За природне бројеве m и n, $m < n$, важи

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \overline{0{,}xyzxyzxyz\ldots}$$

где су x, y и z неке цифре (не нужно различите), и блок $\overline{xyz}$ се периодично понавља бесконачно много пута. Одредити све могуће вредности за $\frac{m}{n}$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 24. 2. 2018.

Први разред – А категорија

1. Ако су a, b и c природни бројеви такви да су бројеви

$$24^a + 2^b + 2018^c \qquad \text{и} \qquad 10^c + 3^a + 2018^b$$

дељиви са 7, доказати да број $30^b + 3^c + 2018^a$ није дељив са 7.

2. Наћи све цифре n и 2018-тоцифрене природне бројеве x, $x = \overline{a_{2017}\ldots a_2a_1a_0}$, такве да важи

$$n \cdot x = \overline{(a_{2017}+n)\ldots(a_2+n)(a_1+n)(a_0+n)}.$$

3. Кружница уписана у $\triangle ABC$ додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F, редом. Уочена је тачка K са исте стране праве EF као и тачка A, и притом важи $\measuredangle KFE = \measuredangle ACB$ и $\measuredangle KEF = \measuredangle ABC$. Доказати: $KD \perp BC$.

4. За скуп X, означимо $\mathscr{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$. (На пример: $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$, јер су подскупови скупа $\{1\}$ скупови $\varnothing$ и $\{1\}$; $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$, јер скуп $\varnothing$ има тачно један подскуп, и то је $\varnothing$.) Са $\mathscr{P}^n(X)$ означавамо израз $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\ldots\mathscr{P}(X)\ldots))$, где је $\mathscr{P}$ примењено n пута. Наћи све двоелементне подскупове A скупа $\bigcup_{n=1}^{2018} \mathscr{P}^n(\varnothing)$ такве да важи $A \subseteq \mathscr{P}(A)$.

5. Максим и Мина играју игру „Шампиони доколице“. Најпре Максим повлачи једну праву у равни, затим Мина повлачи праву различиту од претходно повучене, па онда опет Максим повлачи праву различиту од две претходно повучене, и тако наизменично. Игра се завршава када буде повучено укупно 18 правих (јасно, последњу ће повући Мина). Максим побеђује уколико постоји више од 100 различитих пресечних тачака повучених правих, а Мина побеђује у супротном (тј. ако има 100 или мање таквих тачака). Ко има победничку стратегију?

Други разред – А категорија

1. У зависности од реалног параметра a, решити једначину

$$\sqrt{2x-a}-\sqrt{x-1}=2$$

у скупу реалних бројева.

2. Новица на тренингу гађа кош. За сваки погодак добија 1 поен, а за сваки промашај одузима му се k поена, где је k фиксиран природан број. (На почетку има 0 поена, а број освојених поена у неком тренутку током тренинга може бити и негативан.) На крају тренинга Новица је имао k поена. Ако је познато да је Новица погодио у више од 75% а мање од 80% од укупног броја бацања, одредити k.

3. Дат је $\triangle ABC$, чији је ортоцентар H, а M је средиште странице BC. За подножје нормале N из H на AM важи $AN=3MN$. Доказати: $AM=BC$.

4. Претпоставимо да се сви позитивни делиоци природног броја n (укључујући 1 и n) могу поделити у дисјунктне парове на такав начин да је збир бројева у сваком пару прост број. Доказати да су овако добијени прости бројеви међусобно различити.

5. Број зовемо *мегапрост* ако је прост, свака цифра му је прост број и збир цифара му је прост број. Доказати да мегапростих бројева са 2018 цифара има мање од $11\cdot 4^{2015}$.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити најмању вредност функције

$$f(x)=\frac{x^2}{x-9}$$

на интервалу $x\in(9,\infty)$.

2. У скупу природних бројева решити једначину

$$x!+4=4(x+3)^y.$$

3. Нека су BE и CF висине оштроуглог $\triangle ABC$, $AB\neq AC$, а M и N, редом, средишта дужи BC и EF. Доказати да центар кружнице описане око $\triangle AMN$ лежи на правој кроз A паралелној правој BC.

4. Наћи све природне бројеве $n\geqslant 2$ за које постоје међусобно различити реални бројеви $a_1,a_2,\ldots,a_n$ такви да су испуњена следећа два услова:

- када се сваки од ових n бројева замени збиром преосталих $n-1$ бројева (свих осим њега), добија се исти скуп бројева;
- не постоји подела ових n бројева на два дисјунктна непразна скупа таква да су суме $(n+1)$-их степена елемената тих скупова међусобно једнаке.

5. Компјутерски чип се састоји од n транзистора. Неки транзистори су повезани водовима. За свака два транзистора x и y важи: уколико x и y нису повезани водом, тада из транзистора x и y укупно полази бар $n-1$ водова. Доказати да укупан број водова износи бар $\frac{\binom{n}{2}}{2}$.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је S непразан скуп чији су сви елементи прости бројеви, и нека је испуњено: за све $p, q \in S$ (не обавезно различите) бар један прост фактор броја $pq+1$ такође је у скупу S. Доказати да се у скупу S налази бар један прост број облика $4k+1$.

2. Постоји ли реалан број x за који важи

$$\cos x < \cos 2x < \cos 4x \quad ?$$

3. Дат је једнакокраки $\triangle ABC$, $AB = AC$. Нека је k његова описана кружница, с центром у тачки O. На краћим луковима $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ дате су тачке X и Y, респективно, такве да важи $\measuredangle XBA = \measuredangle YAC$. Нека је X' тачка основиметрична тачки X у односу на праву AB, и нека је Y' тачка основиметрична тачки Y у односу на праву AC. Доказати: $OX' = OY'$.

4. Дата је празна табла 2018×2018. Играчи А и Б наизменично, почев од играча А, бирају по једну колону на табли (која не сме бити скроз попуњена) и на прво празно поље (гледано одозго надоле) уписују једну цифру од 0 до 9. Притом на пољима у првој врсти и у првој колони не сме бити уписана цифра 0. Након 2018^2 потеза, цифре у свакој врсти образују по један 2018-тоцифрен број, и цифре у свакој колони образују по један 2018-тоцифрен број. Играч А побеђује ако су бар два од ових 4036 бројева проста, а играч Б побеђује у супротном. Који играч има победничку стратегију?

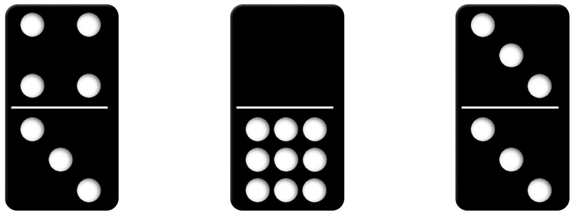
5. Наћи све природне бројеве m и k такве да се исписивањем бројева $m!$ и $k!$ једног иза другог добија факторијал неког природног броја.

Први разред – Б категорија

1. Дат је $\triangle ABC$, над чијом је страницом AC као над пречником конструисана кружница k. Кружница k пролази кроз средиште странице BC, а страницу AB сече у тачки D таквој да важи $AD = \frac{3}{2}DB$. Ако важи $AC = 60$, израчунати површину $\triangle ABC$.

2. На страницама AB и BC паралелограма $ABCD$ одабране су тачке K и M, редом, такве да важи $AK : KB = 2 : 3$ и $BM : MC = 2 : 1$. Наћи однос површина $\triangle BKM$ и $\triangle DKM$, тј. израчунати вредност $\frac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)}$.

3. Комплет од 55 домина садржи све могуће комбинације два броја од 0 до 9, укључујући и домине на којима је два пута исти број. (На слици су приказане три домине: домина која садржи бројеве 3 и 4, домина која садржи бројеве 0 и 9, и домина која садржи два пута број 3.) Колико тачкица има укупно у целом комплету домина?



4. Нека су a, b и c природни бројеви.

а) Ако су ab и bc кубови природних бројева, доказати да је и a^2c куб природног броја.

b) Ако су a^4b, b^8c^5 и c^7a кубови природних бројева, доказати да су a, b и c кубови природних бројева.

5. У скупу реалних бројева решити једначину

$$|x - |2x - |3x - 1||| = 1.$$

Други разред – Б категорија

1. Колико постоји четвороцифрених природних бројева који се могу записати помоћу цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ако све цифре морају бити различите и збир цифара треба да износи 15?

2. Кружница k уписана у трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$, додирује страницу AB у тачки E. Ако важи $AE = 15$, $BE = 10$ и $CD = 8$, одредити полупречник кружнице k.

3. Наћи најмањи природан број n такав да број n^2 почиње са 2019 (тј. да важи $n^2 = 2019\ldots$).

4. У зависности од реалног параметра a, решити једначину

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

у скупу реалних бројева.

5. Попуњавање таблице 3×3 бројевима од 1 до 9 називамо *магични квадрат* ако је сваки број искоришћен тачно једном, и притом су збирови у свакој врсти, свакој колони и на обе дијагонале сви међусобно једнаки. Одредити колико постоји различитих магичних квадрата 3×3. (Два магична квадрата сматрамо различитим ако бар на једном пољу имају уписане различите бројеве.)

Трећи разред – Б категорија

1. На шаховском турниру учествује n шахиста. Свако је са сваким одиграо по k партија. Одредити све могуће вредности за n и k ако су укупно одигране 224 партије.

2. Колико решења једначине

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$$

лежи у интервалу $[2, 24]$?

3. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} a + b &= 8; \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 32 \end{aligned}$$

у скупу реалних бројева.

4. Основа пирамиде $SABCD$ је ромб $ABCD$, са углом од 60° у темену A. Дужина бочне ивице SA је једнака дужини странице тог ромба. Доказати:

$$SB^2 + SD^2 = SC^2.$$

5. Доказати да једначина

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 3} = 2017$$

нема решења у скупу целих бројева.

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити површину фигуре која је у Декартовом координатном систему одређена неједначинама:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leqslant 4(x + y - 1); \\ y &\leqslant \sqrt{x^2 - 4x + 4}. \end{aligned}$$

2. Одредити колико постоји тројки (a, b, c) природних бројева не већих од 2018 таквих да су бројеви

$$24^a + 2^b + 2018^c \qquad \text{и} \qquad 10^c + 3^a + 2018^b$$

дељиви са 3.

3. На страници BC једнакостраничног $\triangle ABC$ уочена је тачка M. Доказати:

$$MB \cdot MC = AB^2 - AM^2.$$

4. Таблица $n \times n$ попуњава се бројевима 1, 0 и -1 на такав начин да збирови бројева у свакој врсти и у свакој колони (укупно $2n$ таквих збирова) сви буду међусобно различити. Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 3$;

b) $n = 4$?

5. У зависности од реалног параметра a, испитати колико различитих реалних решења има једначина

$$x^3 - 3x = a.$$

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 10. 3. 2017.

Први разред – А категорија

1. За природан број n означимо са x_n број који се добије узастопним записивањем свих природних бројева од 1 до n један иза другог (нпр. $x_{14} = 1234567891011121314$). Нека је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, дефинисана на следећи начин: $f(n)$ је најмањи број цифара које треба избацити из записа броја x_n да би новодобијени број био дељив са 8 (дозвољено је избацити и све цифре броја x_n, при чему тада сматрамо да је новодобијени број једнак нули). Да ли постоје природни бројеви t и n_0 такви да за све $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, важи $f(n+t) = f(n)$?

2. Дат је природан број k, и скупови A, B и C такви да важи

$$|A \triangle B| = |B \triangle C| = |C \triangle A| = 2k.$$

Доказати да постоји јединствен скуп D за који важи

$$|A \triangle D| = |B \triangle D| = |C \triangle D| = k.$$

(За скупове X и Y означили смо $X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, што се назива *симетрична разлика* скупова X и Y.)

3. У правоуглом $\triangle ABC$ тачка D је средиште хипотенузе AB. Нека је k кружница описана око $\triangle BCD$, и нека је E произвољна тачка на краћем луку $\widehat{BD}$. На правој BC уочена је тачка F таква да је B између C и F и да притом важи $\measuredangle BEF = 2\measuredangle BAF$. Нека је k_1 кружница описана око $\triangle CEF$. Доказати да једна од заједничких тангената кружница k и k_1 пролази кроз тачку D.

4. Доказати да круг полупречника 100 с центром у координатном почетку садржи мање од 31650 тачака чије су обе координате целобројне. (Сматрамо да круг садржи неку тачку уколико се она налази на његовом рубу или у његовој унутрашњости.)

Други разред – А категорија

1. Никола је замислио 4 различита реална броја и на табли је записао производ свака два од њих (чиме се на табли нашло 6 бројева). Дуле је избрисао један од тих бројева, након чега је на табли остало 5 узастопних природних бројева. Који је број Дуле избрисао?

2. За природне бројеве k, m и n који испуњавају неједнакости $k \geqslant 2$ и $m < n$ важи

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k = \overline{0{,}x_1x_2\dots x_9x_1x_2\dots x_9x_1x_2\dots x_9\dots}$$

где су $x_1, x_2, \dots, x_9$ неке цифре (не нужно различите), и блок $\overline{x_1x_2\dots x_9}$ се периодично понавља бесконачно много пута. Наћи све могуће вредности за $\left(\frac{m}{n}\right)^k$.

3. Дат је $\triangle ABC$ у ком је угао код темена A туп и $AB \neq AC$. Симетрала угла код темена A сече страницу BC и описану кружницу у тачкама D и E, редом. Нека се кружнице над пречницима BC и DE секу у тачкама K и L. Доказати да тачка симетрична тачки A у односу на праву BC лежи на правој KL.

4. За дате природне бројеве b и n, Алиса и Боба играју следећу игру. У простору је дато n тачака у општем положају (никоје три нису колинеарне, никоје четири нису компланарне), и сваке две су повезане једном дужи. Они наизменично боје необојене дужи – најпре Алиса обоји једну дуж црвено, а затим Боба обоји b дужи плаво, и тако док има необојених дужи. Алиса побеђује ако креира црвени троугао, док Боба побеђује ако се игра заврши, а Алиса није креирала црвени троугао.

a) Ако важи $b < \sqrt{2n-2} - \frac{3}{2}$, доказати да Алиса има победничку стратегију.

b) Ако важи $b \geqslant 2\sqrt{n}$, доказати да Боба има победничку стратегију.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су a, b и c реални бројеви за које важи $b < 0$ и $ab = 9c$. Доказати да једначина

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

има три реална и различита решења.

2. У оштроуглом $\triangle ABC$, тачке D и E су редом подножја нормала из ортоцентра на симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A. Доказати:

$$\measuredangle BDC + \measuredangle BEC = 180^\circ.$$

3. Наћи све парове природних бројева (x, y) такве да $xy^2 + 1 \mid x^2 + y^3$.

4. Дато је n правих у равни, $n > 2$, таквих да никоје две нису паралелне и никоје три се не секу у истој тачки. Ове праве деле раван на дисјунктне области (међу којима има и коначних и бесконачних). Казаћемо да је *ред* неке области број правих које садрже неки део руба те области. Доказати да је број области реда 3 бар за 4 већи од броја области реда строго већег од 4.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које једначина

$$a2^{ax^2} - 2^{a+x^2} = 32$$

у скупу реалних бројева има тачно два решења и да се она разликују за 2.

2. За округлим столом седе n играча и играју следећу игру. Свако од њих држи по један папир на ком треба да напише једну реченицу, и потом проследи свој папир играчу који се налази k_1 места удесно. Сваки играч на добијени папир потом треба нешто да нацрта, и проследи папир играчу који се налази k_2 места удесно. Играчи потом на добијени папир треба да напишу по једну реченицу и проследе папир играчу који се налази k_3 места удесно итд. (У i-том кораку сваки играч треба да напише једну реченицу ако је i непарно, односно да нешто нацрта ако је i парно, и потом да проследи папир играчу који се налази k_i места удесно.) Један круг игре се завршава након n корака, при чему у последњем кораку играчи не прослеђују папир даље (него само напишу односно нацртају нешто). Круг се сматра валидним ако је на крају игре сваки играч писао или цртао тачно по једном на сваком од постојећих n папира.

a) Играчи желе да одиграју један валидан круг игре, на такав начин да током тог круга сваки играч тачно по једном прослеђује папир сваком од преосталих играча. За које вредности n је могуће одабрати $(n-1)$-орку параметара $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ да ово буде испуњено?

b) Играчи желе да одиграју два валидна круга игре, на такав начин да укупно током та два круга сваки играч тачно по једном прослеђује своју реченицу сваком од преосталих играча, и тачно по једном прослеђује свој цртеж сваком од преосталих играча. За које вредности n је могуће одабрати $(n-1)$-орке параметара $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ за први и други круг (не нужно исте за оба круга) да ово буде испуњено?

3. У унутрашњости задатог правилног n-тоугла $A_1A_2\ldots A_n$ одредити геометријско место тачака M за које важи

$$\measuredangle MA_1A_2 + \measuredangle MA_2A_3 + \cdots + \measuredangle MA_{n-1}A_n + \measuredangle MA_nA_1 = \frac{(n-2)\pi}{2}.$$

4. Доказати да постоји само коначан број степена двојке са збиром цифара мањим од 2018.

Први разред – Б категорија

1. Дат је $\triangle ABC$ за који важи $AB = AC = 18$ и $BC = 4$. Уочена је кружница k полупречника 7 која пролази кроз тачке B и C, а притом се њен центар, тачка O, налази унутар $\triangle ABC$. Из тачке A су повучене тангенте на k које је додирују у тачкама N и M. Наћи површину четвороугла $OMAN$.

2. Решити систем:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{2}{3};$$
$$\frac{yz}{y+z} = \frac{6}{5};$$
$$\frac{zx}{z+x} = \frac{3}{4}.$$

3. На колико начина је таблицу 3×3 могуће попунити елементима скупа $\{10, 3, 2018\}$ ако збир бројева у свакој врсти, свакој колони и на обе дијагонале мора бити дељив са 3?

4. Одредити све тројке (x, y, z) целих бројева за које важи:

$$x^2 + xy + yz = y^2 + yz + zx = z^2 + zx + xy = 2017 + 2018^{2018}.$$

5. Постоји ли троугао коме је полупречник описане кружнице 2018, а који се може сместити у круг полупречника 60?

Други разред – Б категорија

1. На располагању су нам штапићи дужина 1, 2, …, 12, при чему од сваког штапића имамо довољан број комада. Потребно је одабрати четири штапића (не нужно различитих дужина) од којих се може саставити тангентни четвороугао чији је обим 24. На колико начина је ово могуће урадити?

2. Тетиве кружнице AB и CD се секу под правим углом. Познате су и дужине тетива $AD = 60$ и $BC = 25$. Израчунати полупречник те кружнице.

3. Решити једначину:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} = x^2 - 10x + 23.$$

4. Ако комплексни бројеви z_1 и z_2 испуњавају једнакости $|z_1 + 2i| = 2$ и $|z_2 + 1 - i| = 2$, одредити највећу могућу вредност израза $|z_1 + z_2|$.

5. Одредити све природне бројеве n и просте бројеве p за које је $p^2 + 7^n$ потпун квадрат.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити неједначину:

$$\log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 < \frac{5}{2}.$$

2. Решити једначину:

$$\sin x = \sqrt{\sin^2 3x - \sin^2 2x}.$$

3. Да ли постоји број облика

$$200\ldots0018$$

(где се нуле појављују произвољан број пута) који се може представити као производ неколико (два или више) узастопних природних бројева?

4. У равни бирамо n тачака таквих да је скуп свих растојања између парова ових тачака $\{1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}\}$ (дакле, свака од ових вредности се појављује тачно једном као растојање између неке две од уочених тачака). Да ли је ово могуће постићи за:

a) $n = 4$;

b) $n = 5$?

5. Дат је $\triangle ABC$, и уочена је кружница γ која садржи тачку A, додирује кружницу описану око $\triangle ABC$, и додирује праву BC у тачки D, при чему је B између C и D. Ако важи $\measuredangle BAC = \pi - \arcsin\dfrac{35}{37}$, $BC = 70$ и $BD = 10$, одредити полупречник кружнице γ.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити систем:

$$x^2 - y^2 = 16;$$

$$3xy^2 + x^3 = 260.$$

2. Дат је неједнакокраки правоугли $\triangle ABC$, $\measuredangle C = 90^\circ$, за чије странице $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ важи

$$c^2(3a + b) = 4a^3.$$

Одредити углове у $\triangle ABC$.

3. Одредити колико има функција $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ таквих да за све $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ важи

$$f(f(x)) = x.$$

4. Одредити све уређене тројке (a, b, c) реалних бројева таквих да функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задата са

$$f(x) = \sin(ax^2 + bx + c),$$

буде парна. (За функцију f кажемо да је *парна* акко за све x важи $f(x) = f(-x)$.)

5. Одредити колико једначина

$$y^3 + x^2y + 2xy^2 + x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + y + 2 = 0$$

има целобројних решења (x, y) за која важи $|x| \leqslant 20$ и $|y| \leqslant 18$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 13. 1. 2018.

Први разред – А категорија

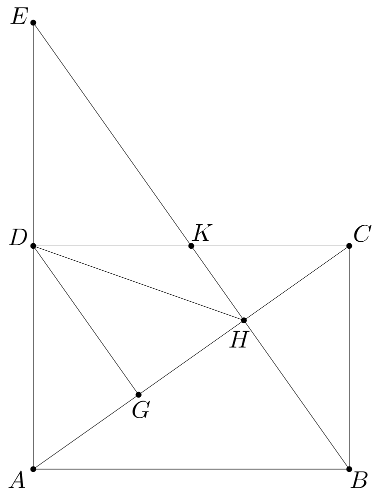
1. а) Пошто је n дељив са три, следи да је његов збир цифара дељив са три, те је онда и $f(n)$ дељив са 3 јер има исти збир цифара. Одатле, из $n = 3f(n)$ следи да је број n дељив са 9 те је и његов збир цифара дељив са 9, и најзад, пошто је и $f(n)$ дељив са 9 јер има исти збир цифара, из $n = 3f(n)$ следи да је n дељив са 27.

b) Уколико запишемо $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, једнакост $n = 2f(n)$ се своди на

$$10^k a_k + \cdots + 10a_1 + a_0 = 2(10^k a_0 + \cdots + 10a_{k-1} + a_k).$$

Из констатације $10^i \equiv 1^i = 1 \pmod 9$ следи $a_k + \cdots + a_1 + a_0 \equiv 2(a_0 + \cdots + a_{k-1} + a_k) \pmod 9$, тј. $a_0 + \cdots + a_{k-1} + a_k \equiv 0 \pmod 9$. Дакле, како је збир цифара броја n дељив са 9, следи да је и n дељив са 9.

2. а) Нека права BK сече продужетак странице AD у тачки E. Како су $\triangle BCK$ и $\triangle EDK$ правоугли, K је средиште странице CD и код K имамо унакрсне углове, добијамо $\triangle BCK \cong \triangle EDK$. Одатле имамо $ED = BC = AD$, па како је $\triangle AHE$ правоугли (по услову задатка важи $BK \perp AC$), то је D средиште хипотенузе, па имамо $AD = ED = HD$, тј. $\triangle HAD$ је једнакокраки, одакле следи $\measuredangle DAH = \measuredangle DHA$. Сада из једнакости $\measuredangle DAH = \measuredangle ACB$ (углови са паралелним крацима) добијамо тражену једнакост $\measuredangle ACB = \measuredangle DHA$.



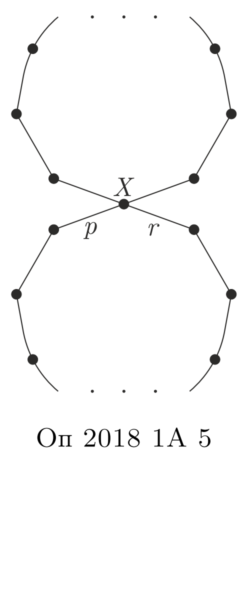
Оп 2018 1А 2

b) Очигледно, $\triangle GAD \cong \triangle HCB$ (имају подударна сва три одговарајућа угла, и $AD = CB$). Одатле следи $AG = CH$, а како су праве DG и EH паралелне и $AD = DE$, из Талесове теореме следи $AG = GH$. Коначно, из $AG = GH = HC$ следи $GH = \frac{1}{3}AC$.

3. Нађимо прво на колико се начина могу одабрати тражени одбори ако изоставимо захтев да сваки одбор мора имати бар два члана. Свака два математичара који су међусобно у свађи можемо на укупно $3 \cdot 2 = 6$ начина распоредити у три одбора (првог математичара ставимо у било који одбор, а за другог бирамо један од преостала два), те је укупан број начина 6^n. Од овог броја треба одузети одабире у којима је број чланова у неком одбору 0 или 1. Приметимо, пре свега, да може постојати највише један такав одбор (ако би два одбора била таква, у трећем бисмо имали бар $2n - 2$ чланова комисије, а пошто за $n \geqslant 3$ важи $2n - 2 > n$, неки од чланова у том одбору би били међусобно у свађи). Број одабира где је неки одбор без чланова износи $3 \cdot 2^n$ (најпре фиксирамо који од 3 одбора ће бити без чланова, а онда сваки пар математичара у свађи можемо у преостала два одбора распоредити на 2 начина). Број одабира где неки одбор има само једног члана износи $2n \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 3n \cdot 2^{n+1}$ (усамљени математичар се може изабрати на $2n$ начина, сместити у један од 3 одбора, особа са којом је у свађи у било који од преостала 2 одбора, а онда се преосталих $2n-2$ математичара може сместити на 2^{n-1} начина). Следи да је решење задатка број $6^n - 3 \cdot 2^n - 3n \cdot 2^{n+1} = 6^n - 3 \cdot 2^n(2n+1)$.

4. Нека је t број секунди протеклих од поноћи, при чему је t ненегативан реалан број. Углови које су за то време прешле секундна, минутна и сатна казаљка, редом, износе $6t$, $\frac{t}{10}$ и $\frac{t}{120}$ (изражени у степенима). Услов да секундна и минутна казаљка заклапају угао од $30°$ је $6t - \frac{t}{10} = \pm 30 + 360a$, што је еквивалентно са
$$t = \frac{300(\pm 1 + 12a)}{59};$$
услов да секундна и сатна казаљка заклапају угао од $30°$ је $6t - \frac{t}{120} = \pm 30 + 360b$, што је еквивалентно са
$$t = \frac{3600(\pm 1 + 12b)}{719};$$
услов да минутна и сатна казаљка заклапају угао од $30°$ је $\frac{t}{10} - \frac{t}{120} = \pm 30 + 360c$, што је еквивалентно са
$$t = \frac{3600(\pm 1 + 12c)}{11}$$
(где су a, b и c неки цели бројеви). По услову задатка, две од ове три једнакости морају да важе. Како су бројеви 11, 59 и 719 узајамно прости по паровима, следи да t мора бити цео број (наиме, именилац броја t мора делити нека два од ова три броја, па следи да именилац мора бити 1). Како важи једна од последње 2 једнакости, а број 3600 је узајамно прост и са 11 и са 719, следи да је t дељив са 3600. Другим речима, услови задатка се могу испунити само кад је прошао целобројан број сати, што значи да и секундна и минутна казаљка тада показују на број 12. Тада, да би се испунио услов задатка, сатна казаљка мора показивати на број 1 или 11. Следи да ће у току двадесетчетворочасовног периода 4 пута бити задовољени услови задатка: у 1.00, 11.00, 13.00 и 23.00.

