ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2009/2010.

Београд, 2010.

Крагујевац

Крагујевац је привредни, културно–просветни, здравствени и политички центар Шумадије и Поморавља и суседних региона. Налази се у срцу Шумадије и Србије. Подигнут је на обалама Лепенице у Крагујевачкој котлини, где се дотижу крајњи огранци шумадијских планина: Рудника, Црног Врха и Гледићких планина.

Са 180 252 становника (по попису из 2002. године) по величини је први град у Шумадији, а четврти у Републици Србији. На градском подручју живи 147 473 становника, а на сеоском 32 779.

Крагујевац у последњих неколико година доживљава велики препород и од града са непопуларним епитетом „долина глади" преображава се у град визије и будућности, у град са великом перспективом, у град који у сваком смислу оправдава своје централно место у региону, не само географски, већ у свим сегментима модерног живота својих грађана. Жеља за напредовањем Крагујевца рађа се из љубави према овом граду и налази се изнад свих осталих интереса. Крагујевчани у томе нису подељени, а то је једини пут препорода града који нам је у срцу.

Крагујевац је име добио по птици Крагуј, која је у средњем веку коришћена за лов, а данас заузима почасно место на градском грбу.

Име града први пут је споменуто у турском попису из 1476. године као „Крагујофча", трг са 32 куће. Од таквог насеља, Крагујевац је израстао у значајан град, по много чему први у Србији.

Крагујевац је од 1818. до 1841. године, одлуком тадашњег српског владара Кнеза Милоша Обреновића, био ПРВИ ПРЕСТОНИ ГРАД модерне српске државе.

У Крагујевцу је 1835. године усвојен први српски Устав, познат као „Сретењски".

У Крагујевцу је 1833. године основана прва гимназија у Србији, а 1838. „Лицеј", претеча првог српског Универзитета.

У Крагујевцу је зачета позоришна уметност у Србији, 1835. године, када је основано прво српско позориште под називом „Књажеско – сербски театар".

У Крагујевцу су покренуте прве српске новине – „Новине србске".

У 20. веку, Крагујевац доживљава индустријску експанзију. Широм света град постаје познат по производњи аутомобила у Фабрици „Застава", која је партнер компанији ФИАТ.

Паралелно са индустријализацијом, у другој половини 20. века, на коренима постављеним више од 100 година раније, у Крагујевцу се развијају здравство и образовање. Крагујевац и на том плану постаје центар Србије, пре свега захваљујући модерно опремљеном Клиничком центру, чије услуге користи око два милиона грађана централне Србије, као и међународном угледу Универзитета са 11 факултета. Високо образовање на Универзитету у Крагујевцу стиче око 12.000 студената из целе Србије и иностранства, који имају добре услове за живот у модерно опремљеним студентским домовима.

Као град богате историје, Крагујевац са очуваном културно–историјском баштином на сваком кораку подсећа на своју прошлост уткану у темеље будућности Србије. Најзначајније знаменитости, које се од осталих посебно издвајају због давних времена и догађаја које одсликавају, сконцентрисане су уз реку Лепеницу, са њене десне и леве стране, где је Крагујевац и настајао.

Током године, град је домаћин бројних међународних и локалних манифестација, које се, углавном, приређују у месецима у којима град обележава значајне датуме. Тако, у мају, на програму су свечаности у оквиру прославе Ђурдевдана, 6. маја – Дана и Славе Крагујевца, а октобар је посвећен сећању на жртве стрељања 1941. године. Али и у осталим периодима године, град је препун збивања за сваки узраст и свачији укус.

Тренуци за уживање могу се провести на језеру у Шумарицама, познатом и под популарним називом „крагујевачко море”. Поред језера, омиљено стециште Крагујевчана током лета су и Градски базени. Мање језеро, под називом „Бубањ”, надомак центра града, са богатом флором и фауном, представља оазу мира.

Градски стадион „Чика Дача”, капацитета 15.000 места, домаћин је значајних фудбалских утакмица и атлетских митинга, а велике спортске манифестације одржавају се и у Спортској дворани „Језеро”.

Крагујевац је град богате историје, културне баштине, град индустрије, град младих, град традиције и град окренут будућности. Ко једном дође – засигурно ће се још који пут вратити. . . Уосталом, још 1874. године, Чех, Константин Јиричек, за Крагујевац је рекао: „Београд је Европа, али, ако хоћете да видите право српско место, идите да видите Крагујевац. . . ”

ЛИЧНА КАРТА ПРВЕ КРАГУЈЕВАЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

Прва крагујевачка гимназија је најстарија гимназија у Србији. Основана је 1833. године. У овој школи је у току њене дуге традиције стицао знање велики број познатих људи у науци и уметности. Велики број политичара, државника и војсковођа су били ђаци или професори Прве крагујевачке гимназије. У току свог постојања школа је делила судбину народа Србије.

Године 1887. када је Крагујевац имао десетак хиљада становника, завршена је нова зграда Крагујевачке гимназије, једно од најлепших здања у граду до данашњих дана. Пројекат је урађен у Бечу, а изградња је трајала четири године. Зграда је под заштитом државе као културно–историјски споменик. Први радни дан у новој згради био је 21. октобар 1887. године, као симболично предсказање најцрњег датума у историји школе.

Велики број ђака и професора стрељан је 21. октобра 1941. године. Стрељање је извршила немачка војска. Тај дан се сваке године обележава манифестацијом „Велики школски час” у Шумарицама код споменика стрељаним ђацима.

Прва крагујевачка гимназија данас школује око 1100 ученика. Школа образује ученике природно–математичког и друштвено–језичког смера. Од 1992. године у Првој крагујевачкој гимназији се образује и по једно специјализовано одељење, које ради по програму Математичке гимназије. Од 2007. године уведено је по једно огледно одељење седмог и осмог разреда основне школе за ученике надарене за математику.