5. Барон Минхаузен није у праву: из установљене чињенице не следи његов закључак. Као контрапример можемо узети ситуацију у којој из једног града полазе четири пута, а из сваког од преосталих 2017 градова по два пута, на начин који је приказан на слици. Очигледно, у таквој ситуацији јесте испуњена чињеница коју је барон установио. Одаберимо сада за p и r два пута означена на слици. Јасно, да бисмо из „горње половине“ прешли у „доњу“ (или обратно), морамо проћи путем p или r. Међутим, уколико бисмо њима пролазили непосредно једним за другим, очигледно бисмо прво ишли (једним од њих) у смеру ка граду X, а потом (другим од њих) у смеру од града X. Ово значи да смо путовање започели у доњој



Оп 2018 1А 5

половини (будући да би евентуални претходни прелазак из горње половине у доњу подразумевао пролазак путем p или r у смеру од града X), но онда, после проласка путевима p и r на описани начин, не постоји више начин да дођемо до горње половине уз поштовање описаних услова путовања. Тиме је задатак решен.

Други разред – А категорија

1. Из $\sin 2x \leqslant 1$ имамо $17-7\sin 2x > 0$ за све вредности x, па је корен с леве стране увек дефинисан. Дакле, пре квадрирања једначине треба поставити само услов $3\cos x - 5\sin x > 0$. Након квадрирања остаје $17-7\sin 2x = 9\cos^2 x + 25\sin^2 x - 30\sin x\cos x$, тј., замењујући $17 = 17\sin^2 x + 17\cos^2 x$ и пребацујући све на леву страну,

$$8\cos^2 x - 8\sin^2 x + 30\sin x\cos x - 7\sin 2x = 0.$$

Из идентитета $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ и $2\sin x\cos x = \sin 2x$ видимо да је добијена једначина еквивалентна са $8\cos 2x + 8\sin 2x = 0$. Ово даље можемо трансформисати као

$$0 = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = 8\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) = 8\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),$$

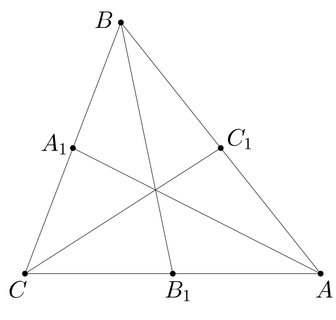
одакле следи $2x+\frac{\pi}{4} = k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Дакле, решења последње једначине су бројеви облика $x = -\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Они се могу поделити у четири класе (где у свакој класи имамо период 2π): $x=-\frac{\pi}{8}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{8}+2k\pi$, $x=\frac{7\pi}{8}+2k\pi$, $x=\frac{11\pi}{8}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Решења из друге и треће класе не испуњавају услов $3\cos x - 5\sin x > 0$ (имамо $\cos\frac{3\pi}{8} < \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\frac{3\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па $3\cos\frac{3\pi}{8} - 5\sin\frac{3\pi}{8} < -\sqrt{2} < 0$; такође, $\cos\frac{7\pi}{8} < 0$ и $\sin\frac{7\pi}{8} > 0$, па $3\cos\frac{7\pi}{8} - 5\sin\frac{7\pi}{8} < 0$). Решења из прве и четврте класе испуњавају тај услов ($\cos(-\frac{\pi}{8}) > 0$ и $\sin(-\frac{\pi}{8}) < 0$, па $3\cos(-\frac{\pi}{8}) - 5\sin(-\frac{\pi}{8}) > 0$; такође, $\cos\frac{11\pi}{8} > \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\frac{11\pi}{8} < \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, па $3\cos\frac{11\pi}{8} - 5\sin\frac{11\pi}{8} > \sqrt{2} > 0$), па само она чине решења полазне једначине. Другим речима, одговор је:

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{8}+2k\pi, \frac{11\pi}{8}+2k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

2. У оба дела задатка користићемо формулу

$$t_a^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

(и аналогно за остале тежишне дужи). Покажимо како се она изводи. Ако је A_1 средина странице BC, из косинусне теореме примењене на $\triangle AA_1B$ имамо $c^2 = t_a^2 + BA_1^2 - 2t_aBA_1\cos\measuredangle AA_1B$, а из косинусне теореме примењене на $\triangle AA_1C$ добијамо $b^2 = t_a^2 + CA_1^2 - 2t_aCA_1\cos\measuredangle AA_1C$. Сабирањем ове



Оп 2018 2А 2

две једнакости, уз примену $BA_1 = CA_1 = \frac{a}{2}$ и $\cos\measuredangle AA_1B = -\cos\measuredangle AA_1C$ (будући да су ова два угла напоредна), добијамо $b^2 + c^2 = 2t_a^2 + \frac{a^2}{2}$, одакле следи жељена формула.

a) Претпоставимо $a^2 + c^2 = 2b^2$. Тада имамо

$$t_a^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4} = \frac{4b^2 + a^2 + c^2}{4} = \frac{6b^2}{4} = \frac{3b^2}{2}$$

и

$$2t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2} = \frac{4b^2 - b^2}{2} = \frac{3b^2}{2},$$

тј. заиста важи $t_a^2 + t_c^2 = 2t_b^2$.

Обратно, уколико претпоставимо $t_a^2 + t_c^2 = 2t_b^2$, ово се своди на

$$\frac{4b^2 + a^2 + c^2}{4} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2},$$

одакле (после множења обе стране са 4 и потирања) следи $6b^2 = 3a^2 + 3c^2$, тј. $a^2 + c^2 = 2b^2$.

b) *Прво решење.* Претпоставимо $a^2 + c^2 = 2b^2$. Тада имамо

$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{2a^2 + 2c^2 - b^2} = \frac{(a^2 + c^2) + 2c^2 - a^2}{2(2b^2) - b^2} = \frac{3c^2}{3b^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

тј. $\frac{t_a}{t_b} = \frac{c}{b}$. Аналогно, $\frac{t_c}{t_b} = \frac{a}{b}$. Дакле, пошто посматрана два троугла имају два пара пропорционалних страница, следи да су они слични.

Обратно, уколико претпоставимо да су та два троугла слична, тада имамо $\frac{t_a}{t_c} = \frac{c}{a}$ (приметимо, из $a \leqslant b \leqslant c$ следи $t_a \geqslant t_b \geqslant t_c$, одакле закључујемо која страница кореспондира којој), тј. $at_a = ct_c$. Ово се даље своди на $a\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = c\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, тј. $2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 = 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4$. Пребацивањем свега на десну страну једнакости добијамо

$$0 = a^4 - c^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 = (a^2 - c^2)(a^2 + c^2) + 2b^2(c^2 - a^2) = (a^2 - c^2)(a^2 + c^2 - 2b^2).$$

Одавде следи $a = c$ или $a^2 + c^2 = 2b^2$. У другом случају задатак је решен. У првом случају, из $a = c$ и $a \leqslant b \leqslant c$ имамо $a = b = c$, па тада опет важи $a^2 + c^2 = 2b^2$. Тиме је доказ завршен.

Друго решење. Из једнакости $a^2 + c^2 = 2b^2$ добијамо сличност посматраних троуглова као у првом решењу. Претпоставимо сада да су та два троугла слична, и покажимо ову једнакост. На основу претпостављене сличности следи да постоји реалан број k такав да важи $t_c = ka$, $t_b = kb$ и $t_a = kc$. Имамо

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4},$$

па ако овде уврстимо малопређашње једнакости, добијамо $k^2c^2 + k^2b^2 + k^2a^2 = \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$, одакле следи $k^2 = \frac{3}{4}$. Сада имамо

$$\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = t_a^2 = \frac{3}{4}c^2,$$

одакле одмах следи $a^2 + c^2 = 2b^2$.

3. Посматрани бројеви су облика $\frac{10^{2k}-1}{99}$ за неки природан број k. За $k = 1$ имамо број 1, што није прост број. За $k = 2$ имамо број 101, што јесте прост број. За $k \geqslant 3$ имамо

$$\frac{10^{2k}-1}{99} = \frac{(10^k-1)(10^k+1)}{99} = \frac{\frac{10^k-1}{9}(10^k+1)}{11}.$$

Један од два чиниоца у бројиоцу мора бити дељив са 11 (јер је посматрани број природан). Ако $11 \mid 10^k + 1$, тада је $\frac{10^k-1}{9}$ фактор посматраног броја (већи од 1 и различит од самог броја), па је посматрани број сложен; ако $11 \mid \frac{10^k-1}{9}$, тада је $\frac{10^k-1}{99}$ фактор посматраног броја (већи од 1 и различит од самог броја), па је посматрани број поново сложен.

Дакле, једино решење је број 101.

4. Сабирањем свих n једначина добијамо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i + n\right),$$

што се своди на $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$. Претпоставимо, без смањења општости, да је x_1 минималан међу $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тада имамо $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. Међутим, прва једначина даје $x_2 = x_1^2 - (x_n-1)^2 \leqslant x_1^2 \leqslant x_1$, па због минималности x_1 мора бити $x_2 = x_1 = x_1^2$ и $x_n = 1$. Одатле следи $x_1 = 0$ или $x_1 = 1$. У првом случају на исти начин добијамо $x_3 = x_2 = 0$, $x_4 = x_3 = 0$ итд., тј. $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, што није решење. Остаје само случај $x_1 = 1$ и одатле опет на исти начин добијамо $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, па је то једино решење.

5. Јединичних квадрата има n^2, сваки има бар две црвене странице, што значи да парова облика

(јединични квадрат, његова црвена страница)

има бар $2n^2$. Међутим, свака црвена дуж се појављује у највише два таква пара, па црвених дужи има бар n^2.

Претпоставимо да их има тачно n^2. Тада свака од њих лежи у тачно два јединична квадрата, а сваки јединични квадрат има тачно две црвене дужи (јер би у супротном у некој од процена из претходног пасуса важила строга неједнакост, па би број црвених дужи морао бити строго већи од n^2). Обојимо јединичне квадрате црно и бело, попут шаховске табле. Свака црвена дуж је у тачно једном белом квадрату (и једном црном), а пошто сваки бели квадрат има две црвене странице, следи да белих квадрата има $\frac{1}{2}n^2$, што није цео број; контрадикција.

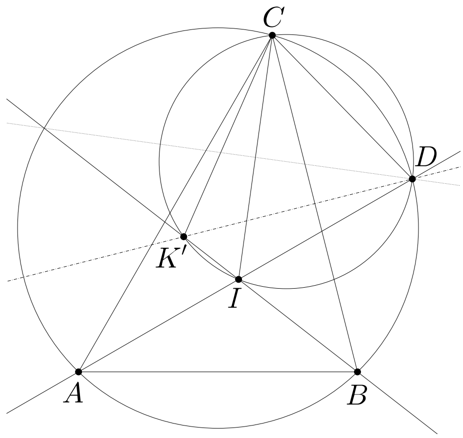
Дакле, црвених дужи има бар $n^2 + 1$. Покажимо да је могуће достићи ову вредност. Довољно је обојити све хоризонталне дужи осим оних које су на страницама великог квадрата, а вертикалне јединичне дужи које належу на две хоризонталне странице великог квадрата обојити наизменично (прву, трећу, пету...). Овако је обојено $n(n-1) + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n^2 + 1$ дужи, чиме је доказ завршен.

Трећи разред – А категорија

1. Ако x и y замене места, добијамо $f(f(xy)) = |y|f(x) + 3f(xy)$, што одузимањем од полазне једначине даје $|x|f(y) = |y|f(x)$. За $y = 1$ имамо $f(x) = f(1)|x|$. Затим за $x = y = 1$ у полазној једначини добијамо $f(f(1)) = 4f(1)$, а пошто из формуле из претходне реченице следи $f(f(1)) = f(1)|f(1)|$, спајањем последње две једнакости добијамо $f(1)|f(1)| = 4f(1)$, тј. $f(1)(|f(1)| - 4) = 0$. Одатле следи $f(1) \in \{-4, 0, 4\}$, тј. кандидати за решења су функције $f(x) \equiv 0$, $f(x) = 4|x|$ и $f(x) = -4|x|$. Прва од њих очигледно јесте решење, видимо и да друга јесте решење јер важи $|x|f(y)+3f(xy) = 4|xy|+12|xy| = 16|xy| = f(f(xy))$, а слично и $f(x) = -4|x|$ јесте решење.

2. Познато је да важи $DC = DI$. Заиста, ако углове троугла означимо уобичајено са α, β и γ, имамо $\measuredangle ICD = \measuredangle ICB + \measuredangle BCD = \measuredangle ICB + \measuredangle BAD = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ICA + \measuredangle IAC = \measuredangle DIC$, тј. $DI = DC$.

Нека BI сече симетралу странице BC у тачки K'. Доказаћемо $K' \equiv K$, што је довољно за решење задатка јер по избору тачке K' важи $BK' = CK'$. Како имамо $\measuredangle IK'D = \measuredangle BK'D = \measuredangle CK'D$, тачка D је пресек симетрале $\measuredangle IK'C$ и симетрале дужи IC (подсетимо се, $DI = DC$), а познато је да тај пресек лежи на кружници описаној око $\triangle IK'C$. Дакле, тачке I, K', C и D су концикличне; одатле, K' лежи на кружници описаној око $\triangle CDI$, па следи $K' \equiv K$.



Оп 2018 3А 2

3. Нека су дужине странице тог троугла a, b и c, а његова површина P. Можемо претпоставити, без умањења општости, $a \leqslant b \leqslant c$. Тада је b аритметичка средина a и c, па из $b = \frac{a+c}{2}$ добијамо $c = 2b - a$. Сада из $a + P = b + c$ добијамо $P = b+c-a = b+(2b-a)-a = 3b-2a$. Изразићемо површину троугла помоћу Херонове формуле. Имамо $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$, $s - a = \frac{3b}{2} - a$, $s - b = \frac{b}{2}$ и $s - c = a - \frac{b}{2}$, па следи

$$3b - 2a = P = \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - a\right)\frac{b}{2}\left(a - \frac{b}{2}\right)} = \frac{b}{4}\sqrt{3(3b-2a)(2a-b)}.$$

Квадрирањем обе стране добијамо $16(3b - 2a)^2 = 3b^2(3b - 2a)(2a - b)$, што се своди на $16(3b - 2a) = 3b^2(2a - b)$ (можемо скратити са $3b - 2a$ јер из $b \geqslant a$ следи $3b - 2a > 0$), тј. $48b - 32a = 6ab^2 - 3b^3$. Уочавамо да је $3b^3$ паран број (јер су сви остали сабирци парни), па следи да је и b паран број, тј. $b = 2b'$. Последња једнакост се своди на $96b' - 32a = 24ab'^2 - 24b'^3$, тј., после дељења са 8, $12b' - 4a = 3ab'^2 - 3b'^3$. Одавде можемо изразити

$$a = \frac{3b'^3 + 12b'}{3b'^2 + 4} = \frac{3b'^3 + 4b' + 8b'}{3b'^2 + 4} = b' + \frac{8b'}{3b'^2 + 4}.$$

Како је a цео број, добијамо $3b'^2+4 \mid 8b'$, а одатле $3b'^2+4 \leqslant 8b'$. Једнакост се достиже за $b' = \frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot3\cdot4}}{6} = \frac{8\pm4}{6}$, тј. за $b' = \frac{2}{3}$ и $b' = 2$, па посматрана неједнакост важи за $b' \in [\frac{2}{3}, 2]$. Једини природни бројеви у овом интервалу су $b' = 1$ и $b' = 2$. За $b' = 1$ имамо $a = 1 + \frac{8}{7}$, што није природан број, па се овде не добија решење. За $b' = 2$ имамо $a = 2 + \frac{16}{3\cdot4+4} = 2+1 = 3$, $b = 2b' = 4$, $c = 2b-a = 2\cdot4-3 = 5$ и $P = 3b-2a = 3\cdot4-2\cdot3 = 6$, што је јединствено решење задатка.

4. Прво покажимо да је могуће обићи таблу у $n(2n+1)+2n = 2n^2+3n$ потеза. Овај број потеза се може постићи ако паук дуж сваке колоне иде вертикално два поља све док је не обиђе целу, онда се помери хоризонтално једно поље до следеће колоне и понавља поступак до краја табле. Сада покажимо да је ово најмањи могућ број потеза. Обојимо сва поља у непарним врстама у црно. Видимо да у сваком потезу скуп новообиђених поља може садржати највише једно црно поље. Укупан број необиђених црних поља на почетку (дакле, сва црна поља осим почетног) једнак је $(n+1)(2n+1)-1 = 2n^2+3n$, те следи да је управо толико минимално потеза потребно пауку да обиђе сва поља.

5. а) *Прво решење.* Познато је да тројка (a,b,c) чини примитивну Питагорину тројку ако и само ако постоје узајамно прости природни бројеви m и n различите парности такви да важи $a = m^2-n^2$, $b = 2mn$ и $c = m^2+n^2$ (уз могуће замењене улоге за a и b). Одатле, један од бројева a и b је паран а други непаран, па се они завршавају различитим цифрама. Дакле, под претпоставком да се a, b и c могу записати користећи само две различите цифре, следи да се c мора завршавати истом цифром као један од бројева a или b. Сада из $a^2+b^2=c^2$ следи да се неки од бројева a^2, b^2 или c^2 мора завршавати цифром 0, па се одатле и један од бројева a, b или c завршава цифром 0, тј. 0 је једна од две цифре које се (по претпоставци) користе у запису ова три броја. Кад би друга цифра била x, $x>1$, следило би да су сва три броја дељива са x, те да нису узајамно проста; дакле, те две цифре морају бити 0 и 1.

То значи да можемо записати $a = \sum_{i=1}^{n_1} 10^{a_i}$, $b = \sum_{i=1}^{n_2} 10^{b_i}$ и $c = \sum_{i=1}^{n_3} 10^{c_i}$, где су a_i, b_i и c_i ненегативни цели бројеви, индексирани у растућем поретку. Тада имамо $a^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n_1} 10^{a_i+a_j}$ и аналогно за b^2 и c^2. Најмањи сабирци у бројевима a^2, b^2 и c^2, редом, јесу 10^{2a_1}, 10^{2b_1} и 10^{2c_1}, те, не умањујући општост, морамо имати $a_1 = c_1$. Докажимо индукцијом да за све i важи $a_i = c_i$ (одатле ће следити $a = c$, контрадикција). Базу смо управо показали. Претпоставимо сада да за све i, $1 \leqslant i \leqslant k$, важи $a_i = c_i$, и докажимо $a_{k+1} = c_{k+1}$. Из претпоставке следи да се сви сабирци у a^2 облика $10^{a_i+a_j}$ за $i,j \leqslant k$ потиру с одговарајућим сабирцима у c^2. Од преосталих сабирака, најмањи у a^2 је $2\cdot10^{a_1+a_{k+1}}$, најмањи у b^2 је 10^{2b_1}, а најмањи у c^2 је $2\cdot10^{c_1+c_{k+1}}$. Како се 10^{2b_1} појављује само једном у b^2, он сам не може потрети $2\cdot10^{c_1+c_{k+1}}$, па остаје $2\cdot10^{a_1+a_{k+1}} = 2\cdot10^{c_1+c_{k+1}}$, тј. $a_{k+1} = c_{k+1}$, што је и требало доказати.

Друго решење. Као у првом решењу, добијамо да се a, b и c састоје од цифара 0 и 1, и да се (без умањења општости) a и c завршавају цифром 1, а b се завршава цифром 0. Можемо записати $b^2 = c^2-a^2 = (c-a)(c+a)$. Претпоставимо да се a и c поклапају на тачно првих t цифара здесна (важи

$t \geqslant 1$, јер се оба броја завршавају цифром 1). Тада се $c+a$ завршава цифром 2, а $c-a$ се завршава са t нула, лево од којих је цифра 1 или 9. Дакле, прва ненула цифра здесна у производу $(c-a)(c+a)$ износи 2 или 8. Међутим, како је овај производ једнак b^2, а прва ненула цифра здесна у броју b^2 износи 1 (јер прва ненула цифра здесна у броју b износи 1), овим смо добили контрадикцију. Тиме је доказано да таква тројка (a, b, c) не постоји.

b) Поново ћемо користити карактеризацију примитивних Питагориних тројки с почетка дела а). У тој карактеризацији узмимо $n = 5l$ и $m = 5l + 1$. Тада добијамо $a = 10l + 1$, $b = 10l(5l + 1)$ и $c = 10l(5l + 1) + 1$. Следи да је довољно наћи l такво да се и l и $l(5l+1)$ могу исписати цифрама $\{0, 1, 5\}$. Ако узмемо $l = 10^s$ за произвољно $s \in \mathbb{N}$, тада имамо $5l + 1 = 5 \cdot 10^s + 1$, па следи $l(5l + 1) = 5 \cdot 10^{2s} + 10^s$, те се за бесконачно много s може направити жељена Питагорина тројка.

Напомена. Још неки примери примитивних Питагориних тројки које се састоје само од три различите цифре су $(2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1,\ 2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}2\underbrace{00\ldots00}_{k},\ 2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1)$ и $(\underbrace{33\ldots33}_{k},\ \underbrace{55\ldots55}_{k-1}\underbrace{44\ldots44}_{k},\ \underbrace{55\ldots55}_{k-1}\underbrace{44\ldots44}_{k-1}5)$ за ма које $k \in \mathbb{N}$.

Четврти разред – А категорија

1. *Прво решење.* Пре свега, имамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin kx}{\cos kx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{kx} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{k}{\cos kx} = 1 \cdot k = k.$$

Даље, имамо и $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, па добијамо да за $k > 1$ важи $\lim_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} kx}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \infty$, а за $0 \leqslant k < 1$ важи $\lim_{x\to 0}(\frac{\operatorname{tg} kx}{x})^{\frac{1}{x^2}} = 0$. Преостаје случај $k = 1$. Тада посматрани израз трансформишемо на следећи начин:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - x}{x} \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}}.$$

Приметимо да за $x \to 0$ имамо $\frac{\operatorname{tg} x - x}{x} \to 0$ (због виђеног $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$), па је израз у спољним заградама облика $(1 + t)^{\frac{1}{t}}$ за $t \to 0$, и његов лимес је e. Према томе, даље можемо рачунати:

$$\lim_{x\to 0} \left(\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}} = \left(\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}},$$

па преостаје још израчунати $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. Примењујући Лопиталово правило (два пута), добијамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^{-3} x}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Дакле, решење задатка је:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}kx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\begin{cases}0, & \text{за } 0\leqslant k<1;\\ e^{\frac{1}{3}}, & \text{за } k=1;\\ \infty, & \text{за } k>1.\end{cases}$$

Друго решење. Радимо само случај $k=1$ (остатак иде као у претходном решењу). Можемо записати

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(e^{\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}},$$

па је довољно израчунати $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}$. Ово спроводимо на следећи начин (примењујемо Лопиталово правило свугде где је назначено $\overset{\text{л. п.}}{=}$):

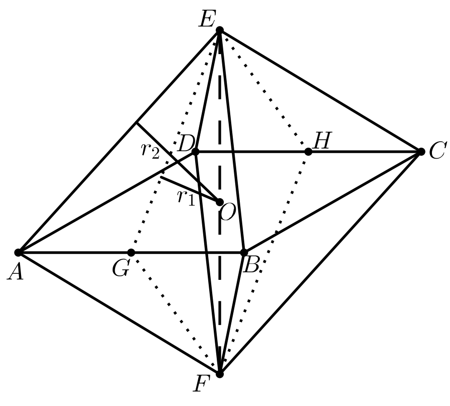
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\operatorname{tg}x}{x}}{x^2}\overset{\text{л. п.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos^2 x}x-\operatorname{tg}x}{x^2}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}x}{2x^2\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}}{2x^2\frac{\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x\cos x}{2x^2\sin x\cos x}=\lim_{x\to}$$

$$\overset{\text{л. п.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\overset{\text{л. п.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2\sin 2x+4x\cos 2x+4x\cos 2x-4x^2\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 2x+4x\cos 2x-2x^2\sin 2x}\overset{\text{л. п.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{2\cos 2x+4\cos 2x-8x\sin 2x-4x\sin 2x-4x}$$

па добијамо исти резултат као у претходном решењу.

2. Нека су G и H средишта страница AB и CD, и O центар квадрата $ABCD$. Нека су r_1 и r_2 полупречници две лопте. Тада су r_1 и r_2, респективно, полупречници кружница уписаних у четвороуглове $FGEH$ и $FAEC$. Обележимо $OG=a$, $OA=a'=a\sqrt{2}$, $OE=b$ и $OF=b'$. Заједнички центар S две посматране лопте се налази на дужи EF, и притом је GS симетрала $\measuredangle EGF$, а AS симетрала $\measuredangle EAF$ (јер је S уједно центар кружница уписаних у $FGEH$ и $FAEC$). Одатле следи $\frac{EG}{FG}=\frac{ES}{FS}=\frac{EA}{FA}$, одакле добијамо $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b'^2}}=\frac{\sqrt{a'^2+b^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$, а што се (унакрсним множењем) своди на $\sqrt{a'^2a^2+a'^2b'^2+b^2a^2+b^2b'^2}=\sqrt{a'^2a^2+a'^2b^2+b'^2a^2+b'^2b^2}$, тј. $a'^2b'^2+b^2a^2=a'^2b^2+b'^2a^2$, а ово је еквивалентно са $(a'^2-a^2)(b'^2-b^2)=0$. Како важи $a'\neq a$, из претходне једнакости следи $b'=b$, а одатле добијамо $S\equiv O$. Сада имамо $r_1=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $r_2=\frac{a'b}{\sqrt{a'^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{2a^2+b^2}}$ (што смо добили рачунајући висине из



Оп 2018 4А 2

O у $\triangle EOG$ и $\triangle EOA$ с правим углом у темену O). Из услова задатка имамо $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, тј. $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{2+2(\frac{b}{a})^2}{2+(\frac{b}{a})^2}}$, а одавде добијамо $6+3(\frac{b}{a})^2 = 4+4(\frac{b}{a})^2$, тј. коначно $\frac{EF}{AB} = \frac{b}{a} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$.

3. Означимо са $A_i(n)$, $i \in \{1,2,3,4\}$, број начина да Перица крене са i-тог спрата, направи n корака и заврши на последњем спрату. Тражени број је $B_n = \sum_{i=1}^{4} A_i(n)$. Директно израчунавамо $B_0 = \sum_{i=1}^{4} A_i(0) = 0+0+0+1 = 1$ и $B_1 = \sum_{i=1}^{4} A_i(1) = 0+0+1+0 = 1$. Даље, јасно је да за свако $n > 1$ важи

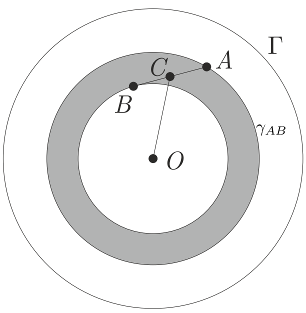
$$\begin{aligned} A_1(n) &= A_2(n-1), \\ A_2(n) &= A_1(n-1) + A_3(n-1), \\ A_3(n) &= A_2(n-1) + A_4(n-1), \\ A_4(n) &= A_3(n-1), \end{aligned}$$

па добијамо

$$\begin{aligned} B_n = \sum_{i=1}^{4} A_i(n) &= A_2(n-1) + (A_1(n-1) + A_3(n-1)) + (A_2(n-1) + A_4(n-1)) + A_3(n-1) \\ &= A_2(n-1) + A_3(n-1) + \sum_{i=1}^{4} A_i(n-1) \\ &= (A_1(n-2) + A_3(n-2)) + (A_2(n-2) + A_4(n-2)) + \sum_{i=1}^{4} A_i(n-1) \\ &= \sum_{i=1}^{4} A_i(n-1) + \sum_{i=1}^{4} A_i(n-2) = B_{n-1} + B_{n-2}. \end{aligned}$$

Дакле, из $B_0 = 1 = F_1$, $B_1 = 1 = F_2$ и одговарајуће рекурентне везе за Фибоначијеве бројеве, имамо $B_n = F_{n+1}$.

4. Бројеви ap за $-\frac{q-1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{q-1}{2}$ дају различите остатке при дељењу са q, па један од њих даје остатак 1: нека је то $ap = bq + 1$. Бројеви $|ap|$ и $|bq|$ су узастопни и мањи од $\frac{1}{2}pq < p^2$ (а тиме и од q^2), па су њихови највећи прости делиоци управо p и q, редом.



Оп 2018 4А 5

5. Нека је AB једна од датих дужи d. При ротацији око центра O круга Γ, дуж AB описује кружни прстен γ_{AB}. Нека је C средина дужи AB и узмимо, без смањења општости, $\angle OCA \geqslant 90^\circ$. Тада имамо $OA^2 - OC^2 \geqslant AC^2 = \frac{1}{4}AB^2$, па је површина прстена γ_{AB} бар $\frac{1}{4}AB^2\pi$.

Ако су дужине датих дужи $d_1, d_2, \ldots, d_n$, из претходног следи да збир површина њима одговарајућих прстена није мањи од $\frac{\pi}{4}(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2) \geqslant \frac{\pi}{4n}(d_1 + \cdots + d_n)^2 = \pi$ (користили смо неједнакост између квадратне и аритметичке средине), што је површина круга Г. Према томе, бар два прстена се секу, што значи да постоји кружница с центром O која сече њима кореспондентне две дужи.

Први разред – Б категорија

1. Како су мерни бројеви углова три проста броја, а њихов збир је $180°$, не могу сва три броја бити непарна, па следи да један угао мора износити $2°$. Сада за средњи по величини угао испробавамо просте бројеве, редом, и испитујемо када ће и вредност преосталог угла бити прост број. Налазимо следећа решења: $\{2°, 5°, 173°\}$, $\{2°, 11°, 167°\}$, $\{2°, 29°, 149°\}$, $\{2°, 41°, 137°\}$, $\{2°, 47°, 131°\}$, $\{2°, 71°, 107°\}$ и $\{2°, 89°, 89°\}$.

2. Миљан треба да окрене карте на којима су самогласници: *А*, *Е*, *А*, *И*, *А*, и увери се да је с друге стране паран број. Такође треба да окрене и карту на којој је број *1* и увери се да је с друге стране сугласник (ако би с друге стране био самогласник, та карта би представљала контрапример за Владино тврђење). Дакле, треба да окрене најмање 6 карата.

3. Приметимо да важи $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12} \neq \frac{2018}{1301}$. Дакле, посматрани бројеви нису $1, 2, 3, 4$, па имамо $a, b, c, d \geqslant 2$. Но, тада важи

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{30+20+15+12}{60} = \frac{77}{60} = \frac{1925}{1500} < \frac{2013}{1301}.$$

Дакле, такви бројеви a, b, c и d не постоје.

4. Тражени скуп записаћемо као унију четири повезана осенчена дела. Тиме добијамо решење:

$$\Big((A \cap B) \setminus (D \cup E \cup C)\Big) \cup \Big(((A \cap C) \setminus (B \cup F)\Big) \cup \Big((E \cap C) \setminus A\Big) \cup \Big(F \setminus (A \cup B)\Big).$$

5. У речи *МАШТОВИТ* свако слово сем T се јавља тачно једном (T се јавља 2 пута) и представља једну од цифара из скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, па је збир цифара броја *МАШТОВИТ* једнак $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + T = 28 + T$. Даље, како је број *МАШТОВИТ* непаран, T мора бити непарна цифра, а како је број *МАШТОВИТ* дељив са 3, и његов збир цифара $28 + T$ мора бити дељив са 3, па следи $T = 5$.

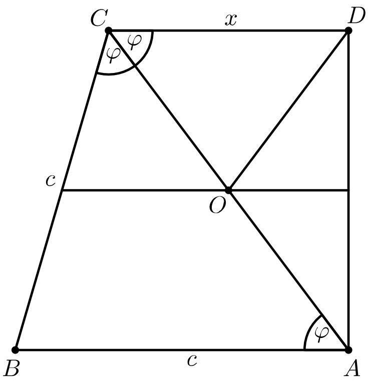
Сви сугласници представљају цифре исте парности, па добијамо да су и M, $Ш$ и B непарне цифре (јер је $T = 5$ непарна цифра), тј. $M, Ш, B \in \{1, 3, 7\}$, а како смо утрошили све непарне цифре, онда самогласници представљају парне цифре, тј. $A, O, И \in \{2, 4, 6\}$. Како различита слова представљају различите цифре, то $M, Ш, B$ можемо одредити из скупа $\{1, 3, 7\}$ на $3! = 6$ начина, као и $A, O, И$ из скупа $\{2, 4, 6\}$ такође на $3! = 6$ начина, па укупно таквих бројева има $6 \cdot 6 = 36$.

Други разред – Б категорија

1. Из другог услова следи да је X подскуп скупа $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Из првог услова следи да он мора садржати бројеве 6, 7 и 8, као и да не сме садржати бројеве 9 и 10. Из другог услова следи да он мора садржати бројеве 1, 2 и 3. Дакле, преостају још бројеви 4 и 5, за које можемо произвољно одабрати да ли да буду или да не буду у скупу X. Према томе, постоје четири таква скупа: $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,4,6,7,8\}$ и $\{1,2,3,6,7,8\}$.

2. Дељењем задата два полинома добијамо количник $x+a$ и остатак $2x(b-a^2)+(c-ab)$. Како остатак мора бити 0 (јер је први полином дељив другим), следи $b-a^2=0$ и $c-ab=0$, тј. $b=a^2$ и $c=ab=a^3$. Дакле, први полином износи $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$, тј. $(x+a)^3$, а други $x^2+2ax+a^2$, тј. $(x+a)^2$.

3. Нека су у A и D прави углови тог трапеза, AB већа основица, CD мања. По услову задатка имамо $\measuredangle ACB=\measuredangle ACD=\varphi$, а одатле следи $\measuredangle CAB=\measuredangle ACD=\varphi$, као наизменични углови. Дакле, $\triangle ABC$ је једнакокрак, тј. $AB=BC=c$. Нека је O пресек средње линије трапеза са дијагоналом AC; дакле, O је средиште AC. Како је $\triangle ADC$ правоугли, то имамо $OD=OA=OC=\frac{AC}{2}=30$. Пошто је и $\triangle OCD$ једнакокрак са углом на основици φ, имамо $\triangle ABC\sim\triangle DOC$. Ако означимо $CD=x$, добијамо пропорцију $\frac{60}{c}=\frac{x}{30}$, одакле следи $cx=1800$. Даље, имамо и $c+x=AB+CD=2\cdot 43=86$, па важи $c=86-x$, и уврштавањем овога у претходну једначину добијамо $(86-x)x=1800$, тј. $x^2-86x+1800=0$. Решавањем ове једначине израчунавамо $x_{1/2}=\frac{86\pm\sqrt{86^2-4\cdot1800}}{2}=\frac{86\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{86\pm14}{2}$, тј. $x=36$ и $c=86-x=50$ (одбацујемо друго решење: $x=50$ и $c=36$, јер треба да важи $c>x$). Дакле, имамо $AB=BC=50$, $CD=x=36$, и из Питагорине теореме рачунамо $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{60^2-36^2}=\sqrt{3600-1296}=\sqrt{2304}=48$.



Оп 2018 2Б 3

4. За $p=5$ имамо $4p^2+1=101$ и $6p^2+1=151$, и ови бројеви су заиста прости. Претпоставимо сада $p\neq5$. Тада имамо $p\equiv\pm1 \pmod 5$ или $p\equiv\pm2 \pmod 5$. У првом случају добијамо $4p^2+1\equiv4\cdot(\pm1)^2+1=5\equiv0 \pmod 5$, тј. број $4p^2+1$ је дељив са 5, а како је он очигледно већи од 5, мора бити сложен. У другом случају добијамо $6p^2+1\equiv6\cdot(\pm2)^2+1=25\equiv0 \pmod 5$, па је тада број $6p^2+1$ сложен. Дакле, једино решење је $p=5$.

5. Пре свега, имамо услов $x\neq3$, јер лева страна није дефинисана за $x=3$.

За $x>3$ израз $\frac{3}{|x-3|}-1$ се своди на $\frac{3}{x-3}-1$, што је негативно за $x-3>3$, тј. $x>6$, а ненегативно за $3<x\leqslant6$. За $x<3$ израз $\frac{3}{|x-3|}-1$ се своди на $\frac{3}{3-x}-1$, што је негативно за $3-x>3$, тј. $x<0$, а ненегативно за $0\leqslant x<3$. Имајући још у виду да, због израза $|x-2|$, морамо разликовати случајеве $x\geqslant2$ и $x<2$, решавање делимо на следећих пет случајева:

- $x>6$:

  Постављена неједначина се своди на $2(x-2)-(1-\frac{3}{x-3})\geqslant1$, тј. $2x-6+\frac{3}{x-3}\geqslant$

0, а што се другачије може записати као $\frac{2(x-3)^2+3}{x-3} \geqslant 0$, и очигледно је испуњено увек.

- $3 < x \leqslant 6$:
Постављена неједначина се своди на $2(x-2)-(\frac{3}{x-3}-1) \geqslant 1$, тј. $2x-4-\frac{3}{x-3} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-10x+9}{x-3} \geqslant 0$. Функција $2x^2 - 10x + 9$ има нуле у тачкама $x_{1/2} = \frac{10\pm\sqrt{100-72}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$, па је ненегативна за $x \leqslant \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ и $x \geqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$. У пресеку с условом $3 < x \leqslant 6$, овде добијамо решења $x \in [\frac{5+\sqrt{7}}{2}, 6]$.
- $2 \leqslant x < 3$:
Постављена неједначина се своди на $2(x-2) - (\frac{3}{3-x} - 1) \geqslant 1$, тј. $2x - 4 - \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{-2x^2+10x-15}{3-x} \geqslant 0$. Функција $-2x^2 + 10x - 15$ има негативну дискриминанту $(100 - 120 = -20 < 0)$, а како је коефицијент уз водећи члан негативан, овде нема решења.
- $0 \leqslant x < 2$:
Постављена неједначина се своди на $2(2-x) - (\frac{3}{3-x} - 1) \geqslant 1$, тј. $4 - 2x - \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-10x+9}{3-x} \geqslant 0$. Функција $2x^2 - 10x + 9$ је ненегативна (како је већ виђено) за $x \leqslant \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ и $x \geqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$. У пресеку с условом $0 \leqslant x < 2$, овде добијамо решења $x \in [0, \frac{5-\sqrt{7}}{2}]$.
- $x < 0$:
Постављена неједначина се своди на $2(2-x)-(1-\frac{3}{3-x}) \geqslant 1$, тј. $2-2x+\frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-8x+9}{3-x} \geqslant 0$, тј. $\frac{2(x-2)^2+1}{3-x} \geqslant 0$, и очигледно је испуњено увек.

Дакле, сумирајући све, решење неједначине је:

$$x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \infty\right).$$

Трећи разред – Б категорија

1. Факторишимо број 2018 на просте чиниоце: $2018 = 2 \cdot 1009$. Како је израз на левој страни постављене једначине једнак $p(6 + 7q + 8qr + 9qrs)$, и како је p прост број, могуће је $p = 2$ или $p = 1009$. Други случај отпада, јер би тада израз у загради морао бити једнак 2, а он је очигледно већи од 2. Дакле, остаје $p = 2$. Тада имамо $6 + 7q + 8qr + 9qrs = 1009$, што се своди на $q(7 + 8r + 9rs) = 1003 = 17 \cdot 59$. Одавде следи $q = 17$ (немогуће је $q = 59$ јер је израз у загради већи од 17). Даље добијамо $7 + 8r + 9rs = 59$, што се своди на $r(8 + 9s) = 52 = 2^2 \cdot 13$. Одавде следи $r = 2$ (немогуће је $r = 13$ јер је израз у загради већи од 4). Коначно, преостаје $8 + 9s = 26$, што се своди на $9s = 18$, па добијамо $s = 2$.

Дакле, једино решење је: $(p, q, r, s) = (2, 17, 2, 2)$.

2. а) Да би сва три логаритма била дефинисана, морају важити услови $3^x - 1 > 0$, $9^x - 3^{x+1} + 2 > 0$ и $3 - 3^x > 0$. Прва неједначина се своди на $3^x > 1$, тј. $x > 0$; трећа неједначина се своди на $3^x < 3$, тј. $x < 1$. Да бисмо решили другу, уведимо смену $3^x = t$. Тада се друга неједначина своди на $t^2-3t+2 > 0$, тј. $(t-1)(t-2)>0$, и њено решење је $t\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$, а враћањем смене $t=3^x$ добијамо $x\in(-\infty,0)\cup(\log_3 2,\infty)$. Узимајући пресек сва три добијена услова за x закључујемо да су сва три логаритма дефинисана за $x\in(\log_3 2,1)$.

b) Постављена једначина се своди на

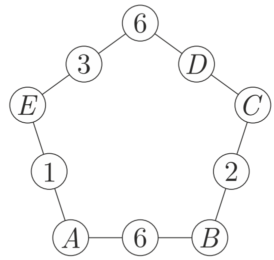
$$\log_2(3^x-1)+\log_2(3-3^x)=2\log_4(9^x-3^{x+1}+2),$$

тј.

$$\log_2((3^x-1)(3-3^x))=\log_{2^2}(9^x-3^{x+1}+2)^2.$$

Десна страна једнакости је заправо $\log_2(9^x-3^{x+1}+2)$, па након ослобађања од логаритама и увођења смене $t=3^x$ преостаје још решити једначину $(t-1)(3-t)=(t-1)(t-2)$, где смо за десну страну искористили факторизацију раније добијену у делу под а). Ово се даље своди на $0=(t-1)((t-2)-(3-t))=(t-1)(2t-5)$, што има решења $t=1$ и $t=\frac{5}{2}$. Прво решење даје $x=0$, што одбацујемо јер не припада области дефинисаности. Друго решење даје $x=\log_3\frac{5}{2}$, и ова вредност заиста испуњава добијена ограничења ($\log_3 2<\log_3\frac{5}{2}<1$), па је то и једино решење постављене једначине.

3. Означимо са A, B, C, D и E преосталих пет бројева које Марко треба да упише, као на слици.



Оп 2018 3Б 3

Како збирови на свакој страници петоугла треба да су једнаки, имамо да важи:

$$A+6+B=B+2+C=C+D+6=6+3+E=A+1+E,$$

где $A,B,C,D,E\in\{1,2,3,\ldots,99\}$. Из једнакости $6+3+E=A+1+E$ добијамо $A=8$. Из једнакости $A+6+B=B+2+C$ добијамо $C=A+4=12$. Преостаје још $B+2+C=C+D+6=6+3+E$, што се своди на $14+B=18+D=9+E$, одакле добијамо $B=D+4$ и $E=D+9$. Дакле, одабиром броја D јединствено су одређени и B и E, а из $1\leqslant D<B<E\leqslant 99$ следи $1\leqslant D\leqslant 90$ и било коју од ових вредности можемо одабрати за D. Дакле, Марко може попунити бројеве на 90 начина.

4. Обележимо поља уређеним паровима (i,j), $1\leqslant i\leqslant 3$, $1\leqslant j\leqslant 2$, где нумеришемо слева надесно и одоздо нагоре (дакле, доње лево поље има координате $(1,1)$, а горње десно $(3,2)$).

Претпоставимо прво да је Анђелија уписала слово С у поље $(2,1)$. Приметимо сада: уколико би уписала слово Р у поље $(2,2)$, и потом слово Б уписала у једно од два поља лево, тада слово И мора уписати у друго од та два поља лево, но онда остаје без могућности за слово Ј, тј. не може успешно попунити таблицу; аналогно закључујемо и ако слово Б упише у једно од два поља десно. Дакле, уколико упише слово Р у поље $(2,2)$, тада никако не може попунити таблицу до краја. Претпоставимо сада да је уписала слово Р у једно од поља $(1,1)$ или $(1,2)$ (две могућности). Тада за слово Б има избор између другог од та два поља или пак поља $(2,2)$. У другом случају примећујемо да, без обзира на то где упише слово И, не може попунити таблицу до краја. Према томе, слово Б мора уписати у преостало од поља $(1,1)$ или $(1,2)$ (једнозначно одређено), а затим и за слово И остаје слободно само поље $(2,2)$, и коначно, за слова Ј и А може бирати којим ће редоследом искористити поља $(3,1)$ и $(3,2)$ (две могућности). Дакле, закључимо, уколико упише слово Р у једно од поља $(1,1)$ или $(1,2)$, има укупно 4 начина да попуни таблицу. Аналогно, уколико упише слово Р у једно од поља $(3,1)$ или $(3,2)$, има укупно 4 начина да попуни таблицу. Све заједно, израчунали смо следеће: уколико Анђелија упише слово С у поље $(2,1)$, има укупно 8 начина да попуни таблицу.

Аналогно, уколико Анђелија упише слово С у поље $(2,2)$, има укупно 8 начина да попуни таблицу.

Претпоставимо сада да је Анђелија уписала слово С у поље $(1,1)$. Уколико слово Р упише у поље $(1,2)$, тада слово Б мора уписати у једно од два поља у средњој колони, а преостала три поља може искористити произвољним редоследом; то укупно даје $2 \cdot 3! = 12$ начина. Претпоставимо сада да је Андјелија слово Р уписала у једно од поља $(2,1)$ или $(2,2)$ (две могућности). Тада, уколико слово Б упише у друго од та два поља, примећујемо да, без обзира на то где упише слово И, не може попунити таблицу до краја. Дакле, слово Б може да упише или у поље $(1,2)$, или у једно од два поља у десној колони. У првом случају за слово И има једнозначно одређено поље у средњој колони, и коначно, за слова Ј и А може бирати којим ће редоследом искористити поља $(3,1)$ и $(3,2)$ (две могућности); у другом случају (Б у једно од два поља у десној колони – две могућности) заправо примећујемо да постоји јединствен начин да се таблица попуни до краја (редослед: преостало поље у десној колони, преостало поље у средњој колони, преостало поље у левој колони). Дакле, има укупно $2+2=4$ могућности да доврши попуњавање таблице од слова Б надаље, тј. укупно $2 \cdot 4 = 8$ могућности да попуни таблицу уколико је слово Р на једном од поља $(2,1)$ или $(2,2)$. Све заједно, израчунали смо следеће: уколико Анђелија упише слово С у поље $(1,1)$, има укупно $12+8=20$ начина да попуни таблицу.

Аналогно, уколико Анђелија упише слово С у неко од преостала три угаона поља, има 20 начина да попуни таблицу. Према томе, укупан резултат је: $2 \cdot 8 + 4 \cdot 20 = 96$ начина.

5. Свака страна тетраедра је троугао, и дужине страница сваког од тих троуглова морају испуњавати неједнакост троугла. То значи $AC+CB > AB = 41$ и $AD + DB > AB = 41$. Одатле добијамо $AC + CB + AD + DB > 82$. Ово значи да обе ивице 27 и 36 морају бити међу AC, CB, AD или DB (заиста, ако то не би било испуњено, тада би збир $AC + CB + AD + DB$ износио $7 + 13 + 18 + 27$ или $7 + 13 + 18 + 36$, тј. 65 или 74, што није веће од 82). Притом, не могу обе те ивице истовремено бити странице $\triangle ABC$ односно $\triangle ABD$, јер би тада у другом троуглу страница $AB = 41$ морала бити мања од збира друге две, а тај збир би износио највише $13 + 18 = 31$, контрадикција. Дакле, у, без умањења општости, $\triangle ABC$ једна страница има дужину 27, и нека је то, поново без умањења општости, AC, а тада у $\triangle ABD$ једна страница има дужину 36. У $\triangle ABC$ мора важити $BC > AB - AC = 41 - 27 = 14$, па је једина преостала могућност $BC = 18$. Сада, уколико би важило $BD = 36$, из $\triangle BCD$ имали бисмо $CD > BD - BC = 36 - 18 = 18$, а ово је немогуће јер нема више „слободних“ ивица дужине веће од 18. Дакле, у $\triangle ABD$ не може страница BD имати дужину 36, па остаје $AD = 36$. Коначно, из $\triangle ACD$ добијамо $CD > AD - AC = 36 - 27 = 9$, па је једина преостала могућност

$CD = 13$.

Четврти разред – Б категорија

1. На основу идентитета $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ можемо факторисати леву страну, и тиме нам остаје једначина

$$(2x-4)((x-7)^2 - (x-7)(x+3) + (x+3)^2) = 278(x-2).$$

Једно решење је очигледно $x_1 = 2$. Остала решења потражићемо после скраћивања обе стране са $2(x-2)$: на левој страни тада остаје $(x^2 - 14x + 49) - (x^2 - 4x - 21) + (x^2 + 6x + 9) = x^2 - 4x + 79$, а на десној остаје 139. Дакле, треба још решити квадратну једначину $x^2 - 4x - 60 = 0$, а њена решења су $x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+240}}{2} = \frac{4 \pm 16}{2} = 2 \pm 8$, тј. $x_2 = -6$ и $x_3 = 10$.

2. Приметимо да за $x \to 0^+$ имамо $\frac{2018}{x} \to \infty$. Како за $0 \leqslant a < 1$ израз $\frac{a+2018^x}{2}$ у околини тачке $x = 0$ узима вредности из интервала $(0,1)$, из тога и претходне реченице имамо да је тада тражени лимес једнак 0; слично, за $a > 1$ израз $\frac{a+2018^x}{2}$ у околини тачке $x = 0$ узима вредности веће од 1, па је тада тражени лимес једнак ∞. Остаје једино случај $a = 1$. Тада имамо:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1+2018^x}{2}\right)^{\frac{2018}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\ln\frac{1+2018^x}{2}}\right)^{\frac{2018}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2018(\ln(1+2018^x)-\ln 2)}{x}} = e^{2018\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2018^x)-}{x}}$$

па преостаје још израчунати $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2018^x)-\ln 2}{x}$. Применом Лопиталовог правила добијамо

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2018^x)-\ln 2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+2018^x}(2018^x \ln 2018)}{1} = \frac{\ln 2018}{2}.$$

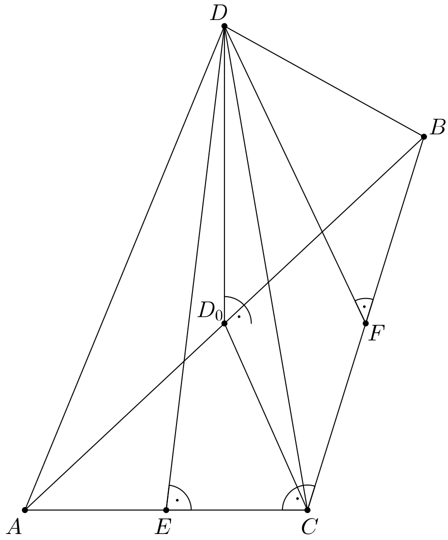
Дакле, решење задатка је:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a+2018^x}{2}\right)^{\frac{2018}{x}} = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leqslant a < 1; \\ e^{\frac{2018\ln 2018}{2}}, & \text{за } a = 1; \\ \infty, & \text{за } a > 1. \end{cases}$$

3. Претпоставимо најпре да је прва цифра непарна. Тада за две парне цифре треба одабрати две позиције од $2, 3, 4, 5$ (гледано слева надесно), што се може учинити на $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ начина. Затим, након што смо одабрали на којим ће позицијама бити парне цифре а на којим непарне, за сваку цифру имамо избор између 5 могућности (за парне цифре између $0, 2, 4, 6, 8$, а за непарне цифре између $1, 3, 5, 7, 9$). То даје $5^5 = 3125$ бројева за сваку од могућности с фиксираним позицијама парних цифара, тј. $6 \cdot 3125 = 18750$ бројева укупно у случају када је прва цифра непарна.

Претпоставимо сада да је прва цифра парна. Тада за преосталу парну цифру треба одабрати једну од позиција $2, 3, 4, 5$, што се може учинити на 4 начина. Затим, након што смо то одабрали, за прву цифру имамо избор између 4 могућности $(2, 4, 6, 8$, тј. прва цифра не може бити $0)$, а за све остале цифре између 5 могућности. То даје $4 \cdot 5^4 = 2500$ бројева за сваку од могућности с фиксираном позицијом друге парне цифре, тј. $4 \cdot 2500 = 10000$ бројева укупно у случају када је прва цифра парна.

Према томе, укупно постоји $18750 + 10000 = 28750$ таквих бројева.



Оп 2018 4Б 4

4. Нека је $\triangle ABC$ основа те пирамиде, $\measuredangle A = 60^\circ$, $\measuredangle C = 90^\circ$, и нека је D четврто теме пирамиде. Нека је D_0 подножје нормале из темена D на раван основе. Тада су праве AD_0, BD_0, CD_0 ортогоналне пројекције правих AD, BD, CD, редом, па су $\measuredangle DAD_0$, $\measuredangle DBD_0$ и $\measuredangle DCD_0$ управо углови које ивице AD, BD и CD граде с основом пирамиде, и по услову задатка, сви ови углови износе по 45°. Одатле су $\triangle ADD_0$, $\triangle BDD_0$ и $\triangle CDD_0$ једнакокрако-правоугли троуглови и притом међусобно подударни (јер имају заједничку катету DD_0). Дакле, важи $AD_0 = BD_0 = CD_0 = DD_0 = 2018\frac{\sqrt{2}}{2} = 1009\sqrt{2}$. Уједно, из $AD_0 = BD_0 = CD_0$ добијамо да се D_0 налази управо на средини хипотенузе AB. Даље можемо израчунати $AB = AD_0 + BD_0 = 2018\sqrt{2}$, $AC = \frac{AB}{2} = 1009\sqrt{2}$ и $BC = AC\sqrt{3} = 1009\sqrt{6}$. Одатле се лако израчунава запремина посматране пирамиде:

$$V = \frac{1}{3}P(\triangle ABC)DD_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1009\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{6}}{2} \cdot 1009\sqrt{2} = \frac{1009^3\sqrt{6}}{3}.$$

Како је D_0 на средини AB, следи да је DD_0 уједно и висина на AB у $\triangle ABD$. Нека су E и F подножја нормала из D на AC и BC у $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, редом. Како су ови троуглови једнакокраки с основицама AC и BC, из Питагорине теореме рачунамо

$$DE = \sqrt{DC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{2018^2 - \frac{1009^2}{2}} = 1009\sqrt{\frac{7}{2}}$$

и

$$DF = \sqrt{DC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{2018^2 - \frac{3 \cdot 1009^2}{2}} = 1009\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Дакле, површина пирамиде износи:

$$
\begin{aligned}
P &= P(\triangle ABC) + P(\triangle ABD) + P(\triangle ACD) + P(\triangle BCD) \\
&= \frac{1009\sqrt{2}\cdot 1009\sqrt{6}}{2} + \frac{2018\sqrt{2}\cdot 1009\sqrt{2}}{2} + \frac{1009\sqrt{2}\cdot 1009\sqrt{\frac{7}{2}}}{2} + \frac{1009\sqrt{6}\cdot 1009\sqrt{\frac{5}{2}}}{2} \\
&= 1009^2\left(\sqrt{3} + 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

5. Приметимо:

$$1000\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \overline{xyz{,}xyzxyzxyz\ldots} = \overline{xyz} + \overline{0{,}xyzxyzxyz\ldots} = \overline{xyz} + \left(\frac{m}{n}\right)^3,$$

па добијамо $999(\frac{m}{n})^3 = \overline{xyz}$, тј. $999m^3 = \overline{xyz}\cdot n^3$. Јасно, можемо претпоставити да су m и n узајамно прости. Одатле следи $n^3 \mid 999 = 3^3\cdot 37$. Како важи $n > 1$ (због $m < n$), једина могућност је $n = 3$. Тада може бити $m = 1$ или $m = 2$. У првом случају добијамо $\overline{xyz} = \frac{999}{27} = 37 = \overline{037}$, а у другом $\overline{xyz} = \frac{999\cdot 8}{27} = 296$. Дакле, обе могућности за m заиста дају решења задатка, па следи да $\frac{m}{n}$ може бити $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 24. 2. 2018.