Ученици Прве крагујевачке гимназије учествују на такмичењима у знању из свих наставних предмета и ту постижу веома добре резултате. Велики број ученика осваја награде на републичком нивоу, а неки ученици су учествовали у екипама које су представљале нашу земљу на интернационалним такмичењима. Већина ученика су успешни студенти на домаћим и страним универзитетима.

Прва крагујевачка гимназија је традиционално уживала углед, како због стручности и квалитета својих професора, тако и, пре свега, због својих ученика, амбициозних и увек жељних знања. Приликом прославе јубилеја, 175. године постојања, Прва крагујевачка гимназија је проглашена школом од посебног интереса за Републику Србију.

Сваке године се велики број такмичења организује у Првој крагујевачкој гимназији. Домаћин је и организатор Позоришних сусрета гимназија Србије. Прва крагујевачка гимназија је у мају 2009. године била домаћин 26. Балканске математичке олимпијаде ученика средњих школа.

Поносећи се својом традицијом, обавеза је да углед који је стицала преко генерација својих ђака и професора, чува и подиже, школујући будуће интелектуалце.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике ученика средњих школа, школска година 2009/2010.

1. Балтић мр Владимир, Факултет организационих наука, Београд
2. Баралић Ђорђе, Математички институт САНУ, Београд
3. Димитријевић мр Слађана, ПМФ, Крагујевац
4. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад
5. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
6. Ђукић Душан, Универзитет у Торонту, Канада
7. Живаљевић др Раде, Математички институт САНУ, Београд
8. Илић Александар, ПМФ, Ниш
9. Кнежевић мр Миљан, Математички факултет, Београд
10. Кртинић мр Ђорђе, Математички факултет, Београд, председник
11. Лукић Миливоје, Калтех, САД
12. Матић Иван, Беркли, САД
13. Милићевић др Ђорђе, Универзитет у Мичигену, САД
14. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
15. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
16. Радовановић Марко, Математички факултет, Београд
17. Сеничић мр Александар, Гимназија, Краљево
18. Стојаковић др Милош, ПМФ, Нови Сад
19. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
20. Шобот др Борис, ПМФ, Нови Сад

Превод на мађарски језик:

1. Пеић др Хајналка, Грађевински факултет, Суботица
2. Рожњик мр Андреа, Грађевински факултет, Суботица

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Први разред, А категорија

1. Нека су T_1 и T_2 тежишта $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$, редом. Доказати да важи

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3 \cdot \overrightarrow{T_1T_2}\,.$$

2. Природан број n даје остатак 35 при дељењу и са 2009 и са 2010. Колики је остатак броја n при дељењу са 42?

3. Нека је CD симетрала $\sphericalangle BCA$ троугла ABC ($D \in AB$) и $AC + BD = BC + AD$. Доказати да је $\triangle ABC$ једнакокрак.

4. Да ли број $2010^{2010} + 10^{2011}$ има већи број цифара у декадном запису од броја 2010^{2010}?

5. Свако од јединичних поља таблице 3×3 обојено је једном од три боје. Колико има различитих бојења код којих су свака два суседна јединична поља (тј. поља са заједничком страницом) различите боје?

Први разред, Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи:

1° $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

2° $2 \in A \setminus B$,

3° $3 \in B \setminus A$,

4° $A \cap \{4, 5, 6\} = \emptyset$ и

5° $B \cap \{1\} = \emptyset$.

2. Нека је $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $g(5 - 2x) = 4x - 7$.

(а) Одредити $g(x)$.

(б) Одредити функцију f, ако је $f = g \circ g$.

(в) Доказати да је f бијекција и одредити $f^{-1}(x)$.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је број $n(n-3)(n^2 - 3n + 14)$ дељив са 8.

4. Видети други задатак за први разред А категорије.

5. Видети пети задатак за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Нека је $m \in \mathbb{R}$ такав да једначина $x^2-2(m-1)x+m+5=0$ има реалне и различите корене. Доказати да је тачно један корен те једначине у интервалу $(-2,3)$.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог $\triangle ABC$, а M средиште странице BC. Права која садржи тачку H и нормална је на праву HM сече праве AB и AC у E и F, редом. Доказати да је $HE = HF$.

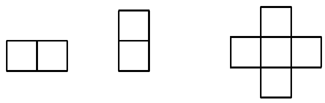
3. Одредити све природне бројеве n чији је кубни корен једнак броју који се из n добија брисањем његове последње три цифре у декадном запису.

4. Доказати да постоји бесконачно много уређених парова $(x, y) \in (0,\pi)^2$, тако да је скуп

$$\left\{\sin^2 x + \sin^2 y, \sin^2(x+y), 1\right\}$$

двоелементан, а скуп $\{\sin nx + \sin ny \mid n \in \mathbb{N}\}$ коначан.

5. Да ли се табла 8×8, из које је исечено доње-лево и горње-десно поље, може поплочати фигурама облика:



?

Други разред, Б категорија

1. Одредити све комплексне бројеве z, тако да важи $z-\overline{z} = 4-2i-|z-i|$.

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$x^2+x+\frac{3}{x^2+x+1} \leqslant 3.$$

3. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle ABC = 2 \cdot \sphericalangle BCA$. Нека је BE $(E \in AC)$ симетрала $\sphericalangle ABC$. Доказати да је $AB^2 = AC \cdot AE$.

4. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 3$ за које је број $n^2+9n-22$ прост.

5. Видети први задатак за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\log_{\sqrt{x}} \log_2\left(4^x - 12\right) \leqslant 2.$$

2. Одредити највећи заједнички делилац бројева $1+2010!$ и $1+(2010!)!$.