Први разред – А категорија

1. Имамо $24^a + 2^b + 2018^c \equiv 3^a + 2^b + 2^c \pmod 7$ и $10^c + 3^a + 2018^b \equiv 3^c + 3^a + 2^b \pmod 7$. Дакле, пошто су оба ова броја дељива са 7, имамо $7 \mid (3^c + 3^a + 2^b) - (3^a + 2^b + 2^c) = 3^c - 2^c$. Приметимо да низ бројева $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$ при дељењу са 7 даје редом остатке $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3\ldots$, док низ бројева $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ даје редом остатке $1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2\ldots$. Дакле, први низ остатака је периодичан са периодом дужине 6, а други са периодом дужине 3, па из првих 6 чланова ових низова можемо приметити да бројеви 3^c и 2^c дају исти остатак при дељењу са 7 једино када је c дељиво са 6, и тада оба броја дају остатак 1. Дакле, из $7 \mid 3^a + 2^b + 2^c$ сада следи $7 \mid 3^a + 2^b + 1$.

Даље, имамо $30^b + 3^c + 2018^a \equiv 2^b + 3^c + 2^a \equiv 2^a + 2^b + 1 \pmod 7$. Претпоставимо да је овај број дељив са 7. Тада $7 \mid (3^a + 2^b + 1) - (2^a + 2^b + 1) = 3^a - 2^a$, па као у претходном делу закључујемо да је a дељиво са 6 и да 3^a даје остатак 1 при дељењу са 7. Међутим, из $7 \mid 3^a + 2^b + 1$ тада закључујемо $2^b \equiv -2 \equiv 5 \pmod 7$, што није могуће (видели смо да су могући остаци 1, 2 и 4). Тиме је задатак решен.

2. Означимо $y = \overline{(a_{2017}+n)\ldots(a_2+n)(a_1+n)(a_0+n)}$. Јасно, цифра n није 0 и није 1.

Докажимо да је a_0 паран број. Претпоставимо супротно. Тада је x непаран број, па је, због $y = n\cdot x$, y паран број ако и само ако је n паран број. Међутим, $a_0 + n$ је различите парности од n, што је контрадикција. Дакле, a_0 је паран број, па су x и y парни бројеви. Одавде је и $a_0 + n$ паран број, па је и n паран.

Такође, $a_0 \neq 0$, јер је у супротном и цифра јединица броја y једнака 0, што није могуће. Дакле, $a_0 \geqslant 1$, па како је a_0 паран, следи $a_0 \geqslant 2$. Из $a_0 + n \leqslant 9$ имамо $n \leqslant 7$, па како је n паран, следи $n \leqslant 6$. Дакле, $n \in \{2, 4, 6\}$.

За $n = 6$, због $a_0 + n \leqslant 9$ добијамо $a_0 = 2$ и $a_0 + n = 8$. Међутим, цифра јединица броја $6 \cdot \overline{a_{2017} \ldots a_2 a_1 2}$ једнака је 2, а не 8.

За $n = 4$, због $a_0 + n \leqslant 9$ добијамо $a_0 = 2$ или $a_0 = 4$, и $a_0 + n = 6$ или $a_0 + n = 8$, респективно. Међутим, цифра јединица броја $4 \cdot \overline{a_{2017} \ldots a_2 a_1 2}$ једнака је 8, а броја $4 \cdot \overline{a_{2017} \ldots a_2 a_1 4}$ једнака је 6, па је и овај случај немогућ.

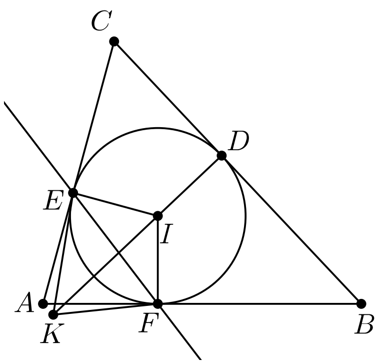
Дакле, остаје $n = 2$, и онда $a_0 \in \{2, 4, 6\}$. Упоређивањем цифре јединица броја $2 \cdot x$ и y закључујемо $a_0 = 2$. Сада из

$$2 \cdot \overline{a_{2017} \ldots a_2 a_1 2} = \overline{(a_{2017} + n) \ldots (a_2 + n)(a_1 + n)4}$$

следи

$$2 \cdot \overline{a_{2017} \ldots a_2 a_1} = \overline{(a_{2017} + n) \ldots (a_2 + n)(a_1 + n)}.$$

Даље на исти начин добијамо $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, итд. до $a_{2017} = 2$. Дакле, једино решење је $n = 2$ и $x = \underbrace{222 \ldots 222}_{2018 \text{ пута}}$.



Ок 2018 1А 3

3. Нека је I центар уписане кружнице. Имамо $\triangle KEF \sim \triangle ABC$, па добијамо $\measuredangle EKF = \measuredangle BAC = 180^\circ - \measuredangle EIF$, што значи да је четвороугао $EIFK$ тетиван. Следи $\measuredangle KIF = \measuredangle KEF = \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle DIF$, па су тачке K, I, D колинеарне, одакле следи тврђење.

4. Узмимо $A = \{a, b\}$. Тада имамо $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Приметимо да a не може бити једнако ни $\{a\}$, ни $\{a, b\}$: заиста, ако је n најмањи природан број такав да $a \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$, тада имамо $\{a\}, \{a, b\} \notin \mathscr{P}^n(\varnothing)$, јер би из $\{a\} \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$ (слично за $\{a, b\} \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$) следило $\{a\} \subseteq \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, тј. $a \in \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, контрадикција са избором n. Дакле, да би важило $A \subseteq \mathscr{P}(A)$, следи да a мора бити $\varnothing$ или $\{b\}$, док (слично) b мора бити $\varnothing$ или $\{a\}$.

Претпоставимо прво $a, b \neq \varnothing$. Тада је једина могућност $a = \{b\}$ и $b = \{a\}$. Нека је n најмањи природан број такав да $a \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$, тј. $\{b\} \in \mathscr{P}^n(\varnothing)$. Следи $\{b\} \subseteq \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, а одатле $b \in \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$, што значи $\{a\} \in \mathscr{P}^{n-1}(\varnothing)$. Међутим, одатле на већ виђен начин добијамо $a \in \mathscr{P}^{n-2}(\varnothing)$, што је контрадикција са избором n.

Дакле, без умањења општости, $a = \varnothing$. Тада имамо $b \neq a = \varnothing$, па је једина преостала могућност $b = \{a\} = \{\varnothing\}$. Према томе, постоји јединствен скуп који задовољава услове задатка: $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

5. Побеђује Мина.

Означимо праве које Максим и Мина повлаче са $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, редом како се појављују у игри. Када Максим повуче праву a_1, Мина повлачи праву a_2 као произвољну праву паралелну са a_1. Даље, Мина у сваком свом потезу треба да повуче праву паралелну са a_1 и a_2, и то на начин који ће бити описан у наставку.

Наиме, тврдимо да Мина може своје праве повлачити на такав начин да се број различитих пресечних тачака након повлачење праве a_{2i+2} повећа за не више од $\max\{3i-2, 2i+1\}$ у односу на број након повлачења праве a_{2i}. Покажимо то.

Претпоставимо прво да Максимова права a_{2i+1} у пресеку с неком од ранијих Максимових правих осим a_1 образује нову пресечну тачку. Тада Мина своју праву a_{2i+2} треба да повуче тако да пролази кроз ту пресечну тачку (ако има више таквих пресечних тачака, онда кроз било коју од њих). Израчунајмо за колико се на тај начин повећао број различитих пресечних тачака током ова два потеза. Максимова права a_{2i+1} образује највише $2i$ нових пресечних тачака. Потом, Минина права a_{2i+2} не сече праву a_1, нити иједну од правих $a_2, a_4, \ldots, a_{2i}$ (јер је паралелна са свима њима); осим тога, будући да права a_{2i+2} пролази кроз пресечну тачку неке две Максимове праве, ни у пресеку праве a_{2i+2} с тим двема не добијамо нове пресечне тачке; дакле, Минина права a_{2i+2} може образовати нове пресечне тачке у пресеку с максимално $i-2$ Максимове праве, тј. може образовати максимално $i-2$ нових пресечних тачака. Дакле, укупан број новодобијених пресечних тачака током ова два потеза је не већи од $2i+(i-2)=3i-2$.

Претпоставимо сада да Максимова права a_{2i+1} не образује нову пресечну тачку ни с једном од ранијих Максимових правих, осим евентуално a_1. Тада се након тог Максимовог потеза број различитих пресечних тачака повећао за не више од $i+1$ (нове пресечне тачке се могу добити у пресеку са свим Мининим правима, као и у пресеку са a_1). Тада Мина своју праву a_{2i+2} може повући произвољно (притом, наравно, паралелну са претходним својим правима), и она образује нове пресечне тачке максимално с Максимових i правих (све сем a_1), па је укупан број новодобијених пресечних тачака током ова два потеза не већи од $(i+1)+i=2i+1$.

Тиме је најављено тврђење доказано. Остаје да избројимо колико се максимално различитих пресечних тачака добија на овај начин. За $i=1,2$ имамо $\max\{3i-2, 2i+1\}=2i+1$, а за $i \geqslant 3$ имамо $\max\{3i-2, 2i+1\}=3i-2$. Дакле, како после повлачења праве a_2 немамо ниједну пресечну тачку, и како се нове пресечне тачке добијају према показаним ограничењима, укупан број различитих пресечних тачака на крају игре је не већи од:

$$\sum_{i=1}^{8}\max\{3i-2, 2i+1\}=\sum_{i=1}^{2}(2i+1)+\sum_{i=3}^{8}(3i-2)=(3+5)+(7+10+13+16+19+22)=95,$$

па побеђује Мина.

Други разред – А категорија

1. Одмах имамо услове $x \geqslant 1$ и $2x \geqslant a$. Трансформишемо једначину као $\sqrt{2x-a}=2+\sqrt{x-1}$ и квадрирамо, након чега остаје $2x-a=4+4\sqrt{x-1}+x-1$, тј. $x-(3+a)=4\sqrt{x-1}$. Након још једног квадрирања, уз постављање услова $x \geqslant 3+a$, добијамо $x^2-2x(3+a)+(9+6a+a^2)=16(x-1)$, тј. $x^2-(22+2a)x+$

$25+6a+a^2=0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо:

$$x_{1,2}=\frac{22+2a\pm\sqrt{(484+88a+4a^2)-(100+24a+4a^2)}}{2}=\frac{22+2a\pm\sqrt{384+64a}}{2}=11+a\pm4\sqrt{6+a}$$

За $a<-6$ очигледно нема реалних решења, а за $a=-6$ добијамо једино решење $x=5$, које задовољава услове дефинисаности. Треба за $a>-6$ проверити која решења задовољавају услове дефинисаности $x\geqslant 1$, $2x\geqslant a$ и $x\geqslant 3+a$. Први услов се своди на $11+a\pm4\sqrt{6+a}\geqslant 1$, тј. $10+a\geqslant\mp4\sqrt{6+a}$; после квадрирања добијамо $100+20a+a^2\geqslant 96+16a$, тј. $a^2+4a+4\geqslant 0$, а ово је испуњено увек (јер је лева страна једнака $(a+2)^2$). Други услов се своди на $22+2a\pm8\sqrt{6+a}\geqslant a$, тј. $22+a\geqslant\mp8\sqrt{6+a}$; после квадрирања добијамо $484+44a+a^2\geqslant 384+64a$, тј. $a^2-20a+100\geqslant 0$, а ово је испуњено увек (јер је лева страна једнака $(a-10)^2$). Преостаје још трећи услов. Он се своди на $11+a\pm4\sqrt{6+a}\geqslant 3+a$, тј. $8\pm4\sqrt{6+a}\geqslant 0$, и коначно $2\pm\sqrt{6+a}\geqslant 0$. Увек важи $2+\sqrt{6+a}\geqslant 0$, па једно решење имамо увек. Неједнакост $2-\sqrt{6+a}\geqslant 0$ се (након пребацивања и квадрирања) своди на $4\geqslant 6+a$, тј. $a\leqslant -2$, па тада имамо и друго решење.

Дакле, резимирајмо:

- за $a<-6$ нема реалних решења;
- за $a=-6$ једино решење је $x=5$;
- за $-6<a\leqslant -2$ имамо два решења, $x_{1/2}=11+a\pm4\sqrt{6+a}$;
- за $-2<a$ имамо једно решење, $x=11+a+4\sqrt{6+a}$.

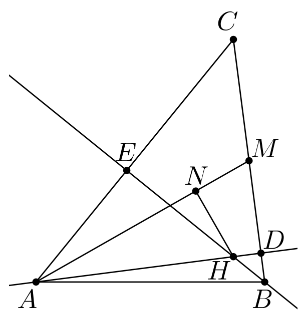
2. Нека је d број погођених, а n број промашених шутева током тренинга. Тада имамо $d-kn=k$, и по услову задатка важи

$$\frac{3}{4}<\frac{d}{d+n}=\frac{kn+k}{(k+1)n+k}<\frac{4}{5}.$$

Лева неједнакост даје $3(k+1)n+3k<4kn+4k$, тј. $kn+k>3n$, док десна неједнакост даје $4(k+1)n+4k>5kn+5k$, тј. $kn+k<4n$. Из друге неједнакости добијамо $k<4$, тј. $k\in\{1,2,3\}$. У случају $k=1$ прва неједнакост се своди на $n+1>3n$, тј. $1>2n$, а ово је могуће само за $n=0$, но за $n=0$ друга неједнакост се своди на $k<0$, контрадикција. У случају $k=2$ прва неједнакост се своди на $2n+2>3n$, тј. $n<2$, а друга неједнакост се своди на $2n+2<4n$, тј. $1<n$, па опет имамо контрадикцију. Дакле, преостаје једино могућност $k=3$.

3. Означимо странице датог троугла уобичајено са a, b и c, углове са α, β и γ, а полупречник описане кружнице са R. Нека је D подножје висине из темена A, а E подножје висине из темена B.

Важи $\triangle AHN\sim\triangle AMD$, одакле добијамо $\frac{AH}{AN}=\frac{AM}{AD}$, тј. $AN\cdot AM=AH\cdot AD$. Из услова $AN=3MN$ добијамо $AN=\frac{3AM}{4}$, па увршћавајући ово у претходну једнакост закључујемо $3AM^2=4AH\cdot AD$. Како је AM тежишна дуж, за њу важи формула $AM^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.



Ок 2018 2А 3

Даље, имамо $AD = c\sin\beta = 2R\sin\beta\sin\gamma$ (где смо користили синусну теорему: $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$), као и $AH = \frac{AE}{\cos(90^\circ-\gamma)} = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = 2R\cos\alpha$. Уврштавајући све ово у малопређашњу једнакост, добијамо

$$\frac{3}{4}(2b^2+2c^2-a^2) = 4(2R\cos\alpha)(2R\sin\beta\sin\gamma) = 16R^2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Приметимо сада:

$$\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = \cos\alpha\frac{\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)}{2} = \frac{\cos\alpha(\cos(\beta-\gamma)-\cos(180^\circ-\alpha))}{2} = \frac{\cos\alpha\cos(\beta -}{2}$$

$$= \frac{\frac{\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)}{2}+1-\sin^2\alpha}{2} = \frac{\cos(180^\circ-2\gamma)+\cos(180^\circ-2\beta)+2-2\sin}{4}$$

$$= \frac{1-\cos2\gamma+1-\cos2\beta-2\sin^2\alpha}{4} = \frac{2\sin^2\gamma+2\sin^2\beta-2\sin^2\alpha}{4} = \frac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta}{2}$$

те имамо

$$16R^2\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma = 8R^2\sin^2\gamma+8R^2\sin^2\beta-8R^2\sin^2\alpha = 2(2R\sin\gamma)^2+2(2R\sin\beta)^2-2(2R\sin\alpha)^2$$

Према томе, можемо констатовати да важи једнакост $\frac{3}{4}(2b^2+2c^2-a^2) = 2c^2+2b^2-2a^2$, што се своди на $5a^2 = 2b^2+2c^2$. Одатле добијамо $AM^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} = \frac{5a^2-a^2}{4} = a^2$, тј. $AM = BC$, што је и требало доказати.

4. Запишимо n у облику $n = p^k m$ за неки прост број p и природне бројеве k, m, где $p \nmid m$. Нека $d(m)$ означава број делилаца броја m. Тада n има тачно $d(m)$ делилаца који нису дељиви са p (то су управо делиоци броја m), као и $kd(m)$ оних који јесу (то су делиоци броја m помножени с неким степеном броја p не већим од k-тог). Пошто се у сваком пару из формулације задатка мора налазити бар један број који није дељив са p (у супротном би им и збир био дељив са p и притом већи од p, па збир не би могао бити прост број), следи $d(m) \geqslant kd(m)$, одакле добијамо $k = 1$. Дакле, n не може бити дељив ниједним квадратом простог броја. Приметимо још и да n мора бити паран број, јер би у супротном сви његови делиоци били непарни, па би, ма како их поделимо на парове, збир бројева у сваком пару био паран број, те не би могли сви ти збирови бити прости. Према свему томе, n мора бити облика $n = 2p_1p_2\cdots p_k$, где су $p_1, p_2\ldots, p_k$ различити непарни прости бројеви.

Број n може бити у пару једино са бројем 1 (ако би био у пару било с којим другим својим делиоцем, њихов збир би био дељив тим делиоцем, па не би био прост). Даље, сваки од бројева $\frac{n}{p_i}$ је у пару са неким бројем који је узајамно прост с њим, што мора бити p_i. Слично закључујемо да је број $\frac{n}{p_ip_j}$ у пару са p_ip_j итд., тј. добијамо да сви парови морају бити облика $\{x, \frac{n}{x}\}$.

Претпоставимо да нека два пара имају исти збир, тј. $x+\frac{n}{x} = y+\frac{n}{y}$. Множећи обе стране са xy добијамо $x^2y+ny = xy^2+nx$, тј. $xy(x-y) = n(x-y)$, а ово се своди на $(xy-n)(x-y) = 0$, одакле коначно добијамо $y = x$ или $y = \frac{n}{x}$; дакле, $\{x, \frac{n}{x}\} = \{y, \frac{n}{y}\}$, чиме је доказ завршен.

5. Најпре, све цифре мегапростог броја морају бити из скупа $\{2,3,5,7\}$. Означимо скуп свих бројева са 2018 цифара и свим цифрама из скупа $\{2,3,5,7\}$ са S. Нека је A скуп бројева из S који су дељиви са 5, B скуп парних бројева из S, а C скуп непарних бројева из S чији је збир цифара паран.

Имамо $|A| = |B| = 4^{2017}$, као и $|A \cap B| = |B \cap C| = 0$. Израчунајмо сада број елемената скупа C. Пошто су елементи скупа C непарни, као последња цифра долазе у обзир 3 могућности (цифре 3, 5 и 7). Пошто им је збир цифара паран, то значи да се међу првих 2017 цифара цифра 2 појављује паран број пута. Уз ове рестрикције, остале цифре можемо бирати произвољно. Дакле, $|C| = 3\sum_{k=0}^{1008}\binom{2017}{2k}3^{2017-2k}$. Приметимо да сабирци под сумом представљају управо сваки други сабирак из биномног развоја $(3+1)^{2017}$, па следи

$$|C| = 3\sum_{k=0}^{1008}\binom{2017}{2k}3^{2017-2k} = 3\cdot\frac{(3+1)^{2017}+(3-1)^{2017}}{2} = \frac{3(4^{2017}+2^{2017})}{2}.$$

Елементи из пресека $A\cap C$ су управо они бројеви из скупа C који имају 5 као цифру јединица. Одатле имамо $|A\cap C| = \frac{|C|}{3} = \frac{4^{2017}+2^{2017}}{2}$. Дакле, принципом укључења-искључења закључујемо

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap C| = 4^{2017}+4^{2017}+\frac{3(4^{2017}+2^{2017})}{2}-\frac{4^{2017}+2^{2017}}{2} = 3\cdot 4^{2017}+2^{2017}.$$

Јасно, ниједан број из скупа $A\cup B\cup C$ није мегапрост.

Означимо са D скуп бројева из S који су дељиви са 3, а да притом нису у скупу $A\cup B\cup C$ (други услов се своди на то да се завршавају цифром 3 или 7, и да имају непаран збир цифара). Проценимо број елемената скупа D. Ако се међу првих 2016 цифара цифра 2 појављује непаран број пута, онда за претпоследње место имамо могућности 3, 5 или 7 (како би укупан збир цифара био непаран). Који год да остатак при дељењу са 3 даје збир првих 2016 цифара, увек можемо на два начина изабрати последњу и претпоследњу цифру (из скупа $\{3,7\}$, односно $\{3,5,7\}$) на такав начин да укупан збир цифара (па тиме и посматрани број) буде дељив са 3. У овом случају, дакле, имамо

$$2\sum_{k=0}^{1007}\binom{2016}{2k+1}3^{2016-(2k+1)} = 2\cdot\frac{(3+1)^{2016}-(3-1)^{2016}}{2} = 4^{2016}-2^{2016}$$

бројева дељивих са 3. Ако се међу првих 2015 цифара цифра 2 појављује паран број пута а 2016. цифра је непарна, онда претпоследња цифра мора бити 2. Који год да остатак при дељењу са 3 даје збир првих 2015 цифара, увек можемо на два начина изабрати последњу цифру и цифру пре претпоследње (из скупа $\{3,7\}$, односно $\{3,5,7\}$) на такав начин да укупан збир цифара (па тиме и посматрани број) буде дељив са 3. У овом случају, дакле, имамо

$$2\sum_{k=0}^{1007}\binom{2015}{2k}3^{2015-2k} = 2\cdot\frac{(3+1)^{2015}+(3-1)^{2015}}{2} = 4^{2015}+2^{2015}$$

бројева дељивих са 3. Дакле, можемо закључити

$$|D| \geqslant (4^{2016}-2^{2016})+(4^{2015}+2^{2015}) = 5\cdot 4^{2015}-2^{2015}$$

(приметимо да нисмо исцрпли све могуће облике бројева из скупа D и стога не знамо тачан број елемената у скупу D, али и ова процена ће нам бити довољна). Јасно, ниједан број из скупа D није мегапрост.

Коначно, како важи $D \cap (A \cup B \cup C) = \varnothing$, имамо

$$|A \cup B \cup C \cup D| \geqslant (3 \cdot 4^{2017} + 2^{2017}) + (5 \cdot 4^{2015} - 2^{2015}) = 53 \cdot 4^{2015} + 3 \cdot 2^{2015},$$

те ова вредност представља доње ограничење за број елемената скупа S који нису мегапрости бројеви. Према томе, мегапростих бројева у скупу S може бити највише $4^{2018} - (53 \cdot 4^{2015} + 3 \cdot 2^{2015}) = 11 \cdot 4^{2015} - 3 \cdot 2^{2015} < 11 \cdot 4^{2015}$, што је и требало доказати.

Трећи разред – А категорија

1. Тражена вредност је највећа вредност реалног броја a за коју је неједнакост $\frac{x^2}{x-9} \geqslant a$ испуњена на целом интервалу $x \in (9, \infty)$. Приметимо да је највећа таква вредност a сигурно ненегативна, јер за $a = 0$ услов важи. Множењем са $x - 9$ (што можемо урадити јер је та вредност позитивна) и пребацивањем с десне стране на леву, посматрана неједнакост се своди на $x^2 - ax + 9a \geqslant 0$. Приметимо да је, за $x \leqslant 9$, последња неједнакост увек испуњена (леву страну можемо записати у облику $x^2 + a(9 - x)$, где су оба сабирка ненегативна), па је услов да она буде испуњена на интервалу $x \in (9, \infty)$ заправо еквивалентан услову да она буде испуњена за све $x \in \mathbb{R}$. Ово последње се своди на то да дискриминанта мора бити непозитивна, тј. $a^2 - 36a \leqslant 0$, или $a(36 - a) \leqslant 0$. Решење ове неједначине очигледно је $a \in [0, 36]$, па највећа могућа вредност броја a износи 36.

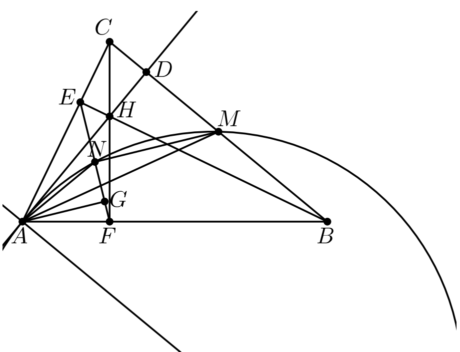
2. Уочимо, пре свега, да из постављене једначине следи $4 \mid x!$, одакле добијамо $x \geqslant 4$.

Претпоставимо прво да је $x + 3$ сложен број. Тада, уколико би $x + 3$ био дељив неким простим чиниоцем p, $p \geqslant 3$, имали бисмо $p \leqslant x$ (наиме, очигледно $x + 2 \nmid x + 3$, а за $x + 1 = p \geqslant 3$ опет имамо $x + 1 \nmid x + 3$); но, онда $p \mid x!$ али $p \nmid 4$, па p не дели леву страну једначине а дели десну, контрадикција. Дакле, уколико је $x + 3$ сложен број, тада $x + 3$ мора бити степен двојке. Но, тада је десна страна очигледно дељива са 8, док за $x \geqslant 4$ имамо $8 \mid x!$ и $8 \nmid 4$ па $8 \nmid x! + 4$, контрадикција.

Дакле, $x+3$ је прост број, рецимо p. Из постављене једначине имамо $x+3 \mid x!+4$, тј. $p \mid (p-3)!+4$. Из овог имамо $p \mid ((p-3)!+4)(p-2) = (p-2)!+4(p-2)$, а према верзији Вилсонове теореме добијамо $(p-2)!+4(p-2) \equiv 1+4\cdot(-2) = -7 \pmod{p}$; одатле следи $p = 7$, тј. $x = 4$. У том случају заиста налазимо решење:

$$4! + 4 = 28 = 4 \cdot 7 = 4 \cdot (4 + 3)^1,$$

тј. једино решење је пар $(x, y) = (4, 1)$.



3. Нека су AD и AG, редом, висине из темена A у $\triangle ABC$ и $\triangle AEF$, и нека је H ортоцентар у $\triangle ABC$. Користећи тетивност четвороугла $AFHE$, као и чињеницу да су $\measuredangle AHE$ и $\measuredangle ACB$ углови с нормалним крацима, добијамо $\measuredangle AFE = \measuredangle AHE = \measuredangle ACB$. Дакле, $\triangle ABC \sim \triangle AEF$, а при трансформацији сличности која пресликава први троугао у други, тачке M и D се пресликавају у N и G, редом. Осим тога, с обзиром на $ME = MF$ (кружница над пречником BC има центар у M и пролази кроз обе тачке E и F), имамо $MN \perp EF$, тј. $MN \parallel AG$. Следи $\measuredangle DAM = \measuredangle NAG = 180^\circ - \measuredangle ANM$, што значи да права AD додирује кружницу описану око $\triangle AMN$ (због везе међу углом између тетиве и тангенте и периферијским углом над том тетивом). Тврђење задатка одмах следи.

4. За $n = 2$ произвољан двочлан скуп испуњава услове задатка. Претпоставимо надаље $n > 2$.

Означимо $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Из првог услова имамо $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{S - a_1, S - a_2, \ldots, S - a_n\}$, па су онда и збирови елемената из ова два скупа једнаки. Добијамо $S = nS - S$, тј. $S(n-2) = 0$, одакле следи $S = 0$. Дакле, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{-a_1, -a_2, \ldots, -a_n\}$. Приметимо, ако за неко i, $1 \leqslant i \leqslant n$, важи $a_i = -a_i$, следило би $a_i = 0$, па можемо имати највише једно овакво i. Не губећи на општости, нека важи $a_1 = -a_2$. Тада имамо и $a_2 = -a_1$, па следи да почетни скуп бројева (с изостављеном нулом, у случају да 0 припада почетном скупу) можемо поделити у парове $\{x, -x\}$, $x \neq 0$.

Размотримо прво случај $n = 2k$, за $k \geqslant 2$. Тада имамо k парова облика $\{x_i, -x_i\}$, $x_i \neq 0$, за $i = 1, 2, \ldots, k$. Њих можемо поделити на два дисјунктна скупа $\{x_1, -x_1\}$ и $\{x_2, -x_2, \ldots, x_k, -x_k\}$, где важи $x_1^{n+1} + (-x_1)^{n+1} = 0 = x_2^{n+1} + (-x_2)^{n+1} + \cdots + x_k^{n+1} + (-x_k)^{n+1}$. Према томе, овакви n нису решења задатка због другог услова.

Размотримо сада случај $n = 2k + 1$, за $k \geqslant 1$. Закључујемо да је један од посматраних бројева једнак 0, а остали чине парове како је горе констатовано. Задати скуп можемо поделити на два дисјунктна скупа $\{0, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ и $\{-x_1, -x_2, \ldots, -x_k\}$, где важи $0^{n+1} + x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_k^{n+1} = (-x_1)^{n+1} + (-x_2)^{n+1} + \cdots + (-x_n)^{n+1}$. Према томе, ни овакви n нису решења задатка због другог услова.

Дакле, једино решење задатка је $n = 2$.

5. Нека је V скуп свих транзистора, E скуп свих водова, и нека xy означава вод између транзистора x и y (дакле, транзистори x и y су на посматраном чипу повезани водом ако и само ако важи $xy \in E$). Даље, означимо са $d(x)$ број водова који полазе из транзистора x, и $e = |E|$. Констатујмо једнакост (што ће бити потребно касније) $\sum_{u \in V} d(u) = 2e$: заиста, лева страна тачно убраја сваки вод по два пута (по једном за сваки крај), одакле следи констатација.

Према услову задатка, за свака два транзистора x и y таква да $xy \notin E$ имамо $d(x)+d(y) \geqslant n-1$. Како оваквих парова транзистора има $\binom{n}{2}-e$, добијамо

$$\sum_{xy \notin E} (d(x) + d(y)) \geqslant \left(\binom{n}{2} - e\right)(n-1).$$

Приметимо да се, за сваки транзистор u, сабирак $d(u)$ на левој страни страни појављује онолико пута колико има транзистора с којима u није повезан, а то је $n-1-d(u)$. Дакле, имамо:

$$\sum_{xy\notin E}(d(x)+d(y))=\sum_{u\in V}d(u)(n-1-d(u))=(n-1)\sum_{u\in V}d(u)-\sum_{u\in V}d(u)^2.$$

Из последња два израза следи

$$\left(\binom{n}{2}-e\right)(n-1)\leqslant(n-1)\sum_{u\in V}d(u)-\sum_{u\in V}d(u)^2\leqslant(n-1)\sum_{u\in V}d(u)-\frac{\left(\sum_{u\in V}d(u)\right)^2}{n}=2e(n-1)-\frac{4e^2}{n}$$

(где друга неједнакост важи према неједнакости између квадратне и аритметичке средине).

Дакле, добили смо неједнакост

$$\frac{4e^2}{n}-3e(n-1)+\binom{n}{2}(n-1)\leqslant 0.$$

Ово ћемо решавати као квадратну неједначину по e. Нуле се налазе у тачкама

$$\frac{3(n-1)\pm\sqrt{9(n-1)^2-\frac{16}{n}\frac{n(n-1)}{2}(n-1)}}{\frac{8}{n}}=\frac{n\left(3(n-1)\pm\sqrt{(n-1)^2}\right)}{8},$$

тј. $\frac{n(n-1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{4}$. Дакле, посматрана неједнакост важи за $e\in\left[\frac{\binom{n}{2}}{2},\binom{n}{2}\right]$, што је и требало доказати.

Четврти разред – А категорија

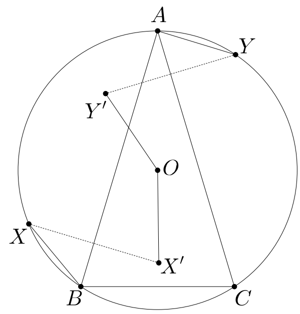
1. Уколико $2\in S$, тада услов даје да бар један прост фактор броја $2\cdot 2+1$ мора припадати скупу S, тј. $5\in S$, а прост број 5 је облика $4k+1$. Претпоставимо сада да $2\notin S$, и претпоставимо супротно од траженог: нека су сви прости бројеви из скупа S облика $4k+3$. Узмимо $p\in S$ произвољно. Према услову, бар један непаран прост фактор броја p^2+1 мора бити у скупу S. Докажимо да је сваки непаран фактор броја p^2+1 облика $4k+1$. Претпоставимо супротно: нека имамо $q=4k+3$, $p^2+1\equiv 0 \pmod q$. Тада важи $p^2\equiv -1 \pmod q$, па и $p^{4k+2}=(p^2)^{2k+1}\equiv -1 \pmod q$; с друге стране, према малој Фермаовој теореми важи $p^{4k+2}=p^{q-1}\equiv 1 \pmod q$, контрадикција. Тиме је доказ завршен. (Крај доказа се могао и мало скратити помоћу квадратних остатака: ако $q\mid p^2+1$, тада је -1 квадратни остатак по модулу q, одакле следи да је q облика $4k+1$.)

2. Претпоставимо да је x такав реалан број. Тада имамо $0>\cos x-\cos 2x=2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}$. Нека важи $\frac{x}{2}=r+2k\pi$, за неко $k\in\mathbb{Z}$ и $r\in[0,2\pi)$. У случају $\sin\frac{x}{2}>0$ имамо $r\in(0,\pi)$, и будући да тада треба да важи $0>\sin\frac{3x}{2}=\sin(3r+6k\pi)=\sin 3r$, следи $3r\in(\pi,2\pi)$ (због $3r\in(0,3\pi)$); све заједно, $r\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ у овом случају. У случају $\sin\frac{x}{2}<0$ имамо $r\in(\pi,2\pi)$, и будући да тада треба да важи $0 < \sin\frac{3x}{2} = \sin(3r+6k\pi) = \sin 3r$, следи $3r \in (4\pi, 5\pi)$ (због $3r \in (3\pi, 6\pi)$); све заједно, $r \in (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ у овом случају.

Приметимо, $\sin x = \sin(2r + 4k\pi) = \sin 2r$ и $\sin 3x = \sin(6r + 12k\pi) = \sin 6r$. Знамо $2r \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}) \cup (\frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3})$. У случају $2r \in (\frac{2\pi}{3}, \pi] \cup (\frac{8\pi}{3}, 3\pi]$, имамо $6r \in (2\pi, 3\pi] \cup (8\pi, 9\pi]$, и тада важи $\sin x = \sin 2r \geqslant 0$ и $\sin 3x = \sin 6r \geqslant 0$. У случају $2r \in (\pi, \frac{4\pi}{3}) \cup (3\pi, \frac{10\pi}{3})$, имамо $6r \in (3\pi, 4\pi) \cup (9\pi, 10\pi)$, и тада важи $\sin x = \sin 2r \leqslant 0$ и $\sin 3x = \sin 6r \leqslant 0$. Међутим, то (у оба случаја) значи $\cos 2x - \cos 4x = 2\sin x \sin 3x \geqslant 0$, тј. $\cos 2x \geqslant \cos 4x$, контрадикција с условом задатка.

Дакле, такав реалан број x не постоји.

3. Посматрајмо ротацију ρ око тачке O за $\measuredangle AOB$. Тада имамо $\rho : k \mapsto k, CA \mapsto AB$, а онда, због $\measuredangle XBA = \measuredangle YAC$, имамо и $\rho : Y \mapsto X$, па потом и $\rho : Y' \mapsto X'$. Одатле директно следи $OX' = OY'$.



Ок 2018 4А 3

4. Побеђује играч Б. Поделимо првих 2016 редова на хоризонталне домине. Када играч А упише цифру у неки од првих 2016 редова, играч Б упише у друго поље исте домине цифру која у збиру с управо уписаном цифром даје број дељив са 3. Када играч А упише цифру у неко поље у 2017. реду, играч Б упише цифру 2 у поље непосредно испод. На тај начин ће на крају игре бројеви у првих 2016 редова сви бити дељиви са 3, па неће бити прости; број у 2018. реду биће једнак $222\ldots222$, па ни он неће бити прост; бројеви у свакој колони ће се завршавати цифром 2, па ни они неће бити прости. Дакле, једино број у 2017. реду може бити прост, па побеђује играч Б.

5. Претпоставимо да се надовезивањем броја $k!$ иза броја $m!$ добија број $n!$. Јасно, $n \geqslant k+1$. Нека број $k!$ има тачно c цифара. Приметимо, $10^c > k$, што ћемо користити у наставку. Имамо

$$n! = m! \cdot 10^c + k!.$$

Претпоставимо прво $k \leqslant m$. Тада можемо обе стране поделити са $k!$, после чега остаје:

$$n(n-1)\cdots(k+2)(k+1) = m(m-1)\cdots(k+2)(k+1)\cdot 10^c + 1.$$

Десна страна је непарна, па мора бити и лева. То је могуће једино када се производ с леве стране састоји само од једног чиниоца, тј. $n = k+1$ (и то је уједно вредност на левој страни). Уколико би важило $m \geqslant k+1$, тј. уколико би производ с десне стране испред 10^c био непразан, десна страна би очигледно била већа од $k+1$, што је немогуће. Дакле, једино остаје $m = k$, чиме се једнакост своди на $k+1 = 10^c+1$, тј. $k = 10^c > k!$, контрадикција. Према томе, овде не добијамо решење.

Претпоставимо сада $k > m$. Поново поделимо обе стране полазне једначине са $k!$, после чега остаје:

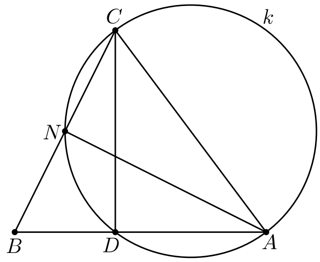
$$n(n-1)\cdots(k+2)(k+1) = \frac{10^c}{k(k-1)\cdots(m+2)(m+1)} + 1.$$

Разломак на десној страни мора бити цео број. За $k \geqslant m+3$ његов именилац би био дељив са 3, а како 10^c није дељиво са 3, ово је немогуће. Остаје $k = m+1$ или $k = m+2$. Посматраћемо ова два случаја засебно.

- $k = m+2$:
  Како $(m+1)(m+2) \mid 10^c$ а $m+1$ и $m+2$ су узајамно прости природни бројеви већи од 1, они морају бити степен двојке и степен петице у неком редоследу. За $m+2 = 2^a$ и $m+1 = 5^b$ имамо $2^a = 5^b + 1$; одмах видимо $a \geqslant 3$, но тада је лева страна дељива са 8 па би 5^b морало давати остатак 7 при дељењу са 8, док се заправо међу остацима броја 5^b при дељењу са 8 наизменично јављају само 5 и 1, контрадикција. Дакле, мора важити $m+2 = 5^a$ и $m+1 = 2^b$, и $5^a = 2^b + 1$. За $b \leqslant 2$ налазимо једно решење, $(a, b) = (1, 2)$; тада следи $m = 3$ и $k = m+2 = 5$, но како број 6120 (надовезивање бројева 3! и 5!) није факторијал ниједног природног броја, овде не добијамо решење. Претпоставимо сада $b \geqslant 3$. Тада десна страна даје остатак 1 при дељењу са 8, па мора и лева, одакле следи да је a паран број, рецимо $a = 2a_1$. Тада следи $2^b = 5^{2a_1} - 1 = (5^{a_1} - 1)(5^{a_1} + 1)$. Свака заграда мора бити степен двојке, а како се разликују за тачно 2, једина могућност је да буде $5^{a_1} - 1 = 2$, што није могуће.
- $k = m+1$:
  Слично као и горе, мора бити $m+1 \mid 10^c$. Претпоставимо прво $2^c \nmid m+1$. Тада је $\frac{10^c}{m+1} + 1$ непаран број, па то мора бити и лева страна посматране једнакости, која износи $n(n-1)\cdots(m+3)(m+2)$. Ово је могуће само за $n = m+2$, тј. остаје $m+2 = \frac{10^c}{m+1} + 1$. Следи $(m+2)(m+1) = 10^c + (m+1)$, а одатле $(m+1)^2 = 10^c > k! = (m+1)!$, тј. $m+1 > m!$. Одавде следи $m \leqslant 2$. За $m = 1$ имамо $k = 2$, а за $m = 2$ имамо $k = 3$, али како бројеви 12 и 26 нису факторијали ниједног природног броја, ни овде не добијамо решење.
  Претпоставимо сада $2^c \mid m+1$. Тада имамо $m+1 \geqslant 2^c$ и
  $$(2^c)^{n-m-1} < n(n-1)\cdots(m+3)(m+2) = \frac{10^c}{m+1} + 1 \leqslant 5^c + 1,$$
  па следи $n - m - 1 \leqslant 2$ (за $n - m - 1 \geqslant 3$ горња неједнакост би се свела на $8^c < 5^c + 1$, што је немогуће), тј. $n \leqslant m+3$, а ово имплицира $n = m+3$ или $n = m+2$. Случај $n = m+2$ смо решавали малопре и нисмо нашли решења. Остаје $n = m+3$. Тада имамо
  $$(m+3)(m+2) = \frac{10^c}{m+1} + 1 > \frac{k!}{m+1} + 1 = \frac{(m+1)!}{m+1} + 1 = m! + 1,$$
  тј. $m^2 + 5m + 5 > m!$. Ова неједнакост важи само за $m \leqslant 4$. Случајеве $m = 1$ и $m = 2$ смо испитали раније. За $m = 3$ имамо $k = 4$, а за $m = 4$ имамо $k = 5$, али како бројеви 624 и 24120 нису факторијали ниједног природног броја, опет не налазимо решење.

Дакле, природни бројеви m и k тражени у поставци не постоје.

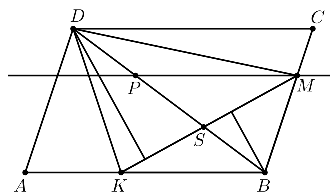
Први разред – Б категорија



Ок 2018 1Б 1

1. Нека је N средиште странице BC, уједно и пресек k са BC. Имамо $\measuredangle ANC = \measuredangle ANB = 90°$, јер је AC пречник кружнице k. По ставу СУС имамо $\triangle ANC \cong \triangle ANB$, па следи $AB = AC = 60$. Сада имамо $60 = AD+DB = \frac{3}{2}DB+DB = \frac{5}{2}DB$, па следи $DB = 24$ и $AD = \frac{3}{2}\cdot 24 = 36$. Важи и $\measuredangle ADC = 90°$ (поново јер је AC пречник), па сада из Питагорине теореме добијамо $CD = \sqrt{60^2-36^2} = 12\sqrt{5^2-3^2} = 48$. Како је CD висина на AB у $\triangle ABC$, његова површина износи $\frac{AB\cdot CD}{2} = \frac{60\cdot 48}{2} = 1440$.

2. *Прво решење.* Нека је S пресек дијагонале DB и дужи KM. Како $\triangle BKM$ и $\triangle DKM$ имају заједничку страницу KM, однос њихових површина заправо представља однос њихових висина спуштених на KM. Висине спуштене из B, односно D на KM односе се као SB и DS (према Талесовој теореми), па заправо треба наћи $\frac{SB}{DS}$.



Ок 2018 1Б 2

Означимо $\vec{x} = \overrightarrow{DC}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{DA}$. Сада из $\overrightarrow{DB} = \vec{x}+\vec{y}$ и $\overrightarrow{DS} = k\overrightarrow{DB}$ за неко k, $0 < k < 1$ (а онда $\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DS} = (1-k)\overrightarrow{DB}$), имамо

$$\overrightarrow{DS} = k\vec{x} + k\vec{y}.$$

С друге стране, како је S на дужи KM, то за неки реалан број m, $0 < m < 1$, важи $\overrightarrow{DS} = m\overrightarrow{DK} + (1-m)\overrightarrow{DM}$. С обзиром на $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = \vec{y} + \frac{2}{5}\vec{x}$ и $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \vec{x} + \frac{1}{3}\vec{y}$, увршатавањем овога у претходну једнакост добијамо

$$\overrightarrow{DS} = m\left(\vec{y}+\frac{2}{5}\vec{x}\right)+(1-m)\left(\vec{x}+\frac{1}{3}\vec{y}\right) = \left(\frac{2m}{5}+1-m\right)\vec{x}+\left(m+\frac{1-m}{3}\right)\vec{y} = \frac{5-3m}{5}\vec{x}+\frac{2m+1}{3}\vec{y}.$$

Дакле, следи $k\vec{x}+k\vec{y} = \frac{5-3m}{5}\vec{x}+\frac{2m+1}{3}\vec{y}$, па како су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ неколинеарни, мора важити $k = \frac{5-3m}{5}$ и $k = \frac{2m+1}{3}$. Одатле имамо $\frac{5-3m}{5} = \frac{2m+1}{3}$, тј. $15-9m = 10m+5$, па израчунавамо $m = \frac{10}{19}$. Најзад, $k = \frac{2\cdot\frac{10}{19}+1}{3} = \frac{13}{19}$ и

$$\frac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)} = \frac{SB}{DS} = \frac{1-k}{k} = \frac{\frac{6}{19}}{\frac{13}{19}} = \frac{6}{13}.$$

Друго решење. Као и у претходном решењу, тражимо $\frac{SB}{DS}$. Провуцимо кроз M праву паралелну са AB, и нека је P пресечна тачка те праве са BD. Посматрајући праве BD и BC, према Талесовој теореми имамо $\frac{MP}{CD} = \frac{MB}{CB} = \frac{2}{3}$, тј. $MP = \frac{2}{3}CD$, и $\frac{DP}{DB} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}$, тј. $DP = \frac{1}{3}DB$. Посматрајући праве BD и KM, према Талесовој теореми имамо $\frac{BS}{PS} = \frac{BK}{PM} = \frac{\frac{3}{5}AB}{\frac{2}{3}CD} = \frac{9}{10}$. Означимо $BS = 9x$ и $PS = 10x$. Имамо $BS+PS = BP = DB-DP = \frac{2}{3}DB$, тј. $19x = \frac{2}{3}DB$, па следи $x = \frac{2}{57}DB$. Одатле израчунавамо $BS = 9x = \frac{6}{19}DB$ и $DS = DB-BS = \frac{13}{19}DB$, па коначно

$$\frac{P(\triangle BKM)}{P(\triangle DKM)} = \frac{SB}{DS} = \frac{\frac{6}{19}DB}{\frac{13}{19}DB} = \frac{6}{13}.$$

3. Израчунајмо најпре укупан број тачкица на доминама на којима се јављају два различита броја. Посматрајмо све уређене парове различитих бројева од 0 до 9. Сваки број се на првој координати јавља тачно 9 пута (за све могуће вредности друге координате различите од тог броја), па збир свих првих координата износи $9 \cdot (0+1+2+\cdots+9) = 9 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 405$; слично, збир свих других координата износи такође 405, па збир свих бројева који се јављају у овим уређеним паровима износи 910. Приметимо да се домине на којима се јављају два различита броја могу представити управо оваквим уређеним паровима, при чему смо сваку домину на тај начин рачунали два пута (домину на којој су бројеви a и b рачунали смо и као пар (a,b), и као пар (b,a)); дакле, укупан број тачкица на оваквим доминама је тачно половина малопре израчунате вредности, тј. износи 405.

Укупан број тачкица на доминама на којима се с обе стране налази исти број износи $2 \cdot (0+1+2+\cdots+9) = 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 90$. Дакле, решење задатка је $405 + 90 = 495$.

4. У доказу користимо следеће једноставно запажање: ако су x и y природни бројеви такви да су x и xy кубови природних бројева, тада је и y куб природног броја.

a) Ако су ab и bc кубови природних бројева, тада је куб природног броја и $(ab)^2bc$, тј.a^2b^3c. Тада по запажању с почетка следи да је и a^2c куб природног броја.

b) С обзиром на $a^4b = a^3 \cdot ab$, а како су a^4b и a^3 кубови природних бројева, следи да је и ab куб природног броја. Слично, из $b^8c^5 = b^6c^3 \cdot b^2c^2$ добијамо да је b^2c^2 куб природног броја, а из $c^7a = c^6 \cdot ca$ добијамо да је ca куб природног броја (јер су b^8c^5 и b^6c^3, односно c^7a и c^6, кубови природних бројева). Сада из $ab \cdot b^2c^2 = ab^3c^2$ следи да је ab^3c^2 куб природног броја (јер су то оба чиниоца на левој страни), а онда је и ac^2 куб природног броја. Даље, како су ac и ac^2 кубови природних бројева, следи да је и c куб природног броја. Коначно, a је куб природног броја јер су c и ac кубови природних бројева, а b је куб природног броја јер су сада a и ab кубови природних бројева.

5. Претпоставимо прво $x \leqslant \frac{1}{3}$. Тада имамо $|3x-1| = 1-3x$, па се једначина своди на

$$1 = |x - |2x - |3x-1||| = |x - |2x - (1-3x)|| = |x - |5x-1||.$$

За $x \leqslant \frac{1}{5}$ имамо $|5x-1| = 1-5x$, па се једначина даље своди на $1 = |x-|5x-1|| = |x-(1-5x)| = |6x-1|$, тј. $6x-1 = \pm 1$, а ово има решења $x = \frac{1}{3}$ и $x = 0$, од којих прво одбацујемо јер не испуњава услов $x \leqslant \frac{1}{5}$; за $x > \frac{1}{5}$ имамо $|5x-1| = 5x-1$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |5x-1|| = |x - (5x-1)| = |1-4x|$, тј. $1-4x = \pm 1$, а ово има решења $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, која оба одбацујемо јер нису у интервалу $\frac{1}{5} < x \leqslant \frac{1}{3}$.

Претпоставимо сада $x > \frac{1}{3}$. Тада имамо $|3x-1| = 3x-1$, па се једначина своди на

$$1 = |x - |2x - |3x-1||| = |x - |2x - (3x-1)|| = |x - |1-x||.$$

За $x \leqslant 1$ имамо $|1-x| = 1-x$, па се једначина даље своди на $1 = |x-|1-x|| = |x-(1-x)| = |2x-1|$, тј. $2x-1 = \pm 1$, а ово има решења $x = 1$ и $x = -1$, од којих друго одбацујемо јер не испуњава услов $x > \frac{1}{3}$; за $x > 1$ имамо $|1-x| = x-1$, па се једначина даље своди на $1 = |x - |1-x|| = |x-(x-1)| = |1| = 1$, па су у овом случају решења сви бројеви који испуњавају услов $x > 1$.

Дакле, решења једначине су $x = 0$ и сви реални бројеви x за које важи $x \geqslant 1$.

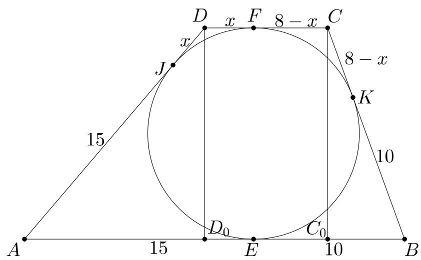
Други разред – Б категорија

1. Приметимо да збир свих дозвољених цифара износи $0+1+2+3+4+5+6 = \frac{6\cdot 7}{2} = 21$. Пошто треба саставити четвороцифрен број од неких међу овим цифрама чији збир треба да износи 15, треба одбацити неке три цифре које имају збир 6. Очигледно, оне могу бити само нешто од: $\{0,1,5\}$, $\{0,2,4\}$ или $\{1,2,3\}$.

У првом случају можемо користити цифре $2,3,4,6$, и њих можемо разместити на $4! = 24$ начина. У другом случају можемо користити цифре $1,3,5,6$, и њих можемо разместити на $4! = 24$ начина. У трећем случају можемо користити цифре $0,4,5,6$, а приликом њиховог размештања морамо пазити на то да 0 не сме бити на првом месту; дакле, за најлевљу цифру бирамо једну од $4,5,6$, а онда преостале три можемо разместити на $3! = 6$ начина, па у овом случају имамо укупно $3\cdot 6 = 18$ бројева.

Дакле, решење задатка је $24+24+18 = 66$.

2. Нека кружница k додирује странице AD, CD и BC у тачкама J, F и K, редом. Нека су C_0 и D_0 подножја нормала из C и D на AB, редом.



Ок 2018 2Б 2

Нека је r полупречник кружнице k. Означимо $x = DJ$. На основу једнакости тангентних дужи из тачке на кружницу, имамо $AJ = AE = 15$, $BK = BE = 10$, $DF = DJ = x$ и $CK = CF = 8-x$. Важи и $D_0E = DF = x$ и $C_0E = CF = 8-x$. Из Питагорине теореме примењене на $\triangle ADD_0$ и $\triangle BCC_0$ имамо $AD_0^2+DD_0^2 = AD^2$ и $BC_0^2 + CC_0^2 = BC^2$, тј.

$$(15-x)^2 + (2r)^2 = (15+x)^2$$

и

$$(10-(8-x))^2 + (2r)^2 = (10+(8-x))^2.$$

Прва једначина се своди на $225 - 30x + x^2 + 4r^2 = 225 + 30x + x^2$, тј. $4r^2 = 60x$, а одатле следи $x = \frac{r^2}{15}$. Друга једначина се своди на $4+4x+x^2+4r^2 = 324-36x+x^2$, тј. $40x + 4r^2 = 320$, а одатле следи $x = \frac{320-4r^2}{40} = \frac{80-r^2}{10}$. Дакле, важи $\frac{r^2}{15} = \frac{80-r^2}{10}$, што се своди на $10r^2 = 1200 - 15r^2$, а одатле израчунавамо $r = \sqrt{\frac{1200}{25}} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

3. Како $\sqrt{2019}$ није природан број ($44^2 = 1936 < 2019 < 2025 = 45^2$), следи да је број n^2 бар петоцифрен. Претпоставимо $n^2 = \overline{2019a}$. Како имамо $142^2 = 20164 < \overline{2019a} < 20449 = 143^2$, такво n не постоји. Претпоставимо сада $n^2 =$

$\overline{2019ab}$, тј. $2019 \cdot 10^2 = 201900 \leqslant n^2 < 202000 = 2020 \cdot 10^2$. Одатле имамо $n \geqslant \sqrt{2019} \cdot 10 > 440$ и $n < \sqrt{2020} \cdot 10 < 450$, али онда испитивањем овог интервала у потрази за n које испуњава задате услове установљавамо $449^2 = 201601 < \overline{2019ab} < 202500 = 450^2$, па такво n не постоји. Претпоставимо сада $n^2 = \overline{2019abc}$, тј. $20190 \cdot 10^2 = 2019000 \leqslant n^2 < 2020000 = 20200 \cdot 10^2$. Одатле имамо $n \geqslant \sqrt{20190} \cdot 10 > 1420$ и $n < \sqrt{20200} \cdot 10 < 1430$. Сада испитивањем овог интервала у потрази за n које испуњава задате услове већ за $n = 1421$ добијамо $1421^2 = 2019241$.

Дакле, најмањи такав природан број n је $n = 1421$.