3. Нека је D средиште лука $\widehat{BC}$ описане кружнице $\triangle ABC$ који не садржи тачку A, а M тачка полигоналне линије $B-A-C$ најближа тачки D. Ако је $AC > AB$, доказати да је $CM = \dfrac{AC-AB}{2}$.

4. Нека је S скуп тачака (x, y) у координатној равни чије су координате цели бројеви који задовољавају $0 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 4$ и нека је одабрана 21 тачка из S. Доказати да постоји правоугаоник чија су темена међу одабраним тачкама, а странице паралелне координатним осама.

5. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle BCA > 90°$ и $\sphericalangle CAB < \sphericalangle ABC$. Тангента на описану кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P. Нека је M тачка на k, таква да је $PM = PC$ (различита од тачке C), N пресек правих CM и AB, а D пресек описане кружнице $\triangle AMN$ и праве AP (различит од A). Доказати да је $CD \parallel AB$.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 1-a, \\ ax & - & y & + & z & = & -1, \\ x & - & ay & - & z & = & 0. \end{array}$$

2. У лопту је уписана правилна тространа пирамида са правим ивичним угловима при врху. Одредити однос дужина висине пирамиде и полупречника лопте.

3. Нека је $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ако је

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d},$$

доказати да је $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{b+d}{c}$.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Колико решења има скуповна једначина

$$X \cup Y = \{1, 2, \ldots, n\}?$$

5. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Доказати да за $x > 0$ важи неједнакост

$$1 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2 - \frac{x^3}{16} < (1+x)^{\frac{3}{2}} < 1 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{3}{8} \cdot x^2.$$

2. На таблу 8×8 поставити највећи могући број топова, тако да сваки од њих туче тачно једног од преосталих топова.

3. У оштроуглом $\triangle ABC$ је $BC > CA$. Нека је O центар описане кружнице, а H ортоцентар овог троугла и F подножје нормале из C на AB. Нормала на OF у F сече AC у P. Доказати да је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle CAB$.

4. Одредити све просте бројеве p, такве да $p^{2010} \mid 2010^{p^{2010}} + 1$.

5. Видети пети задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Одредити вредности $m \in \mathbb{R}$ за које систем

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1, \\ 2x & + & 3y & + & mz & = & 3, \\ x & + & my & + & 3z & = & 2 \end{array}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева и одредити то решење.

2. Вектори $\overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{a} - 3 \cdot \overrightarrow{b}$ су колинеарни. Доказати да су вектори $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ колинеарни.

3. Видети други задатак за трећи разред Б категорије.

4. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}.$$

5. Колико има реалних $x \in \left[2009^2\pi, 2010^2\pi\right]$ за које је низ

$$\sin x,\ \sin 3x,\ \sin 5x, \ldots, \sin(2n+1)x, \ldots$$

аритметички?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

Први разред, А категорија

1. Нека су $x, y, z \in \mathbb{N}$ за које важи $x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$ и $x^2 = 2(y+z)$. Одредити $x + y + z$.

2. Доказати или оповргнути тврђење:

> За сваки природан број n постоји природан број x који је дељив са n, збир цифара му је једнак n и у декадном запису се завршава низом цифара које чине декадни запис броја n.

3. Нека је ABC оштроугли троугао. Кружница k, над пречником AB, сече странице AC и BC у тачкама M и N, редом. Тангенте кружнице k у тачкама M и N секу се у тачки P. Ако је $CP = MN$, одредити $\sphericalangle BCA$.

4. У $\triangle ABC$ у коме је $BC \neq CA$ тачке H, T и O су ортоцентар, тежиште и центар описане кружнице, редом. Нека су тачке P и Q симетричне тачкама T и H, редом, у односу на O. Нека је D средиште AB, R тежиште $\triangle ABQ$ и U пресек правих OD и RT. Доказати да је U тежиште $\triangle DPT$.

5. На колико начина шест парова може да седне у ред биоскопа који има 20 места, ако сваки пар жели да седне на суседна места?

Први разред, Б категорија

1. Колико решења има једначина $|2x+1|+|x-1| = 2-x$ у скупу реалних бројева?

2. У правоуглом $\triangle ABC$ над катетом BC као пречником конструисана је кружница која сече хипотенузу AB у тачки E. Тангента ове кружнице у тачки E сече катету AC у тачки D. Доказати да је $\triangle ADE$ једнакокраки.

3. Одредити цифру десетица броја 2011^{2010} (у декадном запису).

4. Ана, Беба, Весна и Гоца су одлучиле да посете Дацу. Договориле су се да дођу у различита времена (у току истог дана). Испоставило се следеће:

Ана је посетила Дацу у 8 сати,
Беба је посетила Дацу у 9 сати,
Весна је посетила Дацу у 10 сати,
Гоца је посетила Дацу у 11 сати,
али није познато да ли је то било ујутро или увече.

Даца је имала бар једну посету између Ане и Бебе.

Ана није посетила Дацу и пре Весне и пре Гоце.

Весна није посетила Дацу између Бебе и Гоце.

Одредити којим редоследом су посећивали Дацу.

5. Видети први задатак за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Нека је $ABCDE$ правилан петоугао. Пресечне тачке његових дијагонала чине правилан петоугао $A_1B_1C_1D_1E_1$. Одредити однос површина ова два петоугла.

2. На турниру учествује $n \geqslant 2$ играча. Предвиђено је да свака два играча одиграју по једну партију. Међутим, играч A је напустио турнир након k одиграних партија ($1 \leqslant k \leqslant n-3$), а играч B након једне одигране партије. Остали играчи нису напуштали турнир. На турниру је одиграно 55 партија. Да ли су A и B играли међусобно?

3. Нека су M, N, P, Q колинеарне тачке, тако да важи $M - N - P - Q$ и $MN = 4$, $NP = 2$, $PQ = 6$. Нека је T тачка ван праве MN из које се дужи MN, NP, PQ виде под једнаким углом α. Одредити могуће вредности α.

4. Одредити све природне бројеве n за које постоји полином са целим коефицијентима $p(x)$ такав да је $p(d) = \frac{n}{d}$ за сваки позитиван делилац d броја n.

5. Нека су a, b реални бројеви из интервала $(0,1)$. Доказати да је $a^2 + b^2 = 1$ ако и само ако је $\dfrac{a^4+b^4-1}{a^6+b^6-1} = \dfrac{2}{3}$.

Други разред, Б категорија

1. Нека је M средиште странице CD квадрата $ABCD$, S пресек дијагонала, а P средиште дужи AS. Доказати да је $\sphericalangle PBS = \sphericalangle MBC$.

2. У скупу реалних бројева решити једначину $\sqrt{x^2+x+1} = 1 - x - x^2$.

3. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 2 + 3\sqrt{2}, \\ x^2 + y^2 &= 6. \end{aligned}$$

4. На турниру учествује $n \geqslant 2$ играча. Предвиђено је да свака два играча одиграју по једну партију. Међутим, играч A је напустио турнир након 10 одиграних партија, а играч B након једне одигране партије. На турниру је одиграно 55 партија. Да ли су A и B играли међусобно?

5. На питање који му је број куће, Перица је одговорио следеће:

> Ако је мој број куће дељив са 3, онда је он између 50 и 59.
>
> Ако мој број куће није дељив са 4, онда је он између 60 и 69.
>
> Ако мој број куће није дељив са 6, онда је он између 70 и 79.

Који је Перицин број куће?

Трећи разред, А категорија

1. Доказати да је природан број $n \geqslant 4$ прост ако и само ако $n \mid \sum_{k=1}^{n-3}(k \cdot k!)$.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2010} \in \mathbb{C}$ све нуле полинома $x^{2010}+20x+2$. Израчунати $x_1^{2011} + x_2^{2011} + \ldots + x_{2010}^{2011}$.

3. Нека је $n \geqslant 3$ природан број. Испитати истинитост тврђења:

> Ако за међусобно различите комплексне бројеве $z_1, z_2, \ldots, z_n$ за које је $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n|$ важи $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$, тада су тачке одређене комплексим бројевима $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (у неком поретку) темена правилног n-тоугла.

4. Колико има подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, 10\}$ који не садрже три узастопна природна броја?

5. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао. Нека је $\{P_1\} = AB \cap ED$, $\{P_2\} = BC \cap EA$, $\{P_3\} = CD \cap BA$, $\{P_4\} = DE \cap CB$ и $\{P_5\} = EA \cap DC$. Кружнице описане око троуглова P_1AE, P_2BA, P_3CB, P_4DC и P_5ED секу се у тачкама A', B', C', D' и E' различитим од тачака A, B, C, D и E. Доказати да су тачке A', B', C', D' и E' концикличне.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да за све векторе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ важи

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} &= \left(\vec{c} + \vec{a}\right) \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \\
&+ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \\
&+ \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \times \left(\vec{c} + \vec{a}\right).
\end{aligned}$$

2. Ако је r полупречник основе и H висина праве кружне купе, а ρ полупречник сфере уписане у ту купу, доказати да важи $\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{2}{\rho H}$.

3. Одредити све $x, y \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ који су решења система

$$\cos x = 2\cos^3 y, \qquad \sin x = 2\sin^3 y.$$

4. Видети трећи задатак за други разред А категорије.

5. Видети пети задатак за други разред Б категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Видети први задатак за трећи разред А категорије.

2. За реалан број b нека је

$$f(b) = \max_{x\in\mathbb{R}} \left| \sin x + \frac{2}{3+\sin x} + b \right|.$$

Одредити $\min\limits_{b\in\mathbb{R}} f(b)$.

3. Нека су $m, n \geqslant 2$ природни бројеви и $A = (a_1, \dots, a_m)$ уређена m-торка, а $B = (b_1, \dots, b_n)$ уређена n-торка комплексних бројева различитих од 0. У једном кораку могуће је извршити једну од следећих операција:

1° Изабрати $1 \leqslant i < j \leqslant m$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве a_i и a_j заменити бројевима za_i и $\frac{a_j}{z}$, редом.

2° Изабрати $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве b_i и b_j заменити бројевима zb_i и $\frac{b_j}{z}$, редом.

3° Изабрати $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бројеве a_i и b_j заменити бројевима za_i и zb_j, редом.

Може ли се применом коначно много ових операција од A и B добити m-торка $\overline{A} = (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_m})$ и n-торка $\overline{B} = \big(\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}\big)$, редом?

4. За сваки природан број n са $p(n)$ означен је број квадратних функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ чији су корени цели бројеви и $a, b, c \in \{1, 2, \dots, n\}$. Доказати да за $n \geqslant 4$ важи $n < p(n) < n^2$.

5. Видети пети задатак за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Збир два позитивна броја једнак је c $(c > 0)$. Колики је највећи могући производ куба првог и квадрата другог броја?

2. Ако је r полупречник основе и H висина праве кружне купе, а ρ полупречник сфере уписане у ту купу, доказати да важи $\dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{2}{\rho H}$.

3. Доказати да је $\dfrac{\pi}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{27}} + \arcsin\sqrt{\frac{3}{28}}}$ природан број.

4. Нека су z_1 и z_2 међусобно различити комплексни бројеви, такви да је $z_1 z_2 \neq 0$.

(а) Ако је $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, доказати да тачке одређене комплексним бројевима $0, z_1$ и z_2 чине темена правоуглог троугла.