4. Постављена једначина је еквивалентна са $\sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}} = a - x$. Одатле имамо услов $a \geqslant x$, а након квадрирања једначина се своди на $a^2 - x\sqrt{x^2+a^2} = a^2 - 2ax + x^2$, тј. $x\sqrt{x^2+a^2} = 2ax - x^2$. Једна могућност је $x = 0$ (што јесте решење кад год је испуњен услов $a \geqslant x$, тј. $a \geqslant 0$); иначе нам после скраћивања са x остаје $\sqrt{x^2 + a^2} = 2a - x$, а ово се након квадрирања, уз постављање услова $2a - x \geqslant 0$, тј. $a \geqslant \frac{x}{2}$, своди на $x^2 + a^2 = 4a^2 - 4ax + x^2$, тј. $4ax = 3a^2$. У случају $a = 0$ ово је испуњено увек, тј. тада су решења сви бројеви x за које важи $a \geqslant x$ и $a \geqslant \frac{x}{2}$, тј. $x \leqslant 0$. Претпоставимо сада $a \neq 0$. Тада из последње једначине добијамо још решење $x = \frac{3a}{4}$; ово јесте решење полазне једначине ако су испуњени услови $a \geqslant x$ и $a \geqslant \frac{x}{2}$, тј. $a \geqslant \frac{3a}{4}$ и $a \geqslant \frac{3a}{8}$, а они се своде на $\frac{a}{4} \geqslant 0$ и $\frac{5a}{8} \geqslant 0$, тј. (поново) $a \geqslant 0$.

Дакле, резимирајмо: за $a = 0$ решење једначине је цео интервал $x \in (-\infty, 0]$, за $a > 0$ једначина има два решења, $x = 0$ и $x = \frac{3a}{4}$, а за $a < 0$ једначина нема решења.

5. Посматрајмо магични квадрат као на слици лево. Пошто важи $a+b+c+\cdots+i = 1+2+3+\cdots+9 = 45$ и $a+b+c = d+e+f = g+h+i$, следи $a+b+c = d+e+f = g+h+i = 15$, и такође збирови у свакој врсти и на обе дијагонале износе 15. Приметимо сада:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Ок 2018 2Б 5

$$60 = 4 \cdot 15 = (b+e+h)+(d+e+f)+(a+e+i)+(c+e+g) = (a+b+c+\cdots+i)+3e = 45+3e,$$

одакле следи $e = 5$.

Претпоставимо да је број 9 смештен у угао; без умањења општости, $a = 9$. Тада из $15 = a+b+c = a+d+g$ следи $b+c = d+g = 6$. Међутим, приметимо да два броја могу давати збир 6 само ако су то бројеви 2 и 4 (заиста, могућности $3+3$ отпада јер бројеви морају бити различити, а могућност $1+5$ отпада јер је број 5 већ искоришћен за e), па смо заправо добили контрадикцију.

Према томе, број 9 не може бити смештен у углу, па мора бити на средини неке странице. Узмимо нпр. $b = 9$. Тада слично као малопре добијамо $a+c = 6$, тј. $a = 2$ и $c = 4$ или обратно. Коју год од ове две могућности да одаберемо (а међусобно су аналогне), лако видимо да се остатак магичног квадрата може попунити на јединствен начин (на слици десно је приказано попуњавање за $a = 2$ и $c = 4$.

Дакле, у средини увек мора бити број 5, а затим број 9 можемо уписати на средину неке странице, што даје 4 могућности за број 9. Након уписивања броја 9, за његова два суседа имамо још избор који од њих ће бити 2 а који 4, што су још 2 могућности, а даље попуњавање магичног квадрата је једнозначно одређено. Према томе, различитих магичних квадрата 3×3 укупно има $4\cdot 2=8$.

Трећи разред – Б категорија

1. Број парова различитих шахиста је $\frac{n(n-1)}{2}$, па како је свако са сваким одиграо по k партија, следи $\frac{n(n-1)}{2}k=224$, тј. $n(n-1)k=448=2^6\cdot 7$. Међу бројевима n и $n-1$ један мора бити непаран, а једини непарни делиоци броја 448 су 1 и 7. Немогуће је $n=1$, јер би тада производ на левој страни износио 0. За $n-1=1$ имамо $n=2$ и тада $k=224$, тј. на турниру су играла само двојица шахиста и одиграли су 224 партије. Случај $n=7$ је такође немогућ јер тада имамо $n-1=6$, а десна страна није дељива са 3. Коначно, за $n-1=7$ имамо $n=8$ и тада $k=\frac{448}{8\cdot 7}=8$, тј. на турниру је играло 8 шахиста и свако је са сваким одиграо по 8 партија.

Дакле, могуће је $n=2$ и $k=224$, или $n=8$ и $k=8$.

2. Једначину трансформишемо у $\sin 3x-\sin x=1-\cos 2x=2\sin^2 x$, тј. $2\sin x\cos 2x=2\sin^2 x$. Једна могућност је $\sin x=0$, тј. $x=k\pi$ за $k\in\mathbb{Z}$. У случају $\sin x\neq 0$ после скраћивања са $2\sin x$ остаје $\cos 2x=\sin x$, тј. $1-2\sin^2 x=\sin x$. Уведимо смену $\sin x=t$. Тада добијамо квадратну једначину $2t^2+t-1=0$, а њена решења су $t_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}$, тј. $t_1=\frac{1}{2}$ и $t_2=-1$. Дакле, $\sin x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=-1$, тј. $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ за $k\in\mathbb{Z}$.

Преостаје још пребројати колико се од пронађених решења налази у интервалу $[2,24]$. Због $0<2<\pi$ и $7\pi<24<8\pi$ имамо 7 решења облика $x=k\pi$ (за $1\leqslant k\leqslant 7$). Даље, због $\frac{\pi}{6}<2<\frac{13\pi}{6}$ и $\frac{37\pi}{6}<24<\frac{49\pi}{6}$ имамо 3 решења облика $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ (за $1\leqslant k\leqslant 3$). Затим, због $0<2<\frac{5\pi}{6}$ и $\frac{41\pi}{6}<24<\frac{53\pi}{6}$ имамо 4 решења облика $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ (за $0\leqslant k\leqslant 3$). Најзад, због $-\frac{\pi}{2}<2<\frac{3\pi}{2}$ и $\frac{15\pi}{2}<24<\frac{19\pi}{2}$ имамо 4 решења облика $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (за $1\leqslant k\leqslant 4$).

Дакле, укупан број решења у траженом интервалу износи $7+3+4+4=18$.

3. Из прве једначине следи $b=8-a$, па уврштавањем овога у другу добијамо

$$32=a^2+(8-a)^2+c^2=a^2+64-16a+a^2+c^2=2a^2-16a+64+c^2,$$

тј. $2a^2-16a+32+c^2=0$. Међутим, приметимо да леву страну можемо трансформисати као $2a^2-16a+32+c^2=2(a^2-8a+16)+c^2=2(a-4)^2+c^2$, па да би ово било једнако нули, мора важити $a-4=0$ и $c=0$. Дакле, једино решење задатог система је $a=4$, $b=8-a=4$ и $c=0$.

4. *Прво решење.* Нека је O пресек дијагонала ромба $ABCD$, и нека је a његова страница. Означимо $\measuredangle SOA=\alpha$, $\measuredangle SOC=\pi-\alpha$, $\measuredangle SOB=\beta$, $\measuredangle SOD=\pi-\beta$. Применом косинусне теореме на $\triangle SOB$, $\triangle SOD$, $\triangle SOA$ и $\triangle SOC$, редом, добијамо:

$$SB^2=SO^2+OB^2-2SO\cdot OB\cos\beta;$$

$$SD^2=SO^2+OD^2+2SO\cdot OD\cos\beta;$$

$$SA^2=SO^2+OA^2-2SO\cdot OA\cos\alpha;$$

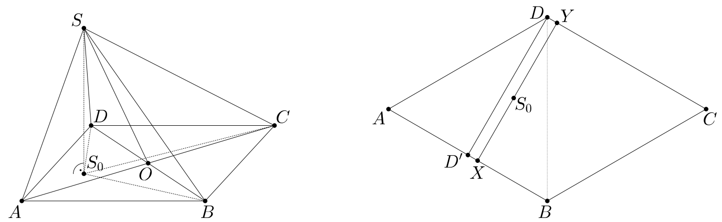
$$SC^2=SO^2+OC^2+2SO\cdot OC\cos\alpha.$$

Сабирањем прве две једнакости и друге две једнакости, уз увршртавање $OB = OD = \frac{a}{2}$, $OA = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $SA = a$, добијамо $SB^2+SD^2 = 2SO^2+\frac{a^2}{2}$ и $a^2+SC^2 = 2SO^2 + \frac{3a^2}{2}$. Из друге једнакости следи $SC^2 = 2SO^2 + \frac{a^2}{2}$, па упоређивањем с првом добијамо $SB^2 + SD^2 = SC^2$.

Друго решење. Уведимо векторе $\vec{s} = \overrightarrow{AS}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Имамо $|\vec{s}| = |\vec{b}| = |\vec{d}| = a$, као и $\vec{b}\cdot\vec{d} = a^2\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$. Такође, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}-\vec{s}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}-\vec{s}$ и $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} = \vec{b}+\vec{d}-\vec{s}$. Одатле:

$$SB^2 = \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SB} = (\vec{b}-\vec{s})\cdot(\vec{b}-\vec{s}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{s} + \vec{s}\cdot\vec{s} = 2a^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{s};$$
$$SD^2 = \overrightarrow{SD}\cdot\overrightarrow{SD} = (\vec{d}-\vec{s})\cdot(\vec{d}-\vec{s}) = \vec{d}\cdot\vec{d} - 2\vec{d}\cdot\vec{s} + \vec{s}\cdot\vec{s} = 2a^2 - 2\vec{d}\cdot\vec{s};$$
$$SC^2 = \overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SC} = (\vec{b}+\vec{d}-\vec{s})\cdot(\vec{b}+\vec{d}-\vec{s}) = 3a^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{d} - 2\vec{b}\cdot\vec{s} - 2\vec{d}\cdot\vec{s} = 4a^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{s} - 2\vec{d}\cdot\vec{s}.$$

Дакле, како десне стране прве две једнакости у збиру дају десну страну треће, то важи и за леве стране, чиме је тврђење доказано.



Ок 2018 3Б 4

Треће решење. Нека је S_0 подножје нормале из темена S на раван $ABCD$. Тада имамо $SB^2 = SS_0^2 + S_0B^2$, $SC^2 = SS_0^2 + S_0C^2$ и $SD^2 = SS_0^2 + S_0D^2$, па се једнакост коју треба доказати своди на $SS_0^2 + S_0B^2 + SS_0^2 + S_0D^2 = SS_0^2 + S_0C^2$, тј.

$$SS_0^2 + S_0B^2 + S_0D^2 = S_0C^2.$$

Нека је a дужина странице ромба $ABCD$ (а тада имамо и $SA = a$). Такође, нека су X и Y подножја нормала из тачке S_0 на праве AB и CD, редом. Радићемо случај када се S_0 налази између тачака X и Y (у супротном се ради слично). Нека је D' подножје висине из D у једнакостраничном $\triangle ABD$. Приметимо, $AX + CY = AD' + D'X + CY = AD' + DY + CY = \frac{a}{2} + a = \frac{3a}{2}$. Сада можемо рачунати:

$$\begin{aligned} SS_0^2 + S_0B^2 + S_0D^2 &= (SA^2 - AS_0^2) + (S_0X^2 + XB^2) + (S_0Y^2 + YD^2) \\ &= a^2 - (AS_0^2 - S_0X^2) + (a - XA)^2 + S_0Y^2 + (a - YC)^2 \\ &= a^2 - AX^2 + a^2 - 2aXA + XA^2 + S_0Y^2 + a^2 - 2aYC + YC^2 \\ &= 3a^2 - 2a(XA + YC) + (S_0Y^2 + YC^2) = 3a^2 - a\cdot 3a + S_0C^2 = S_0C^2, \end{aligned}$$

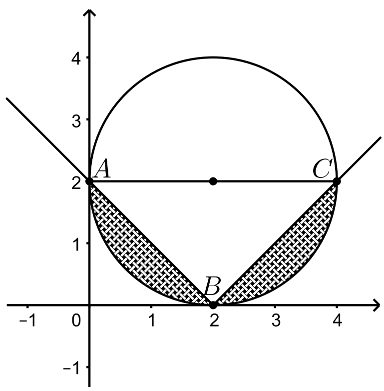
што је и требало доказати.

5. Изразе под кореновима можемо записати као $x(x+3)+1$ и $y(y-1)+3$. Одатле, за ма какве целе бројеве x и y, ови изрази су непарни (јер су производи $x(x+3)$ и $y(y-1)$ парни, будући да им је увек један чинилац паран а други непаран).

Означимо $x^2 + 3x + 1 = a$ и $y^2 - y + 3 = b$. Имамо $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2017$, тј. $\sqrt{a} = 2017 - \sqrt{b}$. Квадрирањем ове једнакости добијамо $a = 2017^2 - 4034\sqrt{b} + b$, тј. $\sqrt{b} = \frac{2017^2+b-a}{4034}$. Одавде видимо да је $\sqrt{b}$ рационалан број, а пошто је b цео број, из ова два закључка следи да је и $\sqrt{b}$ цео број. На исти начин доказујемо и да је $\sqrt{a}$ цео број. Међутим, како су a и b непарни бројеви, то су и $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ непарни бројеви, али у том случају је $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ паран број, па овај збир не може бити једнак 2017, контрадикција. Дакле, полазна једначина нема целобројна решења.

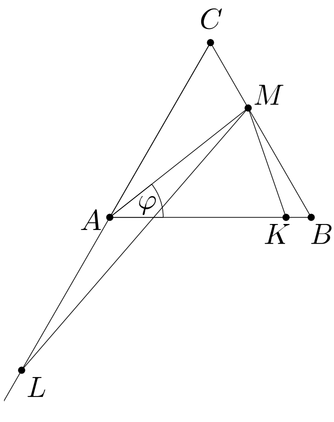
Четврти разред – Б категорија

1. Прва неједначина се своди на $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y \leqslant 0$, тј. $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4 = 2^2$. Скуп тачака које ово испуњавају представљају круг с центром у $(2,2)$ и полупречника 2. Друга неједначина се своди на $y \leqslant \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$; дакле, посматрана фигура представља део малочас описаног круга који се налази испод графика функције $y = |x-2|$, тј. састоји се од два кружна одсечка (видети слику). Ако обележимо тачке $A(0,2)$, $B(2,0)$ и $C(4,2)$, сада лако видимо да се тражена површина може израчунати одузимајући од половине површине круга површину једнакокрако-правоуглог $\triangle ABC$ (чија је катета једнака $2\sqrt{2}$), тј. износи $\frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{(2\sqrt{2})^2}{2} = 2\pi - 4$.



Ок 2018 4Б 1

2. Имамо $24^a + 2^b + 2018^c \equiv 2^b + 2^c \equiv (-1)^b + (-1)^c \pmod 3$ и $10^c + 3^a + 2018^b \equiv 1^c + 2^b \equiv 1 + (-1)^b \pmod 3$. Дакле, други број је дељив са 3 ако и само ако је b произвољан непаран број. Сада, користећи да је b непаран број, видимо да је први број дељив са 3 ако и само ако је c паран број. Дакле, тражени услов испуњавају све тројке (a,b,c) где је a произвољан природан број не већи од 2018, b произвољан непаран број не већи од 2018, и c произвољан паран број не већи од 2018. Према томе, таквих тројки има $2018 \cdot 1009 \cdot 1009 = 2 \cdot 1009^3$.



Ок 2018 4Б 3

3. *Прво решење.* Тражена једнакост се може трансформисати у $MB \cdot MC = (AB - AM)(AB + AM)$, тј. $\frac{MB}{AB-AM} = \frac{AB+AM}{MC}$. Означимо са K тачку на страници AB такву да важи $AK = AM$, а са L тачку на продужетку странице AC преко тачке A такву да важи $AL = AM$. Тада се жељена једнакост своди на $\frac{MB}{BK} = \frac{CL}{MC}$. Дакле, довољно је доказати сличност $\triangle MBK \sim \triangle LCM$.

Означимо $\measuredangle BAM = \varphi$. Тада имамо $\measuredangle MAC = 60^\circ - \varphi$. Како је $\triangle ALM$ једнакокрак а његов спољашњи угао код темена A износи $60^\circ - \varphi$, следи $\measuredangle AML = \measuredangle ALM = 30^\circ - \frac{\varphi}{2}$. У $\triangle MLC$ имамо још $\measuredangle LCM = 60^\circ$, па налазимо и трећи угао: $\measuredangle LMC = 180^\circ - (30^\circ - \frac{\varphi}{2}) - 60^\circ = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$. Како је $\triangle AKM$ једнакокрак и угао наспрам основице износи φ, следи $\measuredangle AKM = \measuredangle AMK = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, одакле директно добијамо $\measuredangle BKM = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$. Дакле, како за $\triangle MBK$ и $\triangle LCM$ важи $\measuredangle LMC = 90^\circ + \frac{\varphi}{2} = \measuredangle BKM$ и $\measuredangle LCM = 60^\circ = \measuredangle MBK$, следи $\triangle MBK \sim \triangle LCM$, што је и требало доказати.

Друго решење. Означимо $a = AB = AC = BC$. Применом косинусне теореме на $\triangle ABM$ добијамо: $AM^2 = a^2 + BM^2 - 2a \cdot BM \cos 60^\circ = a^2 + BM^2 - a \cdot BM$. Одатле имамо $a^2 - AM^2 = a \cdot BM - BM^2 = BM \cdot (a - BM) = MB \cdot MC$, што је и требало доказати.

4. а) Одговор: није могуће.

Сви могући збирови који се могу појавити у врстама и колонама су следећи: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Како се, по услову задатка, мора јавити шест различитих збирова, то се тачно један од ових 7 бројева неће појавити као збир (а сви остали ће се појавити тачно по једном). Приметимо, даље, да рачунајући суму свих тих шест збирова који се појављују, заправо сваки број у таблици рачунамо по два пута (једном у његовој врсти, други пут у његовој колони), па та укупна сума мора бити паран број. Како на горњој листи могућих збирова имамо 4 непарна и 3 парна броја, да би сума неких 6 од тих 7 бројева била парна, следи да број који се не појављује мора бити паран.

Дакле, збир неке врсте или колоне мора бити једнак 3, и збир неке врсте или колоне мора бити једнак -3. Без умањења општости, нека је збир бројева у првој врсти једнак 3, тј. у првој врсти су све јединице. Сада, очигледно, ни у једној колони не можемо имати збир -3, па се збир -3 мора појавити у некој врсти; нека је то, без умањења општости, друга врста, тј. у другој врсти су сви бројеви једнаки -1. Дакле, у свакој колони засад имамо збир 0, па да би (након уписивања бројева у трећој врсти) сва ова три збира била различита, у трећој врсти морају бити различити бројеви, тј. бројеви 1, 0 и -1 (сваки по једном). Међутим, тада збир бројева у трећој врсти износи 0, а такође у једној колони имамо збир $1 + (-1) + 0 = 0$, контрадикција.

b) Одговор: могуће је. Приказујемо једно такво попуњавање таблице.

1	1	1	1
1	1	1	-1
1	0	-1	-1
0	-1	-1	-1

Ок 2018 4Б 4

5. Решења посматране једначине су нуле полинома $f(x) = x^3 - 3x - a$. Како је овај полином трећег степена, он има највише 3 реалне нуле. С обзиром на $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, а како је полином непрекидна функција, следи да $f(x)$ мора имати бар једну нулу. Извод ове функције је $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, па како извод има нуле у тачкама $x = -1$ и $x = 1$, негативан је на интервалу $(-1, 1)$, а позитиван иначе, закључујемо да $f(x)$ расте на интервалима $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$, опада на $(-1, 1)$, има локални максимум за $x = -1$, а локални минимум за $x = 1$. На сваком од интервала $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$ полином $f(x)$ може имати највише по једну нулу, због монотоности на тим интервалима. Полином ће имати укупно три различите реалне нуле ако и само ако важи $f(-1) > 0$ и $f(1) < 0$ тј. $2 - a > 0$ и $-2 - a < 0$, имаће две различите реалне нуле (од тога једну двоструку) ако и само ако важи $f(-1) = 0$ или $f(1) = 0$, а иначе (тј. ако и само ако су вредности $f(-1)$ и $f(1)$ различите од 0 и међусобно истог знака) само једну реалну нулу.

Дакле, посматрана једначина има три различита реална решења за $a \in (-2, 2)$, два различита реална решења за $a \in \{-2, 2\}$, а само једно реално решење за $a \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

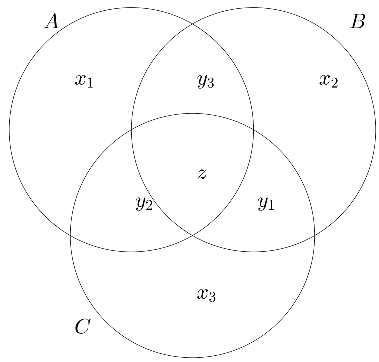
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 10. 3. 2018.

Први разред – А категорија

1. Претпоставимо да такви бројеви t и n_0 постоје. Тада је скуп свих могућих вредности које функција f може имати очигледно једнак $\{f(n) : 1 \leqslant n \leqslant n_0 + t - 1\}$. Како је овај скуп коначан, он има највећи елемент; нека је то M. Нека је сада k произвољан природан број чији се декадни запис завршава са $M + 1$ јединицом. Тада се и број x_k завршава са $M + 1$ јединицом, па да би он уопште био паран (а поготово дељив са 8), из његовог декадног записа морамо избрисати свих тих $M + 1$ јединица с краја. Дакле, $f(k) \geqslant M + 1$, тј. функција f узима вредност већу од M, контрадикција.

2. Означимо са x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 и z кардиналности одговарајућих делова Веновог дијаграма као на слици. Тада имамо $|A \triangle B| = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2k$, $|B \triangle C| = x_2 + x_3 + y_2 + y_3 = 2k$ и $|C \triangle A| = x_1 + x_3 + y_1 + y_3 = 2k$. Сабирањем све ове три једнакости добијамо $2\sum_{i=1}^{3}(x_i + y_i) = 6k$, тј.

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i + y_i) = 3k.$$



Др 2018 1А 2

Нека је D скуп који испуњава услове из поставке. Запишимо $x_1 = x_1' + x_1''$, где смо са x_1' означили кардиналност пресека скупа D и парчета обележеног са x_1, а са x_1'' кардиналност остатка; слично учинимо за све остале парчиће. Такође, означимо $u = |D \setminus (A \cup B \cup C)|$. Тада имамо $|A \triangle D| = x_1'' + y_2'' + y_3'' + z'' + x_2' + x_3' + y_1' + u = k$. Исписујући аналогне формуле за $|B \triangle D|$ и $|C \triangle D|$ и сабирајући те три једнакости добијамо

$$\begin{aligned}3k &= \sum_{i=1}^{3}(2x_i' + x_i'' + y_i' + 2y_i'') + 3z'' + 3u = \sum_{i=1}^{3}(x_i + y_i + x_i' + y_i'') + 3z'' + 3u \\ &= 3k + \sum_{i=1}^{3}(x_i' + y_i'') + 3z'' + 3u.\end{aligned}$$

Одатле одмах добијамо $x_i' = 0$, $y_i'' = 0$ (за $i = 1, 2, 3$), $z'' = 0$ и $u = 0$. То значи да D има празан пресек с парчићима означеним са x_1, x_2 и x_3, и да D не садржи елементе ван $A \cup B \cup C$, као и да D садржи читаве парчиће означене са y_1, y_2, y_3 и z. Тиме је једнозначно одређен скуп D: $D = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

3. Означимо $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle BAF = \varphi$ и $\measuredangle DBE = \theta$. Имамо $\measuredangle BEF = 2\varphi$, $\measuredangle CFA = 90^\circ - \alpha - \varphi$ и $\measuredangle DCB = \measuredangle DBC = 90^\circ - \alpha$. Даље, из тетивности четвороугла $BCDE$ добијамо $\measuredangle DCE = \measuredangle DBE = \theta$, $\measuredangle EDB = \measuredangle ECB = 90^\circ - \measuredangle ACD - \measuredangle DCE = 90^\circ - \alpha - \theta$ и $\measuredangle CEB = \measuredangle CDB = 2\alpha$. Сада можемо израчунати и $\measuredangle EFC = 180^\circ - \measuredangle BEF - \measuredangle CEB - \measuredangle ECF = 90^\circ - 2\varphi - \alpha + \theta$ и $\measuredangle EFG = \measuredangle CFG - \measuredangle EFC = (90^\circ - \alpha - \varphi) - (90^\circ - 2\varphi - \alpha + \theta) = \varphi - \theta$.

Нека је G друга пресечна тачка праве FA и кружнице k_1. На основу тетивности четвороугла $CFGE$ добијамо $\measuredangle ECG = \measuredangle EFA = \varphi - \theta$, и сада израчунавамо $\measuredangle DCG = \measuredangle DCE + \measuredangle ECG = \theta + \varphi - \theta = \varphi = \measuredangle DAG$. Како важи и $\measuredangle DCA = \measuredangle DAC$, права GD је симетрала дужи AC, и одатле $GD \parallel BC$. Даље добијамо $\measuredangle GDB = \measuredangle CBA = 90^\circ - \alpha$ и

$$\measuredangle GDE = \measuredangle GDB - \measuredangle BDE = (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \alpha - \theta) = \theta = \measuredangle DCE.$$

Поред тога, $\measuredangle DEG = 360^\circ - \measuredangle DEC - \measuredangle GEC = 360^\circ - (90^\circ - \alpha) - (180^\circ - (90^\circ - \alpha - \varphi)) = 180^\circ - \varphi$, а онда одатле

$$\measuredangle DGE = 180^\circ - \measuredangle DEG - \measuredangle GDE = 180^\circ - (180^\circ - \varphi) - \theta = \varphi - \theta = \measuredangle EFG.$$

Из добијене две једнакости, на основу везе међу углом између тетиве и тангенте и периферијским углом над том тетивом, следи да је права DG тангента и на k и на k_1, чиме је доказ завршен.

4. На осама се налазе тачке $(-100, 0), \ldots, (100, 0)$ и $(0, -100), \ldots, (0, 100)$, којих има укупно 401 (приметимо да се тачка $(0, 0)$ налази на обе ове листе). Надаље ћемо посматрати само тачке ван оса.

Свакој тачки (x, y) за природне бројеве x и y придружимо јединични квадрат (на целобројној решетки) чије је горње десно теме тачка (x, y). У преостала три квадранта направимо аналогно (симетрично) придруживање квадрата целобројним тачкама. Јасно је да на овај начин имамо бијекцију између скупа целобројних тачака унутар круга (ван оса) и скупа јединичних квадрата који су читави унутар круга, и да је притом број целобројних тачака једнак површини многоугла који сачињавају овакви јединични квадрати. Назовимо тај многоугао $\mathscr{M}$, а круг који посматрамо $\mathscr{K}$. Покушаћемо да оценимо разлику између површина $\mathscr{K}$ и $\mathscr{M}$. Ово ћемо учинити на тај начин што ћемо најпре оценити ту разлику унутар октанта који образују права $y = x$ и позитиван смер x-осе (а потом добијену оцену помножити са 8).

Означимо са $f(i)$ највећи ненегативан цео број j за који важи $i^2 + j^2 \leqslant 100^2$ (другим речима, $(i, f(i))$ је последња целобројна тачка унутар круга на правој $x = i$). Приметимо да је последња целобројна тачка унутар круга на правој $y = x$ тачка $(70, 70)$ (заиста, $2 \cdot 70^2 = 9800 < 100^2 < 10082 = 2 \cdot 71^2$). Важи $f(70) = 70$ и $f(100) = 0$. Даље, за све i за које важи $70 \leqslant i < 100$ правоугли троугао с теменима у тачкама $(i, f(i))$, $(i + 1, f(i + 1))$ и $(i, f(i + 1))$ припада кругу $\mathscr{K}$ али не припада многоуглу $\mathscr{M}$, а његова површина износи $\frac{f(i)-f(i+1)}{2}$. Дакле, разлика између површина круга $\mathscr{K}$ и многоугла $\mathscr{M}$ унутар посматраног октанта износи бар $\sum_{i=70}^{99} \frac{f(i)-f(i+1)}{2} = \frac{f(70)-f(100)}{2} = \frac{70}{2} = 35$, а одатле онда имамо

$$P(\mathscr{K}) - P(\mathscr{M}) \geqslant 8 \cdot 35 = 280.$$

То даје

$$P(\mathscr{M}) \leqslant P(\mathscr{K}) - 280 < 3.15 \cdot 100^2 - 280 = 31220.$$

Дакле, целобројних тачака ван оса има не више од 31220, па је укупан број тачака не већи од $31220 + 401 = 31621 < 31650$, чиме је задатак решен.