(б) Ако тачке одређене комплексним бројевима $0, z_1$ и z_2 чине темена правоуглог троугла мора ли бити $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

5. Пет студената, Аца, Беба, Весна, Гоца и Доки су одговарали на тест који се састоји од 5 питања са вишеструким одговорима. Прва два питања су имала одговоре a, b и c, док је на остала одговор тачно–нетачно ($\top$–$\perp$). Одговор на свако од питања је јединствен. Они су одговорили на питања на следећи начин:

	I	II	III	IV	V
Аца	a	a	$\top$	$\top$	$\top$
Беба	b	b	$\top$	$\perp$	$\top$
Весна	a	b	$\top$	$\top$	$\perp$
Гоца	b	c	$\top$	$\top$	$\perp$
Доки	c	a	$\perp$	$\top$	$\top$

Испоставило се да не постоје два студента који имају једнак број тачних одговора.

(а) Доказати да ниједан од студената нема све тачне одговоре.

(б) Доказати да одговори на треће и четврто питање нису исти.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Први разред, А категорија

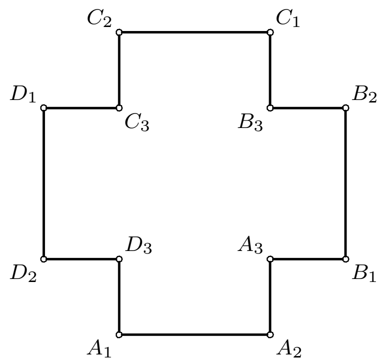
1. У $\triangle ABC$ је $\sphericalangle ABC = 80^\circ$. Тачка D на страници BC је таква да важи $AB = AD = CD$, тачка F на страници AB је таква да важи $AF = BD$ и тачка E на правој BC је таква да важи $B - C - E$ и $\sphericalangle BEF = 20^\circ$. Доказати да је $DE = AC$.

2. Четвороугао $ABCD$ је трапез ($AB \parallel CD$) у који се може уписати круг. Доказати да се кружница над пречником BC и кружница над пречником AD додирују.

3. Нека је $n > 1$ природан број. Колико има n-тоцифрених бројева који су палиндроми и дељиви су са 9 (број је палиндром уколико му је декадни запис симетричан, тј. запис му је исти слева на десно и здесна на лево)?

4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, такав да за неке просте бројеве $p < q < r$ важи $\{P(p), P(q), P(r)\} = \{20, 3, 2010\}$. Доказати да је $P(p+q) = 2010$.

5. Може ли се унутар фигуре са слике ДР 10 1А 5-1 (укључујући руб) сместити девет тачака, међу којима никоје три нису колинеарне, тако да кадгод неке три од њих образују троугао који припада унутрашњости фигуре, његова површина је већа од 2 ($A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = D_1D_2 = 2$, $A_2A_3 = A_3B_1 = B_2B_3 = B_3C_1 = C_2C_3 = C_3D_1 = D_2D_3 = D_3A_1 = 1$)?



ДР 10 1А 5-1

Први разред, Б категорија

1. Нека је $f(x) = -\dfrac{2x+7}{x+3}$ и $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{-пута}}(x)))$, за $n \in \mathbb{N}$. Одредити $f_{2009}(2010)$.

2. На колико се начина број 2010 може представити као збир неколико (бар два) узастопних природних бројева?

3. Ако је $a, b > 0$ и $a + b = 2$, доказати да је $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} < 3$.

4. У $\triangle ABC$ угао код темена B је двоструко већи од угла код темена A, а тежишна дуж CM је нормална на симетралу $\sphericalangle ABC$. Одреди углове $\triangle ABC$.

5. Симетрале AA_1, BB_1, CC_1 углова $\triangle ABC$ секу се у тачки S ($A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$). Ако су полупречници кружница уписаних у троуглове $SAB_1, SB_1C, SCA_1, SA_1B, SBC_1, SC_1A$ једнаки, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

Други разред, А категорија

1. Нека у конвексном петоуглу $ABCDE$ важи $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$ и $\sphericalangle BDC = \sphericalangle DAE$. Нека су M, N и P, редом, средишта дужи AD, BD и EC. Доказати да је $\sphericalangle MPN = 90^\circ$.

2. Да ли у низу $21, 2011, 200111, 20001111, \dots, 2\underbrace{0\dots0}_{2009}\underbrace{1\dots1}_{2010}$ има више простих или сложених бројева?

3. Доказати да је $\sin\left(24 \arcsin \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{6+3\sqrt{2}}}{4}\right) = 0$.

4. Колико има уређених тројки $(a, b, c) \in \{1, 2, ..., 2010\}^3$ таквих да за сваки природан број n једначина $(a+n)x^2 + (b+2n)x + (c+n) = 0$ има бар једно реално решење?

5. На сваком пољу шаховске табле написан је по један број између 1 и 64 (сваки број тачно једном). Са колико најмање питања се може сазнати тачан распоред бројева (тј. сазнати који је број у ком пољу), ако се једним питањем може сазнати који су бројеви написани у произвољно одабраном скупу поља (али не и њихов распоред у тим пољима)?

Други разред, Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\log_2 3 + 3\log_4 x = \left(x^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{\log_3 x}}.$$

2. Нека је x негативан реалан број. Испитати шта је веће

$$4^x + 1 \qquad \text{или} \qquad 2^x + 3^x.$$

3. Одредити све тројке природних бројева a, b, c које одговарају дужинама страница троугла коме је пречник описане кружнице $6,25$.

4. Одредити највећи могући број дељив са 72 који се може добити из броја $1\,2\,3\,\ldots\,2009\,2010$ брисањем неких његових цифара.

5. Племе има азбуку која садржи само слова А и Б. Њихов речник има особину да не постоје две речи такве да је једна почетак друге (на пример, ако постоји реч БА, не постоје речи БАА, БАБ и БАБА). Ако њихов речник садржи тачно 1 двословну, 2 трословне, 4 петословне и 5 шестословних речи, колико највише четворословних речи може садржати?

Трећи разред, А категорија

1. У $\triangle ABC$ тачке M и N су пресеци тежишне дужи и симетрале унутрашњег угла из темена A са страницом BC, редом. Тачке Q и P су тачке пресека нормале у N на NA са правама MA и BA, редом, а тачка O је пресек нормале у P на AB са правом AN. Доказати да је $QO \perp BC$.

2. Нека је са $\overline{a_n b_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1^{2010} + 2^{2010} + \ldots + n^{2010}$, за $n \in \mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$ рационалан.

3. Колико решења има функционална једначина $f(n) + f(n + f(n)) = n$ ако:

(а) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$; **(б)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$?

4. Нека је низ $(f_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $f_1 = 1, f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \in \mathbb{N}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ уредити бројеве $f_k f_{n-k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ у неопадајући низ.

5. На табли је записан систем

$$\begin{array}{ccccccccc} \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \dots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \\ \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \dots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \\ & & & & \vdots & & & & \\ \star\, x_1 & + & \star\, x_2 & + & \dots & + & \star\, x_{2010} & = & \star \end{array}$$

који садржи 2010 једначина. Аца и Бранко, наизменично, уместо једне звездице уписују реалан број по избору. Аца игра први. Који од играча има победничку стратегију ако:

(а) Аца побеђује у случају да систем има бесконачно много решења, а Бранко у случају да је противречан;

(б) Аца побеђује у случају да је систем противречан, а Бранко у случају да систем има бесконачно много решења?

Трећи разред, Б категорија

1. Две странице троугла припадају правим $3x+5y-14=0$ и $x+3y-5=0$, а ортоцентар тог троугла је $H(1,1)$. Одредити једначину праве којој припада трећа страница троугла.

2. Одредити (ако постоји) најмањи природан број n такав да је $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin n^\circ}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos n^\circ}=4\sqrt{2}$.

3. Нека је $S=\{z\in\mathbb{C} \mid |z^2+1|=|z+i|\}$. Доказати да за произвољне $z_1,z_2\in S$ важи $|z_1-z_2|\leqslant 3$. Испитати када се достиже једнакост.

4. Нека је са $\overline{a_nb_n}$ означен двоцифрени број који представља последње две цифре броја $1+2+\ldots+n$, за $n\in\mathbb{N}$ (у декадном запису). Одредити да ли је број $0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$ рационалан.

5. Нека је S скуп тачака у равни, такав да за сваке две тачке $A,B\in S$ постоји тачка $C\in S$ на кружници чији је пречник AB, различита од тачака A и B. Доказати да је скуп S бесконачан.

Четврти разред, А категорија

1. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама M и N, при чему је центар кружнице k_2 на кружници k_1. Нека је P произвољна тачка на луку MN кружнице k_2 који се налази унутар круга k_1. Праве MP и NP секу k_1 по други пут у тачкама A и B, редом. Нека је S средиште дужи AB, а тачке C и D пресеци полуправе SP са кругом k_1 и k_2, редом (различити од P). Доказати да је $PC=CD$.

2. Нека је p непаран прост број. Доказати да је

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{k^3}{p}\right]=\frac{(p-2)(p-1)(p+1)}{4}.$$

3. За сваки природан број n, нека је a_n број нула којима се завршава бинарни запис броја n (на пример, $a_5 = 0$, јер је 101 бинарни запис броја 5; $a_{20} = 2$, јер је 10100 бинарни запис броја 20). Нека је $b_n = 1$ ако је a_n непаран број, а иначе нека је $b_n = 0$. Испитати да ли је број $x = 0,b_1b_2b_3\ldots$ рационалан (запис броја x је у бинарном систему).

4. Доказати да је $2\cos\dfrac{p\pi}{9}$ корен полинома $x^3 - 3x - 1$ за сваки прост број $p > 3$.

5. Да ли се раван може обојити у 2010 боја тако да свака кружница садржи тачке свих боја (свака тачка равни обојена је тачно једном бојом)?

Четврти разред, Б категорија

1. За које вредности реалног параметра a једначина

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \cdot \log_{\frac{1}{\pi}} a$$

има решења?

2. У скупу реалних бројева решити неједначину

$$\left(5\sqrt{2} - 7\right)^x + 2 \leqslant 5 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)^x .$$

3. Одредити највећи могући количник запремине лопте и запремине купе описане око те лопте.

4. Две параболе, чије су директрисе међусобно нормалне, имају четири различите заједничке тачке, A_1, A_2, A_3, A_4. Доказати да тачке A_1, A_2, A_3, A_4 припадају једној кружници.

5. У конвексном петоуглу $ABCDE$ углови код темена B и E су прави и важи $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EAD$. Ако се праве BD и CE секу у тачки O, доказати да су праве AO и BE ортогоналне.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.01.2010.

Први разред, А категорија

1. Како је T_i тежиште $\triangle A_iB_iC_i$ (за $i \in \{1,2\}$), следи $\overrightarrow{T_iA_i}+\overrightarrow{T_iB_i}+\overrightarrow{T_iC_i}=0$, па је $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=$

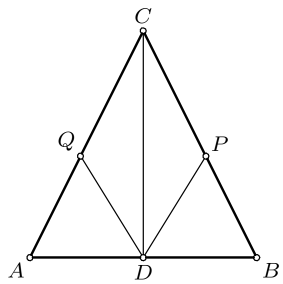
$$\begin{aligned} &= \left(\overrightarrow{A_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2A_2}\right)+\left(\overrightarrow{B_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2B_2}\right)\\ &+ \left(\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2C_2}\right) = -\left(\overrightarrow{T_1A_1}+\overrightarrow{T_1B_1}+\overrightarrow{T_1C_1}\right)\\ &+ 3\cdot\overrightarrow{T_1T_2}+\left(\overrightarrow{T_2A_2}+\overrightarrow{T_2B_2}+\overrightarrow{T_2C_2}\right) = 3\cdot\overrightarrow{T_1T_2}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати (Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 5).