Други разред – А категорија

1. Нека су на табли остали бројеви n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ и $n+4$. Међу овим бројевима постоје две групе од по два броја таква да је производ бројева у првој групи једнак производу бројева у другој групи: заиста, ако је Никола замислио бројеве a, b, c и d, и ако је Дуле обрисао, без умањења општости, број cd, тада имамо $(bc)(ad) = (ac)(bd)$ и бројеви bc, ad, ac и bd су на табли. Притом, број на табли који не учествује ни у једној од те две групе помножен с обрисаним бројем даје исти тај производ (заиста, у разматрању малопре неискоришћен број је ab, и он помножен с обрисаним бројем, cd, даје поново производ $abcd$).

Имамо пет могућности за број који не учествује ни у једној од те две групе. Приметимо да, након што одаберемо тај број, да би производ нека два од четири преостала броја био једнак производу друга два, једну групу морају чинити најмањи и највећи број, а другу два средња броја (иначе би производ где учествује најмањи број био мањи од производа где учествује највећи). Дакле, мора важити нека од следећих једнакости: $(n+1)(n+4) = (n+2)(n+3)$, $n(n+4) = (n+2)(n+3)$, $n(n+4) = (n+1)(n+3)$, $n(n+4) = (n+1)(n+2)$ или $n(n+3) = (n+1)(n+2)$. Оне су еквивалентне са, редом, $5n+4 = 5n+6$, $4n = 5n+6$, $4n = 4n+3$, $4n = 3n+2$ и $3n = 3n+2$, па примећујемо да је једина од њих која има решење у скупу природних бројева претпоследња, чије је решење $n = 2$.

Дакле, на табли су остали бројеви 2, 3, 4, 5 и 6. Међу овим бројевима постоји тачно једна подела на две групе од по два броја таква да су производи бројева у групама једнаки: $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$. Према томе, производ неискоришћеног броја (а то је 5) и обрисаног броја такође мора износити 12, па је обрисан број $\frac{12}{5}$.

2. Приметимо:

$$\begin{aligned}10^9 \left(\frac{m}{n}\right)^k &= \overline{x_1 x_2 \ldots x_9{,}x_1 x_2 \ldots x_9 x_1 x_2 \ldots x_9 \ldots} \\ &= \overline{x_1 x_2 \ldots x_9} + \overline{0{,}x_1 x_2 \ldots x_9 x_1 x_2 \ldots x_9 \ldots} = \overline{x_1 x_2 \ldots x_9} + \left(\frac{m}{n}\right)^k,\end{aligned}$$

па добијамо $(10^9 - 1)(\frac{m}{n})^k = \overline{x_1 x_2 \ldots x_9}$, тј. $(10^9 - 1)m^k = \overline{x_1 x_2 \ldots x_9} \cdot n^k$. Јасно, можемо претпоставити да су m и n узајамно прости. Одатле следи

$$n^k \mid 10^9 - 1 = \underbrace{999\ldots999}_{9 \text{ пута}}.$$

Покушаћемо да број с десне стране раставимо на просте чиниоце. Очигледно, $\underbrace{999\ldots999}_{9\text{ пута}} = 9\cdot\underbrace{111\ldots111}_{9\text{ пута}}$, а преостали број је такође дељив са 9, и очигледно је дељив и са 111, па се у њему појављује прост чинилац 37. Дакле, директним дељењем добијамо

$$\underbrace{999\ldots999}_{9\text{ пута}} = 3^4\cdot 37\cdot 333667,$$

при чему за број 333667 нисмо утврдили да ли је прост. Сада, како n^k мора делити горњи број за $k \geqslant 2$ и $n > 1$ (што следи из $n > m \geqslant 1$), могуће је $n = 3$, $n = 9$ или да n буде неки потпун степен који дели број 333667. Доказаћемо да последњи случај није могућ.

Најпре ћемо утврдити да број 333667 није дељив ниједним простим бројем до 70. Ово је (уз довољно времена) могуће учинити и директним испробавањем, но показаћемо и бржи начин. Претпоставимо да је p прост број који дели 333667. Тада p дели и $10^9 - 1$, те имамо $10^9 \equiv 1 \pmod p$, а одатле $o_p(10) \mid 9$ (са $o_m(a)$ означавамо поредак броја a по модулу m, тј. најмањи природан број t за који важи $a^t \equiv 1 \pmod m$), тј. $o_p(10) \in \{1, 3, 9\}$. У прва два случаја добијамо $p \mid 10^1 - 1 = 9$ односно $p \mid 10^3 - 1 = 999$, тј. $p \in \{3, 37\}$, а 333667 није дељив ниједним од ових бројева. Остаје $o_p(10) = 9$. Сада, пошто мора важити $o_p(10) \mid p - 1$, следи да p даје остатак 1 при дељењу са 9. Једини прости бројеви до 70 који ово испуњавају су 19 и 37, а како 333667 није дељиво са 19 (а раније смо већ видели да није дељиво ни са 37), следи да није дељиво ниједним простим бројем до 70.

Даље, број 333667 није потпун квадрат, јер се завршава цифром 7. Дакле, ако би он био дељив неким потпуним степеном, тада бисмо могли записати $333667 = p^2t$, за неки прост број p и неки природан број t, $t > 1$. Међутим, тада бисмо имали $p, t \geqslant 70$ и одатле $p^2t \geqslant 70^3 = 343000 > 333667$, контрадикција.

Према свему реченом, остаје $n = 9$ (и тада $k = 2$), или $n = 3$ (и тада $k \in \{2, 3, 4\}$). Одатле, убацујући за m све могуће вредности мање од n и узајамно просте са n, добијамо:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k \in \left\{\frac{1}{81}, \frac{4}{81}, \frac{16}{81}, \frac{25}{81}, \frac{49}{81}, \frac{64}{81}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{1}{27}, \frac{8}{27}\right\}.$$

3. Означимо са A' тачку симетричну тачки A у односу на BC, са γ и ω кружнице над пречницима BC и DE, редом, а са Ω кружницу описану око $\triangle ABC$. Треба показати да тачка A' припада радикалној оси KL кружница γ и ω. Нека се праве KL и BC секу у тачки F. Центри кружница γ и ω су, редом, средишта M и P дужи BC и DE, па је довољно доказати $A'F \perp MP$.

Тачка M лежи на кружници ω (будући да је AE симетрала угла троугла, следи да је тачка E средиште лука описане кружнице, па важи $EM \perp BC$). Ако права FA поново сече кружницу Ω у тачки N, следи $FA \cdot FN = FB \cdot FC = FK \cdot FL = FD \cdot FM$, што значи да су тачке A, D, M и Nконцикличне. Како кружница описана око $\triangle ADM$ мора пролазити кроз средиште лука $\widehat{BAC}$ (јер симетрала странице BC и симетрала спољашњег угла код A у $\triangle ABC$ обе пролазе кроз средиште тог лука, а притом је четвороугао чија су темена то средиште лука и тачке A, D и M тетиван због правих углова код M и A), следи да је управо тачка N средиште лука $\widehat{BAC}$, а одатле добијамо $\measuredangle DAN = \measuredangle DMN = 90^\circ$. Сада рачунамо $\measuredangle PMF + \measuredangle MFA' = \measuredangle PDM + \measuredangle MFA = \measuredangle ADF + \measuredangle DFA = 90^\circ$, тј. $A'F \perp MP$, чиме је задатак решен.

4. a) Даћемо победничку стратегију за Алису под претпоставком $b < \sqrt{2n-2} - \frac{3}{2}$.

Произвољно фиксирајмо једну од датих тачака U. У сваком потезу Алиса ради следеће. Ако постоји необојена дуж која затвара црвени троугао, Алиса је боји у црвено и побеђује. У супротном, она боји произвољну необојену дуж чији је један крај U. Тврдимо да на овај начин Алиса побеђује пре него што понестане необојених дужи чији је један крај U.

Претпоставимо супротно, да у неком моменту игре нема више необојених дужи чији је један крај U, Алиса је на потезу, а до тада није победила. Нека је k број до тада одиграних потеза. Будући да је Боба обојио у плаво све дужи чији је један крај U које нису црвене, као и све дужи које затварају црвени троугао, укупан број плавих дужи је бар $n-1-k+\binom{k}{2}$. С друге стране, укупан број плавих дужи после k потеза је bk, што значи $n-1-k+\binom{k}{2}-bk \leqslant 0$. Међутим, имамо $n-1-k+\binom{k}{2}-bk = n-1+\frac{k(k-1)}{2}-k(b+1) = n-1+\frac{k(k-2b-3)}{2}$, па ако ово посматрамо као квадратну функцију по b, она достиже минимум у тачки $k = \frac{2b+3}{2} = b+\frac{3}{2}$, и тај минимум износи $n-1-\frac{(b+\frac{3}{2})^2}{2}$; одатле, $n-1-k+\binom{k}{2}-bk \geqslant n-1-\frac{(b+\frac{3}{2})^2}{2} > n-1-\frac{(\sqrt{2n-2})^2}{2} = 0$, контрадикција.

b) Даћемо победничку стратегију за Бобу под претпоставком $b \geqslant 2\sqrt{n}$.

Ако у i-том потезу Алиса обоји у црвено дуж U_iV_i, Боба ће одговорити бојењем $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor$ необојених дужи чији је један крај U_i, и $\lceil \frac{b}{2} \rceil$ необојених дужи чији је један крај V_i (ако нема довољно таквих необојених дужи, онда Боба боји све такве које постоје, а преостали део потеза игра произвољно). Притом, најпре ће обојити оне дужи чији је један крај у U_i, односно V_i, које представљају *непосредну претњу* – необојене дужи које затварају црвени троугао. Доказаћемо да на овај начин Боба побеђује.

Приметимо најпре да у било ком моменту игре број црвених дужи које полазе из било које уочене тачке није већи од $\frac{n-1}{\lfloor \frac{b}{2} \rfloor+1}+1$. Даље, имамо $\frac{n-1}{\lfloor \frac{b}{2} \rfloor+1}+1 < \lfloor \frac{b}{2} \rfloor + 1$, што следи из $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor(\lfloor \frac{b}{2} \rfloor + 1) \geqslant \frac{b-1}{2}(\frac{b-1}{2}+1) = (\frac{b}{2})^2 - \frac{1}{4} > n-1$; према томе, у било ком моменту игре број црвених дужи које полазе из било које уочене тачке није већи од $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor$.

Претпоставимо да је Алиса победила уз овакву Бобину стратегију. То значи да постоје тачке U, V и W такве да су дужи UV, VW и UW обојене црвено. Без умањења општости, претпоставимо да су те дужи обојене црвено баш наведеним редом. Такође, јасно, можемо претпоставити и да је Алиса креирала црвени троугао чим је то било могуће. Након Алисиног бојења дужи VW, Боба је обојио бар $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor$ дужи које полазе из W, а пошто није обојио UW, следи да је у том моменту било више од $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor$ непосредних претњи међу дужима које полазе из W. Али, пошто су све те претње креиране бојењем дужи VW у црвено (наиме, ако би нека таква претња постојала и раније, тада би Алиса већ завршила игру), за сваку од њих мора постојати по једна црвена дуж чији је један крај V (различита од VW), што значи да црвених грана чији је један крај V укупно има бар $\lfloor \frac{b}{2} \rfloor + 2$, контрадикција.

Трећи разред – А категорија

1. Означимо $P(x) = x^3+ax^2+bx+c$. Како важи $ab = 9c$ и $b < 0$, следи да су a и c различитог знака. Приметимо даље, $P(0) = c$ и $P(-a) = -a^3+a^3-ab+c = -8c$. За $a > 0$ имамо $c < 0$ и тада $P(-a) = -8c > 0$ и $P(0) = c < 0$; осим тога, како за све довољно мале x важи $P(x) < 0$ а за све довољно велике x важи $P(x) > 0$ (јер је водећи коефицијент позитиван), следи да P има по једну реалну нулу на сваком од интервала $(-\infty, -a)$, $(-a, 0)$ и $(0, \infty)$. Слично, за $a < 0$ имамо $P(0) = c > 0$ и $P(-a) = -8c < 0$, и тада P има по једну реалну нулу на сваком од интервала $(-\infty, 0)$, $(0, -a)$ и $(-a, \infty)$. Тиме је задатак решен.

2. Прво ћемо доказати да права DE пролази кроз средиште M странице BC. Нека је K пресек дужи AH и DE, уједно и средиште те две дужи (јер је $ADHE$ правоугаоник), а O центар кружнице описане око $\triangle ABC$. Имамо $AH \parallel OM$, и познато је да важи $AH = 2OM$, тј. $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OM}$, па је $AKMO$ паралелограм. Означавајући углове датог троугла уобичајено са α, β и γ, сада израчунавамо

$$\measuredangle HKM = \measuredangle HAO = \alpha - \measuredangle HAC - \measuredangle OAB = \alpha - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \gamma) = \alpha + 2\gamma - 180^\circ$$

и

$$\measuredangle HKD = 2\measuredangle HAD = 2(\measuredangle CAD - \measuredangle HAC) = 2\left(\frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \gamma)\right) = \alpha + 2\gamma - 180^\circ$$

(горњи рачун је рађен под претпоставком $AB < AC$, иначе је слично), па из $\measuredangle HKM = \measuredangle HKD$ следи да тачка M лежи на правој DE.

Можемо израчунати још и $MD \cdot ME = (MK - KD)(MK + KD) = MK^2 - KD^2 = AO^2 - AK^2 = BO^2 - OM^2 = MB^2$, одакле закључујемо $\triangle MBD \sim \triangle MEB$ (имају још и заједнички угао код темена M) и одатле $\measuredangle MBD = \measuredangle MEB$. На сличан начин имамо $\measuredangle MCD = \measuredangle MEC$, па сабирањем ове две једнакости добијамо $180^\circ - \measuredangle BDC = \measuredangle MBD + \measuredangle MCD = \measuredangle MEB + \measuredangle MEC = \measuredangle BEC$, што је и требало показати.

3. Одговор: то су парови $(t^5, t), (t, t^3), (t^8 - t, t^3)$ за $t \in \mathbb{N}$ (и $t \geqslant 2$ у последњенаведеном пару), као и $(7, 4)$ и $(9, 4)$.

Запишимо $x^2 + y^3 = kxy^2 + k$. За $x > ky^2$ имамо $k - y^3 = x(x - ky^2) \geqslant (ky^2 + 1) \cdot 1 > k$, што је немогуће. Следи $x \leqslant ky^2$. За $x = ky^2$ имамо (из малопређашње једнакости) $k = y^3$ и онда $x = y^5$; пар (t^5, t) за $t \in \mathbb{N}$ заиста јесте решење.

Надаље сматрамо $x < ky^2$. Сада имамо $y^3 - k = x(ky^2 - x) \geqslant 1 \cdot (ky^2 - 1) = ky^2 - 1$ (наведена неједнакост важи будући да, за варијабилно x, два посматрана чиниоца имају константан збир, ky^2, па им је производ минималан када је разлика између чинилаца максимална), тј. $y^3 + 1 \geqslant k(y^2 + 1)$, па важи $k < y$. С друге стране, полазна једначина се може записати као квадратна једначина

$$x^2 - (ky^2)x + (y^3 - k) = 0$$

по x. За њену дискриминанту d имамо $d^2 = k^2y^4 - 4y^3 + 4k$, па даље записујемо

$$(kd)^2 = k^4y^4 - 4k^2y^3 + 4k^3 = (k^2y^2 - 2y)^2 + 4(k^3 - y^2).$$

Овај запис даје мотивацију да разликујемо следеће случајеве:

- $k^3 = y^2$:
  Тада k мора бити потпун квадрат, рецимо $k = t^2$, и онда имамо $y = t^3$ и $d = \sqrt{t^{16} - 4t^9 + 4t^2} = t^8 - 2t$. Посматрана квадратна једначина се своди на $x^2 - t^8x + (t^9 - t^2) = 0$, па налазимо решења $x = \frac{t^8 \pm (t^8 - 2t)}{2}$, тј. $x = t$ или $x = t^8 - t$.
- $k^3 > y^2$:
  Тада је $(kd)^2$ потпун квадрат већи од $(k^2y^2 - 2y)^2$ и исте парности, па следи $(k^2y^2 - 2y)^2 + 4(k^3 - y^2) = (kd)^2 \geqslant (k^2y^2 - 2y + 2)^2$, одакле добијамо $k^3 \geqslant (k^2+1)y^2 - 2y + 1 \geqslant k^2y^2$. Међутим, онда имамо $k \geqslant y^2$, а то је немогуће због ранијег $k < y$.
- $k^3 < y^2$:
  Тада је $(kd)^2$ потпун квадрат мањи од $(k^2y^2 - 2y)^2$ и исте парности, па следи $(k^2y^2 - 2y)^2 + 4(k^3 - y^2) = (kd)^2 \leqslant (k^2y^2 - 2y - 2)^2$, што је еквивалентно са $k^3 + (k^2 - 1)y^2 \leqslant 2y + 1$. Ово је могуће само за $k = 1$. Сада остаје $d^2 = y^4 - 4y^3 + 4 = (y^2 - 2y - 2)^2 - 8y$, па из $d^2 \leqslant (y^2 - 2y - 4)^2$ следи $y^2 - 4y - 3 \leqslant 0$. Добијамо $y \leqslant 4$ (а важи и $y \geqslant 2$, због $1 = k^3 < y^2$). За $y = 2$ имамо $d^2 = 16 - 32 + 4 = -28$, што је немогуће. За $y = 3$ имамо $d^2 = 81 - 108 + 4 = -23$, што је немогуће. За $y = 4$ имамо $d^2 = 256 - 256 + 4 = 4$, па налазимо решења $x = \frac{16 \pm \sqrt{4}}{2}$, тј. $x = 7$ или $x = 9$.

4. Нека је S_k број области реда k. Треба доказати неједнакост

$$S_3 \geqslant 4 + S_5 + S_6 + \cdots + S_n.$$

Најпре доказујемо индукцијом да укупан број области износи $1 + \frac{n(n+1)}{2}$. За $n = 1$ тврђење је тривијално. Претпоставимо сада да тврђење важи за $n - 1$, тј. да n правих дели раван на $1 + \frac{(n-1)n}{2}$ области. Како n-та права сече сваку од досадашњих $n - 1$ правих, она пролази кроз укупно n области, и сваку од тих области дели на два дела. Дакле, после повлачења n-те праве број области се повећава за n, па износи $1 + \frac{(n-1)n}{2} + n = 1 + \frac{n^2 - n + 2n}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$, што је и требало доказати.

Под појмом *зид* подразумеваћемо дуж или полуправу која представља границу између неке две области. Пошто сваку праву сече свих преосталих $n - 1$, следи да је свака права подељена на n зидова, те укупно постоји n^2 зидова. Сада ћемо показати да области реда 2 не може бити више од n. Приметимо да су границе сваке области реда два неке две полуправе. Такође приметимо да, због $n > 2$, ниједна полуправа не може истовремено бити граница две области реда 2. Дакле, максималан број области реда 2 је упола мањи од броја зидова који су полуправе, а како њих има $2n$ (на свакој правој по 2), добијамо $S_2 \leqslant \frac{2n}{2} = n$.

Приметимо,

$$2S_2 + 3S_3 + \cdots + nS_n = 2n^2$$

(на левој страни смо сваки зид бројали тачно два пута, по једанпут за сваку од две области којима је он граница). Даље, имамо и (како је показано на почетку)

$$S_2 + S_3 + \cdots + S_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Множењем другог израза са 4 и одузимањем првог од тако добијене једнакости добијамо

$$\begin{aligned} S_3 &= 4 + 2n(n+1) - 2n^2 - 2S_2 + S_5 + 2S_6 + \cdots + (n-2)S_n \\ &= 4 + 2(n - S_2) + S_5 + 2S_6 + \cdots + (n-2)S_n \geqslant 4 + S_5 + S_6 + \cdots + S_n, \end{aligned}$$

што је и требало показати.

Четврти разред – А категорија

1. Приметимо, ако је x једно решење једначине из поставке (за неки фиксиран параметар a), тада је и $-x$ решење. Дакле, ако параметар a испуњава услове из поставке, тада реална решења постављене једначине морају бити бројеви 1 и -1. Сада, користећи чињеницу да је $x = 1$ решење, добијамо $a2^a - 2^{a+1} = 32$, тј. $2^a(a-2) = 32$. Како је 2^a позитивно, следи да и $a - 2$ мора бити позитивно, тј. $a > 2$. Но, тада су 2^a и $a-2$ позитивне и растуће функције, па је и лева страна посматраног израза растућа функција, те може постојати највише један такав параметар a. Притом очигледно $a = 4$ задовољава посматрану једнакост, па је $a = 4$ једина могућа вредност параметра a, и преостаје још проверити да ли у том случају заиста важе услови из поставке.

Задата једначина тада се своди на $4 \cdot 2^{4x^2} - 2^{4+x^2} = 32$, тј. $2^{4x^2} - 2^{2+x^2} = 8$. После смене $y = x^2$ остаје $2^{4y} = 8 + 2^{2+y}$, што је еквивалентно са $2^{3y} = \frac{8}{2^y} + 4$. Приметимо да је за ненегативне y (а важи $y = x^2 \geqslant 0$) лева страна растућа функција по y, а десна опадајућа. Дакле, постоји највише једно y које испуњава ову једнакост, а како је очигледно испуњава $y = 1$, онда је ово и једино решење посматране једначине. Дакле, у полазној једначини мора важити $x^2 = 1$, тј. $x = \pm 1$, чиме се добили да полазна једначина заиста има тачно два реална решења и да се она разликују за 2.

Према томе, једина вредност параметра a која испуњава услове задатка је $a = 4$.

2. а) Одговор: ово је могуће испунити ако и само ако је n паран број.

Приметимо да $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ треба да чини пермутацију скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Даље, после i корака, сваки папир се налази код особе која се налази $\sum_{j=1}^{i} k_j$ места удесно од особе која је на почетку игре држала тај папир. Одатле, и $(k_1, k_1+k_2, \ldots, k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})$, где рачунамо по модулу n, треба да чини пермутацију скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Међутим, имамо $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$, а како је за непарно n ово конгруентно са 0 по модулу n, следи да за непарно n не можемо испунити захтев.

Нека је сада дат паран број n. Одаберимо $k_i = (-1)^{i+1} i \bmod n$, тј. $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}) = (1, n-2, 3, n-4, 5, n-6, \ldots, n-1)$. Индукцијом по i показујемо $\sum_{j=1}^{i} k_j = (-1)^{i+1}\lceil \frac{i}{2} \rceil$ (све посматрамо по модулу n): заиста, база је очигледно испуњена, а у индуктивном кораку имамо $\sum_{j=1}^{i} k_j = \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i = (-1)^i \lceil \frac{i-1}{2} \rceil + (-1)^{i+1} i = (-1)^{i+1}(i - \lceil \frac{i-1}{2} \rceil) = (-1)^{i+1}\lceil \frac{i}{2} \rceil$, што је и требало доказати. Дакле, посматране парцијалне суме су једнаке, редом, $1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots,$ а како ово по модулу n очигледно јесте пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, овим је задатак решен.

b) Одговор: ово је могуће испунити ако и само ако је n непаран број.

Приметимо да сваки играч у сваком кругу прослеђује своју реченицу $\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ пута, а свој цртеж $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ пута. Дакле, укупно ће кроз два круга проследити своју реченицу $2\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ пута, а свој цртеж $2\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$ пута, па да би обе ове вредности биле једнаке $n-1$ (по услову задатка), следи да n мора бити непаран број.

Нека је сада дат непаран број n. Одаберимо у првом кругу, као и малопре, $k_i = (-1)^{i+1} i \bmod n$, а у другом кругу $k'_i = (-k_i) \bmod n$. Како смо видели у делу под а), парцијалне суме заиста чине пермутацију скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ (с тим што за непарно n не важи да је $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$, али то и није потребно у овом делу). Приметимо да ће сваки играч у првом кругу своје реченице прослеђивати играчима који седе $1, 3, 5, \ldots, n-2$ места удесно, а своје цртеже играчима који седе $2, 4, 6, \ldots, n-1$ места улево. Приметимо да ће у другом кругу игре бити управо супротно (реченице ће бити прослеђиване играчима који седе $1, 3, 5, \ldots, n-2$ места *улево*, а то је управо $n-1, n-3, n-5, \ldots, 2$ места *удесно*, што је исти скуп играча који су у претходном кругу добијали цртеже; слично је и обратно), што значи да ће после два круга бити испуњен захтев из поставке, чиме је задатак решен.

3. Одговор: тражено геометријско место тачака чине све тачке које леже на некој оси симетрије задатог многоугла, и притом се налазе у његовој унутрашњости.

Нека је M тачка са наведеном особином. Поставимо посматрани n-тоугао у комплексну раван, на такав начин да темену A_i одговара комплексан број ε^i, за $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, а тачки M одговара комплексан број m. Означимо $P(x) = x^n - 1$; приметимо, како су бројеви ε^1, ε^2, $\ldots$, ε^n тачно сви n-ти корени броја 1, следи $P(x) = x^n - 1 = (x-\varepsilon^1)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^n)$.

Нека су T, A и B три различите тачке у комплексној равни, којима одговарају комплексни бројеви t, a и b, и притом важи $|a| = |b| = 1$. Ако означимо $\varphi = \measuredangle BAT$, важи $\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}} \in \mathbb{R}$, тј. $\frac{t-a}{(b-a)e^{i\varphi}} = \frac{\overline{t}-\overline{a}}{(\overline{b}-\overline{a})e^{-i\varphi}}$, те коришћењем $\overline{a} = \frac{1}{a}$ и $\overline{b} = \frac{1}{b}$ налазимо $t - a = e^{2i\varphi}\frac{b-a}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}(\overline{t} - \frac{1}{a}) = -e^{2i\varphi}ab(\overline{t} - \frac{1}{a})$. Отуда, ако означимо $\varphi_j = \measuredangle A_{j+1}A_jM$ за $j = 1, 2, \ldots, n$ (идентификујемо $A_{n+1} \equiv A_1$), имамо, за све j, $m - \varepsilon^j = -e^{2i\varphi_j}\varepsilon^j\varepsilon^{j+1}(\overline{m} - \varepsilon^{n-j})$. Множењем свих ових једнакости добијамо:

$$P(m) = (-1)^n e^{2i\sum_{j=1}^{n}\varphi_j}\varepsilon^{n(n+2)}P(\overline{m}).$$

Одавде, како имамо (према услову задатка) $\sum_{j=1}^{n}\varphi_j = \frac{(n-2)\pi}{2}$ и $\varepsilon^n = 1$, следи

$$P(m) = (-1)^n e^{i(n-2)\pi}P(\overline{m}) = (-1)^n(-1)^{n-2}P(\overline{m}) = P(\overline{m}).$$

Дакле, ако тачка M задовољава услове задатка, онда важи $m^n = \overline{m}^n$. За $m = 0$ услов је свакако испуњен, а за $m \neq 0$ имамо $m = |m|e^{i\varphi}$ за неко $\varphi \in [0, 2\pi)$, и онда $1 = (\frac{m}{\overline{m}})^n = e^{2in\varphi} = 1$. Из последње једнакости, имајући на уму $\varphi \in [0, 2\pi)$, добијамо $\varphi = \frac{k\pi}{n}$ за неко k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Овим смо доказали да тачка M лежи на једној од оса симетрије задатог n-тоугла.