2. Из $n \equiv 35 \pmod{2009}$ следи $n = 2009p+35$ за неко $p \in \mathbb{N}_0$, па је $n+7 = 2009p+42 = 7\cdot(287p+6)$, тј. $7 \mid n+7$. Из $n \equiv 35 \pmod{2010}$ следи $n = 2010q+35$ за неко $q \in \mathbb{N}_0$, па је $n+7 = 2010p+42 = 6\cdot(335p+6)$, тј. $6 \mid n+7$. Како је $(6,7)=1$, следи $42 \mid n+7$, па n при дељењу са 42 даје остатак 35.

3. Како је $\sphericalangle CDB$ спољни у $\triangle ADC$, следи $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle DCA > \sphericalangle DCA = \sphericalangle BCD$, па је $BC > DB$. Аналогно је $CA > AD$, па постоје тачке P и Q на дужима BC и AC, редом, тако да је $AD = AQ$ и $BD = BP$.

Како је $CQ = AC - AQ = AC - AD = BC - BD = BC - BP = CP$, $\sphericalangle DCQ = \sphericalangle PCD$ и $CD = CD$, следи $\triangle DPC \cong \triangle DCQ$, па је $DQ = DP$ и $\sphericalangle CQD = \sphericalangle DPC$.
Следи $\triangle ADQ \cong \triangle DBP$ ($\sphericalangle ADQ = \sphericalangle DQA = 180^\circ - \sphericalangle CQD = 180^\circ - \sphericalangle DPC = \sphericalangle BPD = \sphericalangle DBP$ и $DQ = DP$), па је $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$, је $\triangle ABC$ је једнакокрак (Тангента 56, стр. 9, Наградни задаци, М801).



ОП 10 1А 3

4. Нека је $x = 2010^{2010}+10^{2011}$ и $y = 2010^{2010}$. Како је $x = 10^{2010}\cdot\left(201^{2010}+10\right)$ и $y = 10^{2010}\cdot 201^{2010}$, то број x има већи број цифара од броја y ако и само ако број $a = 201^{2010}+10$ има већи број цифара од броја $b = 201^{2010}$. Пошто је $a-b=10$, ако a има већи број цифара од b, остатак b при дељењу са 100 је не мањи од 90. Међутим, важи $b \equiv 201^{2010} \equiv 1^{2010} \equiv 1 \pmod{100}$, па a нема већи број цифара од b, тј. ни x нема већи број цифара од y (како је $x > y$, ово значи да они имају једнак број цифара).

5. Нека су боје означене са a, b и c. Ако је централно поље обојено бојом a, могући су следећи случајеви:

1° Сва четири поља суседна централном су обојена истом бојом. Та боја се може изабрати на 2 начина и тада за свако угаоно поље постоји 2 могућности за избор боје (ако је, на пример, боја поља суседних централном b, угаона могу бити боје a или c), па је у овом случају број могућих бојења $2 \cdot 2^4 = 32$.

2° Три поља суседна централном су исте, а четврто је различите боје. Таквих бојења има $\binom{4}{1} = 4$ и за свако такво бојење преостала (угаона) поља се могу обојити на 2^2 начина (2 угаона поља имају суседна поља различите боје, па је њихова боја једнозначно одређена; преостала 2 имају суседна исте боје, па за њихово бојење постоје 2 могућности), па је број бојења у овом случају $2 \cdot 4 \cdot 2^2 = 32$.

3° По два суседна поља су обојена истом бојом. У овој ситуацији постоји два случаја:

(а) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су различите боје (оваквих бојења има 4). Тада 2 угаона поља имају суседна поља различите боје (па је њихова боја јединствено одређена), а 2 угаона поља имају суседна поља исте боје (па се њихова боја може изабрати на 2 начина). Следи да је број бојења у овој ситуацији $4 \cdot 2^2 = 16$.

(б) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су исте боје (оваквих бојења има 2). Тада свако угаоно поље има суседна поља различите боје, па је њихова боја јединствено одређена, тј. број бојења у овој ситуацији је 2.

Дакле, ако је централно поље обојено бојом a, тражених бојења има $32 + 32 + 16 + 2 = 82$, па је укупан број тражених бојења $3 \cdot 82 = 246$.

Први разред, Б категорија

1. Из 1° следи да се елементи скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ налазе у макар једном од A и B. Из 2° следи $2 \in A$, из 3° следи $3 \notin A$, из 4° следи $4, 5, 6 \notin A$, а из 5° следи $1 \notin B$, па како је $1 \in A \cup B$, следи $1 \in A$. Дакле $A = \{1, 2\}$. Из 2° следи $2 \notin B$, из 3° следи $3 \in B$, из 4° следи $4, 5, 6 \notin A$, па како је $4, 5, 6 \in A \cup B$, следи $4, 5, 6 \in B$, а из 5° следи $1 \notin B$. Дакле $A = \{3, 4, 5, 6\}$ (Тангента 53, стр. 37, Писмени задаци, задатак 2).

2. (а) Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Следи да је $x \to 5 - 2x$ бијекција. Ако је $t = 5 - 2x$, следи $x = \dfrac{5-t}{2}$, па је $g(t) = 4 \cdot \dfrac{5-t}{2} - 7 = 3 - 2t$ (за свако $t \in \mathbb{R}$).
(б) За свако $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) = g\left(g(x)\right) = 3 - 2(3 - 2x) = 4x - 3$.