Докажимо сада да свака тачка са осе симетрије задатог n-тоугла, која је притом у његовој унутрашњости, задовољава наведени услов. Нека је најпре тачка M на оси симетрије која пролази кроз неко теме n-тоугла. Без умањења општости, можемо узети да та оса симетрије пролази кроз тачку A_1. Тада имамо $\measuredangle MA_iA_{i+1} = \measuredangle MA_{n+2-i}A_{n+1-i}$ за све i, $i = 1, 2, \ldots, n$, па важи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_{n+2-i}A_{n+1-i}$, а с друге стране, приметимо да је збир свих углова и на левој и на десној страни ове једнакости укупно једнак збиру свих углова у датом n-тоуглу, тј. $(n-2)\pi$. Одавде директно добијамо $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \frac{(n-2)\pi}{2}$, што је и требало доказати. Слично, ако је M на оси симетрије која је симетрала неке странице, без умањења општости можемо узети да је то страница A_1A_2. Тада имамо $\measuredangle MA_iA_{i+1} = \measuredangle MA_{n+3-i}A_{n+2-i}$, па важи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_{n+3-i}A_{n+2-i}$, а збир леве и десне стране опет износи $(n-2)\pi$, па поново следи $\sum_{i=1}^{n} \measuredangle MA_iA_{i+1} = \frac{(n-2)\pi}{2}$. Тиме је задатак решен.

4. Означимо са M скуп који садржи све такве степене двојке, и претпоставимо супротно, тј. да је скуп M бесконачан. Тада постоји цифра a_0 којом се завршава бесконачно много бројева у M. Даље, постоји цифра a_1 таква да се бесконачно много бројева у M завршава цифрама $\overline{a_1a_0}$, затим постоји цифра a_2 таква да се бесконачно много њих завршава са $\overline{a_2a_1a_0}$ итд. Овако дефинишемо низ цифара $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ Како је збир свих ових цифара мањи од 2018, све оне су нуле почев од неке, тј. постоји N такво да за све $k \geqslant N$ важи $a_k = 0$.

Посматрајмо број $\overline{a_{N-1}a_{N-2}\ldots a_1a_0}$ (јасно, он не мора бити у скупу M). Запишимо га у облику 2^mA, где $2 \nmid A$. По претходном, постоји бесконачно много степена двојке који се завршавају цифрама $\overline{a_{N-1}a_{N-2}\ldots a_1a_0}$ испред којих следи k нула. Дакле, тада за неки степен двојке имамо $2^r = 10^{m+N}X + \overline{a_{N-1}a_{N-2}\ldots a_1a_0} = 10^{m+N}X + 2^mA$, а како очигледно имамо $2^r > 2^m$, док је десна страна дељива са 2^m а није дељива са 2^{m+1}, добијамо контрадикцију. Тиме је задатак решен.

Први разред – Б категорија

1. Нека је K средиште странице BC. Како је $\triangle ABC$ једнакокрак, AK је симетрала странице BC, па на њој лежи и тачка O. Сада имамо $OK = \sqrt{OC^2 - CK^2} = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$ и $AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{324-4} = 8\sqrt{5}$, а одатле $AO = AK - OK = 5\sqrt{5}$. Даље, како је угао код темена M у $\triangle OMA$ прав, рачунамо $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{125-49} = 2\sqrt{19}$. Коначно, имамо $P(OMAN) = 2P(\triangle OMA) = 2 \cdot \frac{OM \cdot AM}{2} = 7 \cdot 2\sqrt{19} = 14\sqrt{19}$.

2. Прва једначина је еквивалентна са $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{2}$, тј. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$. Слично, друга и трећа једначина су еквивалентне са $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{4}{3}$. Сменом $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$ и $c = \frac{1}{z}$ добијамо линеаран систем $b + a = \frac{3}{2}$, $c + b = \frac{5}{6}$ и $a + c = \frac{4}{3}$. Сабирањем све три једначине добијамо $2(a+b+c) = \frac{3}{2} + \frac{5}{6} + \frac{4}{3} = \frac{9+5+8}{6} = \frac{22}{6}$, тј. $a + b + c = \frac{11}{6}$. Одатле рачунамо $c = \frac{11}{6} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$, $a = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1$ и $b = \frac{11}{6} - \frac{4}{3} = \frac{1}{2}$, па следи $x = 1$, $y = 2$ и $z = 3$.

3. Три задата броја при дељењу са три дају остатке 0, 1 и 2 (сваки остатак се појављује тачно једном), па да би збир нека три од њих био дељив са 3, они морају бити или сви једнаки, или сви различити. Дакле, у свакој врсти, свакој колони и на обе дијагонале морају бити или три једнака броја, или три различита броја.

Посматрајмо прву врсту ове таблице. Размотримо прво случај када је она попуњена са три различита броја. Посматрајмо сада централно поље. Који се год број ту налазио, остатак таблице је могуће попунити на јединствен начин (заиста, на сваком пољу у трећем врсти имамо једнозначан избор, будући да се њиме завршава нека колона или дијагонала у којој имамо два већ уписана броја, па ако су та два броја једнака, онда и трећи број мора бити једнак њима, а ако су та два броја различита, онда и трећи број мора бити различит од оба; након што попунимо целу трећу врсту, слично видимо да и на преостала два поља у средњој врсти имамо једнозначан избор). Како први ред можемо попунити на $3 \cdot 2 = 6$ начина, а централно поље потом на 3 начина, укупан број попуњавања у овом случају је 18.

Нека је сада пра врста таблице попуњена са три једнака броја. На сличан начин као малопре утврђујемо да, ма како је попуњено централно поље, остатак таблице је могуће попунити на јединствен начин. Како први ред можемо попунити на 3 начина, а централно поље потом на 3 начина, укупан број попуњавања у овом случају је 9.

Дакле, тражених попуњавања има 27.

4. Докажимо да такви цели бројеви не постоје. Претпоставимо супротно: тројка (x, y, z) испуњава тражени услов. Сабирањем прва три израза добијамо

$$3 \cdot (2017 + 2018^{2018}) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2.$$

Одавде је број $x + y + z$ дељив са 3, па је $(x + y + z)^2$ дељив са 9. Међутим, како број $2017 + 2018^{2018}$ није дељив са 3 (број 2017 даје остатак 1 при дељењу са 3, а број $2018^{2018} = (2018^{1009})^2$ је квадрат броја који није дељив са 3, те даје остатак 1 при дељењу са 3; следи да $2017 + 2018^{2018}$ даје остатак 2 при дељењу са 3), имамо да лева страна није дељива са 9, контрадикција.

5. Одговор: такав троугао постоји.

Посматрајмо кружницу полупречника 2018 и одаберимо једну њену тетиву AB дужине 120. На краћем луку $\widehat{AB}$ одаберимо произвољну тачку C; приметимо, $\measuredangle ACB > 90^\circ$. Тада је кружница описана око $\triangle ABC$ баш полазна кружница, и њен полупречник је 2018. С друге стране, $\triangle ABC$ се налази у кругу над пречником AB (а његов полупречник је 60), будући да је AB пречник и $\measuredangle ACB > 90^\circ$.

Други разред – Б категорија

1. Нека је од датих штапића формиран тангентни четвороугао чије су странице дужина a, b, c и d, редом. Како су у сваком тангентном четвороуглу збирови наспрамних страница једнаки, имамо $a + c = b + d$, а с обзиром на услов $a + b + c + d = 24$, следи $a + c = b + d = 12$. Приметимо да се број 12 може представити као збир дужина нека два постојећа штапића на следеће начине: $12 = 1+11 = 2+10 = 3+9 = 4+8 = 5+7 = 6+6$ (укупно 6 комбинација). Дакле, треба изабрати једну од ових комбинација за бројеве a и c, и једну за бројеве b и d. Уколико бирамо две различите комбинације, то можемо учинити на $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ начина; уколико бирамо двапут исту комбинацију, то можемо учинити на 6 начина. Дакле, укупно имамо 21 начин.

2. Нека је O центар кружнице, а E тачка на кружници таква да је AE пречник. Означимо $\measuredangle BAC = \varphi$ и $\measuredangle DCA = \psi$ (приметимо, $\varphi + \psi = 90°$, по услову задатка). Тада имамо $\measuredangle AOD = 2\psi$ и онда $\measuredangle EAD = \measuredangle OAD = \frac{180° - 2\psi}{2} = 90° - \psi = \varphi$. Према томе, како су периферијски углови над тетивама BC и ED оба једнака φ, следи $ED = BC = 25$. Сада из Питагорине теореме имамо $(2r)^2 = AE^2 = AD^2 + ED^2 = 60^2 + 25^2 = 3600 + 625 = 4225$, па добијамо $r = \frac{\sqrt{4225}}{2} = \frac{65}{2}$.

3. Уведимо смене $t_1 = \sqrt{x-3}$ и $t_2 = \sqrt{7-x}$. Очито, $t_1, t_2 > 0$. Приметимо, $(x-3)(7-x) = -x^2 + 10x - 21$, тј. десну страну постављене једначине можемо записати као $-t_1^2 t_2^2 + 2$; дакле, имамо $t_1 + t_2 = -t_1^2 t_2^2 + 2 \leqslant 2$. С друге стране, због $t_1^2 + t_2^2 = x - 3 + 7 - x = 4$ важи $(t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2 = 4 + 2t_1t_2 \geqslant 4$, одакле имамо $t_1 + t_2 \geqslant 2$. Из добијене две једнакости следи $t_1 + t_2 = 2$, а што видимо да се достиже само у случају $t_1t_2 = 0$, тј. $t_1 = 0$ или $t_2 = 0$. Одатле добијамо да су једина могућа решења полазне једначине $x = 3$ и $x = 7$, а провером утврђујемо да оба ова броја заиста јесу решења.

4. Користићемо геометријску интерпретацију комплексних бројева. Наиме, ако су a и b комплексни бројеви, тада је вредност $|a - b|$ једнака растојању комплексних бројева (прецизније, тачака које они одређују) a и b. Зато скуп свих бројева z_1 који испуњавају услов из поставке представља кружицу k_1 с центром у $-2i$ и полупречником 2, док скуп свих бројева z_2 који испуњавају услов из поставке представља кружницу k_2 с центром у тачки $i - 1$ и полупречником 1. Приметимо да вредност $|z_1 + z_2|$ представља растојање између комплексних бројева z_1 и $-z_2$. Ако са k_2' означимо централносиметричну слику кружнице k_2 у односу на координатни почетак (тј. кружницу с центром у тачки $1 - i$ и полупречником 1), тада, док z_2 описује кружницу k_2, имамо да $-z_2$ описује кружницу k_2', те нама заправо треба максимално растојање које се може достићи између једне тачке на k_1 и једне тачке на k_2'. То растојање се очигледно достиже за тачке назначене на слици, и износи $2 + |(1-i) - (-2i)| + 1 = 3 + |1 + i| = 3 + \sqrt{2}$.

5. Означимо $p^2 + 7^n = m^2$ за неко $m \in \mathbb{N}$. Квадрати целих бројева при дељењу са 3 могу давати само остатке 0 и 1; ако би важило $p \neq 3$, имали бисмо да p^2 даје остатак 1 при дељењу са 3, а како и 7^n даје остатак 1 при дељењу са 3 (јер 7 даје остатак 1 при дељењу са 3), лева страна би давала остатак 2 при дељењу са 3, па не би могла бити једнака m^2. Дакле, остаје једино могућност $p = 3$. Тада имамо $7^n = m^2 - 3^2 = (m-3)(m+3)$. За $m - 3 = 1$ имамо $m = 4$ и $n = 1$, што јесте решење. Претпоставимо сада $m - 3 > 1$. Тада следи $m - 3 = 7^a$ и $m + 3 = 7^b$ за неке $a, b > 1$, па одузимањем добијамо $7^b - 7^a = 6$; међутим, ово је немогуће јер је лева страна дељива са 7 а десна није.

Дакле, једино решење задатка је $p = 3$ и $n = 1$.

Трећи разред – Б категорија

1. Уведимо смену $t = 3x$. Постављена неједначина се своди на $\log_{3t} t + \log_{\frac{t^2}{3}} t^2 < \frac{5}{2}$. Приметимо да $t = 1$ (тј. $x = \frac{1}{3}$) јесте решење (добијамо $0 < \frac{5}{2}$). За $t \neq 1$ важи $\log_{3t} t = \frac{1}{\log_t 3t} = \frac{1}{\log_t 3 + 1}$ и $\log_{\frac{t^2}{3}} t^2 = \frac{1}{\log_{t^2} \frac{t^2}{3}} = \frac{1}{\log_{t^2} t^2 + \log_{t^2} \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 - \frac{\log_t 3}{2}}$, па након смене $u = \log_t 3$ (констатујмо, $u \neq 0$) добијамо неједначину $\frac{1}{u+1} + \frac{1}{1-\frac{u}{2}} < \frac{5}{2}$, тј. $0 > \frac{1}{u+1} + \frac{2}{2-u} - \frac{5}{2} = \frac{4-2u+4u+4-5(u+1)(2-u))}{2(u+1)(2-u)} = \frac{5u^2-3u-2}{2(u+1)(2-u)}$. Бројилац овог разломка има нуле у тачкама $\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{10} = \frac{3\pm 7}{10}$, тј. у тачкама $u = 1$ и $u = -\frac{2}{5}$, позитиван је за $u \in (-\infty, -\frac{2}{5}) \cup (1, \infty)$, а негативан иначе. Именилац има нуле у тачкама $u = -1$ и $u = 2$, позитиван је за $u \in (-1, 2)$, а негативан иначе. Како разломак треба да буде негативан, бројилац и именилац морају бити различитог знака; бројилац је позитиван а именилац негативан за $u \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, док је бројилац негативан а именилац позитиван за $u \in (-\frac{2}{5}, 1)$. Из овог скупа решења треба само искључити вредност $u = 0$ (што смо раније констатовали).

Из $u = \log_t 3$ добијамо $t = 3^{\frac{1}{u}}$, и потом $x = \frac{t}{3} = 3^{\frac{1}{u}-1}$. Дакле, за $u \in (-\infty, -1)$ добијамо $x \in (\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$; за $u \in (2, \infty)$ добијамо $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; за $u \in (-\frac{2}{5}, 0)$ добијамо $x \in (0, \frac{1}{27\sqrt{3}})$; за $u \in (0, 1)$ добијамо $x \in (1, \infty)$. Подсећајући се да је и $x = \frac{1}{3}$ решење (што смо проверили на почетку), узимајући унију свега добијеног закључујемо да је решење дате неједначине $x \in (0, \frac{1}{27\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{9}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (1, \infty)$.

2. Задату једначину можемо квадрирати, уз постављање услова $\sin x \geqslant 0$. Приметимо да израз под кореном можемо трансформисати на следећи начин: $\sin^2 3x - \sin^2 2x = (\sin 3x - \sin 2x)(\sin 3x + \sin 2x) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} \cdot 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cdot 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5x}{2} = \sin x \sin 5x$, те квадрирањем задате једначине добијамо $\sin^2 x = \sin x \sin 5x$, што је еквивалентно са $\sin x(\sin 5x - \sin x) = 0$, тј. $2 \sin x \sin 2x \cos 3x = 0$. Дакле, имамо $\sin x = 0$, $\sin 2x = 0$ или $\cos 3x = 0$, тј. $x = k\pi$, $x = \frac{k\pi}{2}$ или $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, за неко $k \in \mathbb{Z}$. Водећи још рачуна о услову $\sin x \geqslant 0$, добијамо следећа решења:

$$x \in \left\{ k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. Приметимо да ниједан број таквог облика није дељив са 3 (јер му је збир цифара једнак 11, што није дељиво са 3), па се он не може представити као производ три или више узастопних природних бројева (јер би такав производ био дељив са 3). Дакле, остаје још могућност да се неки број таквог облика може представити као производ два узастопна природна броја, тј. у форми $n(n+1)$. Приметимо да, ако се n завршава цифром $0, 1, 2, \ldots, 9$, тада се $n(n+1)$ завршава, респективно, цифром $0, 2, 6, 2, 0, 0, 2, 6, 2, 0$. Дакле, $n(n+1)$ се никада не завршава цифром 8, па не може бити једнако броју посматраног облика. Дакле, не постоји број који испуњава особине из поставке.

4. a) Могуће је. Посматрајмо колинеарне тачке A_1, A_2, A_3 и A_4 такве да важи распоред $A_1 - A_2 - A_3 - A_4$ и $|A_1A_2| = 1$, $|A_2A_3| = 3$ и $|A_3A_4| = 2$. Тада имамо и $|A_1A_3| = 4$, $|A_2A_4| = 5$ и $|A_1A_4| = 6$, па је услов задатка испуњен.

b) Није могуће. Претпоставимо супротно: нека су B_1, B_2, B_3, B_4 и B_5 тачке које испуњавају услове задатка (дакле, растојања између њих су 1, 2,

$\ldots, 10)$. Неке две од њих, рецимо B_i и B_j, морају бити на растојању 1. Нека је B_k произвољна тачка различита од B_i и B_j, и нека важи, без умањења општости, $|B_kB_i| > |B_kB_j|$. Како су $|B_kB_i|$ и $|B_kB_j|$ различити природни бројеви, имамо $|B_kB_i| \geqslant |B_kB_j| + 1$. Међутим, ако би тачка B_k била ван праве B_iB_j, из неједнакости троугла бисмо имали $|B_kB_i| < |B_kB_j| + |B_iB_j| = |B_kB_j| + 1$, контрадикција. Дакле, тачка B_k мора бити на правој B_iB_j, а како је тачка B_k била произвољно одабрана, следи да свих пет тачака морају бити колинеарне.

Без умањења општости, нека су оне у редоследу $B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5$. Тада су B_1 и B_5 две најудаљеније тачке, па је растојање између њих једнако 10. Приметимо, $|B_1B_5| = |B_1B_2| + |B_2B_3| + |B_3B_4| + |B_4B_5| \geqslant 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, па пошто мора бити испуњена једнакост, следи да су вредности $|B_1B_2|$, $|B_2B_3|$, $|B_3B_4|$ и $|B_4B_5|$ у неком поретку једнаке 1, 2, 3 и 4. Ако би важило $|B_2B_3| = 1$, тада, како је бар једна од вредности $|B_1B_2|$ или $|B_3B_4|$ мања од 4, имали бисмо да је нека од вредности $|B_1B_3|$ или $|B_2B_4|$ не већа од 4, што је контрадикција јер су све вредности не веће од 4 већ „искоришћене“. Дакле, $|B_2B_3| \neq 1$, и аналогно $|B_3B_4| \neq 1$, па следи $|B_1B_2| = 1$ или $|B_4B_5| = 1$; без умањења општости, претпоставимо $|B_1B_2| = 1$. Како мора важити $|B_1B_3| > 4$, закључујемо $|B_2B_3| = 4$. Међутим, онда су вредности $|B_3B_4|$ и $|B_4B_5|$ у неком поретку једнаке 2 и 3, па имамо $|B_3B_5| = 2 + 3 = 5$, али и $|B_1B_3| = 1 + 4 = 5$, контрадикција.

5. Нека је O центар, а r полупречник кружнице описане око $\triangle ABC$. Како важи $\arcsin \frac{35}{37} < \frac{\pi}{2}$, угао у темену A је туп, па су O и A са различитих страна праве BC. Нека је O_1 центар а r_1 полупречник кружнице γ. Како γ садржи тачку A и додирује кружницу описану око $\triangle ABC$, следи да је тачка додира управо A, па имамо $OO_1 = r + r_1$. Из синусне теореме за $\triangle ABC$ добијамо $2r = \frac{BC}{\sin \measuredangle BAC} = \frac{70}{\frac{35}{37}} = 74$, тј. $r = 37$. Нека је M подножје нормале из O на праву BC (то је уједно и средиште странице BC), и нека је K подножје нормале из O на праву O_1D. Из Питагорине теореме примењене на $\triangle OMB$ добијамо $OM^2 = 37^2 - 35^2 = 144$, тј. $OM = 12$. Имамо $OK \parallel BC$, и O и K су, у односу на тачку O_1, са супротне стране праве BC. Како је $OMDK$ правоугаоник, имамо $DK = MO = 12$, па израчунавамо $O_1K = O_1D + DK = r_1 + 12$, као и $OK = MD = MB + BD = 35 + 10 = 45$. Сада применом Питагорине теореме на $\triangle O_1KO$ имамо $O_1O^2 = OK^2 + O_1K^2$, тј. $(37 + r_1)^2 = 45^2 + (12 + r_1)^2$, што се своди на $1369 + 74r_1 = 2025 + 144 + 24r_1$, одакле добијамо $r_1 = \frac{800}{50} = 16$.

Четврти разред – Б категорија

1. Из прве једначине изразимо $y^2 = x^2 - 16$ и уврстимо у другу, чиме добијамо $3x(x^2 - 16) + x^3 = 260$, што се своди на $x^3 - 12x - 65 = 0$. Директном провером установљавамо да је једно решење $x = 5$. Дељењем полинома $x^3 - 12x - 65$ са $x - 5$ налазимо $x^3 - 12x - 65 = (x-5)(x^2+5x+13)$, а како израз у другој загради има негативну дискриминанту ($5^2 - 4 \cdot 13 = -27$), закључујемо да је $x = 5$ једино решење. Враћањем у полазни систем добијамо $y^2 = 5^2 - 16 = 9$, тј. $y = \pm 3$, па систем има два решења: $(x, y) = (5, 3)$ и $(x, y) = (5, -3)$.

2. Нека је α угао код темена A. Тада важи $a = c \sin \alpha$ и $b = c \cos \alpha$, па се дата једнакост своди на $3 \sin \alpha + \cos \alpha = 4 \sin^3 \alpha$, тј. $3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = -\cos \alpha$.

Ово је даље еквивалентно са $\sin 3\alpha = -\sin(90^\circ - \alpha)$. Како је α оштар угао, важи $0^\circ < 3\alpha < 270^\circ$, па може бити једино $3\alpha = 180^\circ + (90^\circ - \alpha)$, одакле израчунавамо $\alpha = \frac{270^\circ}{4} = 67.5^\circ$ и $\beta = 90^\circ - \alpha = 22.5^\circ$.

3. Означимо $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, и нека је f једна функција која задовољава дати услов. Ако за неко c важи $f(c) = c$, тада имамо $f(f(c)) = f(c) = c$, па је услов задатка задовољен за c. Ако за неке a и b, $a \neq b$, важи $f(a) = b$, тада из датог услова добијамо да мора бити $f(b) = f(f(a)) = a$; потом имамо и $f(f(b)) = f(a) = b$, па је услов задатка задовољан за a и b. Сада је јасно да функција f задовољава дате услове ако и само ако је испуњено: за неке елементе c скупа A важи $f(c) = c$, а преостали се могу поделити у парове $\{a, b\}$ такве да важи $f(a) = b$ и $f(b) = a$.

Дакле, број елемената c скупа A за које важи $f(c) = c$ је 7, 5, 3 или 1. Ако их је 7, тада имамо једну функцију f; ако их је 5, тада преостали пар можемо изабрати на $\binom{7}{2} = 21$ начин; ако их је 3, тада преостале парове можемо изабрати на $\frac{1}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2} = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 10 = 105$ начина (први пар можемо изабрати на $\binom{7}{2}$ начина, други на $\binom{5}{2}$ начина, а делимо са 2 јер редослед одабира ових парова није битан); ако их је 1 тада преостале парове можемо изабрати на $\frac{1}{3!}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = \frac{1}{6} \cdot 21 \cdot 10 \cdot 3 = 105$ начина (први пар можемо изабрати на $\binom{7}{2}$ начина, други на $\binom{5}{2}$ начина, трећи на $\binom{3}{2}$ начина, а делимо са 3! јер редослед одабира ових парова није битан).

Према томе, број тражених функција износи: $1 + 21 + 105 + 105 = 232$.

4. Да би посматрана функција била парна, за сваки реалан број x треба да буде испуњено $\sin(ax^2 + bx + c) = \sin(ax^2 - bx + c)$, тј.

$$0 = \sin(ax^2 + bx + c) - \sin(ax^2 - bx + c) = \sin(bx)\cos(ax^2 + c).$$

За $b = 0$ једнакост је очигледно испуњена, који год бројеви били a и c. Претпоставимо сада $b \neq 0$. Посматрајмо интервал $(0, |\frac{\pi}{b}|)$. За било које x из овог интервала имамо $\sin(bx) \neq 0$, те тада мора важити $\cos(ax^2 + c) = 0$, тј. за свако x из тог интервала мора бити испуњено $ax^2 + c = \frac{\pi}{2} + k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$. У случају $a = 0$ морало би важити $c = \frac{\pi}{2} + k\pi$, а видимо да је заиста за свако c оваквог облика посматрани косинус једнак нули, па су тиме испуњени услови задатка. Претпоставимо сада $a \neq 0$. Тада, ако x пролази интервалом $(0, |\frac{\pi}{b}|)$, онда $ax^2 + c$ пролази интервалом $(c, \frac{a\pi^2}{b^2} + c)$, а очигледно је немогуће да сви бројеви из овог интервала буду облика $\frac{\pi}{2} + k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$ (у датом интервалу бројева оваквог облика има само коначно много); дакле, у овом случају не постоји тројка (a, b, c) која испуњава услове задатка.

Дакле, одговор је: тражене тројке су све тројке облика $(a, 0, c)$ (где су a и c произвољни реални бројеви), као и све тројке облика $(0, b, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ (где је b произвољан реалан број а k произвољан цео број).

5. Запишимо постављену једначину у облику

$$x^2(y + 1) + x(2y^2 + 3y + 3) + y^3 + 2y^2 + y + 2 = 0.$$

Приметимо да за $y = -1$ преостаје $2x + 2 = 0$, тј. пар $(-1, -1)$ је једно решење. Претпоставимо сада $y \neq -1$. Тада једначину можемо посматрати као квадратну једначину по x; израчунајмо њена решења:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-(2y^2+3y+3) \pm \sqrt{(2y^2+3y+3)^2 - 4(y+1)(y^3+2y^2+y+2)}}{2(y+1)} \\ &= \frac{-2y^2-3y-3 \pm \sqrt{4y^4+12y^3+21y^2+18y+9-4y^4-12y^3-12y^2-12y-8}}{2(y+1)} \\ &= \frac{-2y^2-3y-3 \pm \sqrt{9y^2+6y+1}}{2(y+1)} = \frac{-2y^2-3y-3 \pm (3y+1)}{2(y+1)}, \end{aligned}$$

тј. $x = \frac{-2y^2-2}{2(y+1)} = \frac{-(y^2+1)}{y+1}$ или $x = \frac{-2y^2-6y-4}{2(y+1)} = \frac{-2(y+1)(y+2)}{2(y+1)} = -(y+2)$. У случају $x = -(y+2)$ приметимо да за свако целобројно y које испуњава $|y| \leqslant 18$ имамо $|x| \leqslant 20$, тј. и одговарајуће x задовољава постављени услов, па решења овог типа укупно има 36 (сваком таквом y одговара тачно једно x, при чему, подсетимо се, искључујемо $y = -1$). Посматрајмо сада случај $x = \frac{-(y^2+1)}{y+1}$. Приметимо, $\frac{-(y^2+1)}{y+1} = \frac{-(y^2-1)-2}{y+1} = \frac{-(y-1)(y+1)}{y+1} - \frac{2}{y+1} = 1-y-\frac{2}{y+1}$, те је x цео број ако и само ако $y+1 \mid 2$, тј. $y+1 \in \{-2,-1,1,2\}$, тј. коначно $y \in \{-3,-2,0,1\}$. Дакле, ту добијамо и следеће парове као решења: $(x,y) \in \{(5,-3),(5,-2),(-1,0),(-1,1)\}$, тј. још 4 решења.

Дакле, укупан број решења која испуњавају постављене услове износи: $1+36+4=41$.

Садржај