(в) Функција $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ је бијекција ако (и само ако) је $a \neq 0$. Дакле, f је бијекција и важи $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{4}$ (Тангента 57, стр. 28, Писмени задаци, задатак 4).

3. Бројеви n и $n-3$ су различите парности, па је број $n(n-3)$ паран. Како је $14 \equiv 2 \pmod 4$, ако $2 \mid m$, следи да су бројеви m и $m+2$ парни бројеви који дају различите остатке при дељењу са 4, тј. 0 и 2, па $8 \mid m(m+14)$. Специјално, ово је тачно за $m = n(n-3)$, што је тврђење задатка (Тангента 57, стр. 28, Писмени задаци, задатак 5).

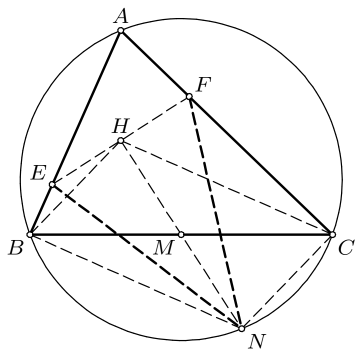
4. Видети решење другог задатка за први разред А категорије.

5. Видети решење петог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Једначина из текста задатка је квадратна и има реална и различита решења ако и само ако је њена дискриминанта строго већа од 0, тј. ако и само ако је $0 < (2(m-1))^2 - 4\cdot 1\cdot (m+5) = 4\cdot(m^2-3m-4) = 4(m+1)(m-4)$, тј. $m \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.
Како је $f(-2) = 4 - 2(m-1)(-2) + m + 5 = 5(m+1)$, $f(3) = 9 - 2(m-1)\cdot 3 + m + 5 = -5(m-4)$, $f(-2)\cdot f(3) = -20\cdot(m+1)(m-4) < 0$ за горе наведене вредности m, што (будући да је у питању квадратна једначина) управо значи да она има тачно један корен у $(-2, 3)$.

2. Нека је N тачка симетрична са H у односу на M. На основу великог задатка следи да N припада описаној кружници $\triangle ABC$ и да је $\sphericalangle ABN = \sphericalangle NCA = 90^\circ$, па следи да су четвороуглови $BNHE$ и $CFHN$ тетивни и над пречницима EN и FN, редом. Како је $\sphericalangle NBH = 90^\circ - \sphericalangle HBE = 90^\circ - (90^\circ - \sphericalangle CAB) = \sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle NCH = 90^\circ - \sphericalangle HCF = 90^\circ - (90^\circ - \sphericalangle CAB) = \sphericalangle CAB$, следи да над (заједничком) тетивом NH кружница описаних око ових четвороуглова леже једнаки углови, па је $EN = FN$, одакле следи и $HE = HF$ (Тангента 56, стр. 8, Наградни задаци, М799).



ОП 10 2А 2

3. Нека је $m = \sqrt[3]{n} \in \mathbb{Z}$. По условима задатка је $m = \sqrt[3]{n} = \left[\dfrac{n}{1000}\right]$. Како је $x - 1 < [x] \leqslant x$, следи $m \leqslant \dfrac{m^3}{1000} \Leftrightarrow m^2 \geqslant 1000$, одакле је $m \geqslant 32$ и $m > \dfrac{m^3}{1000} - 1$, одакле је $m^2 < 1000 + \dfrac{1000}{m} < 1000 + \dfrac{1000}{32} < 1032 < 1089 = 33^2$, па је $m < 33$.

Дакле, једино могуће решење је $m = 32$, тј. $n = 32^3 = 32768$; како је $\left[\dfrac{32768}{1000}\right] = 32$, следи да ово и jесте решење (Тангента 54, стр. 19, Наградни задаци, М748).

4. Нека је $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $y = x + \frac{\pi}{2}$ (тада и $y \in (0, \pi)$). Тада је $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $\sin^2(x+y) = \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 2x \neq 1$, па је $\left|\left\{\sin^2 x + \sin^2 y, \sin^2(x+y), 1\right\}\right| = 2$.

Ако је $m \in \mathbb{N}$ и $x = \dfrac{\pi}{m} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, тада је

$$\begin{aligned} & \sin(n+4m)x + \sin\left[(n+4m)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ = \ & \sin(nx + 2\pi) + \sin\left[n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi + 2m\pi\right] \\ = \ & \sin nx + \sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

тј. низ $\left(\sin nx + \sin n\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ је $4m$-периодичан, па је

$$|\{\sin nx + \sin ny \mid n \in \mathbb{N}\}| < \infty.$$

5. У „стандардном" бојењу шаховске табле, оба избачена поља су црне боје, па разлика броја белих и црних поља даје остатак 2 при дељењу са 3. Са друге стране, и домина 2×1 и домина 1×2 покрива једно црно и једно бело поље, док „крстић" покрива 4 поља једне и једно поље друге боје, тј. за сваку од фигура које се користе у поплочавању је разлика броја белих и броја црних поља дељива са 3. Дакле, не постоји поплочавање тражено у задатку.

Други разред, Б категорија

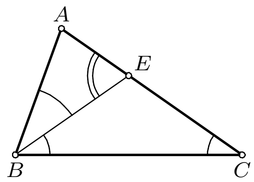
1. Нека је $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Једначина из задатка је еквивалентна са $2(y+1)i = 4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Пошто је лева страна последње једначине чисто имагинарна, а десна реална, последња једначина је еквивалентна са $2(y+1)i = 0 = 4 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$, тј. са $y = -1$ и $x^2 + 4 = 16 \Leftrightarrow x^2 = 12 \Leftrightarrow x \in \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$.

Дакле, решење задатка је $z \in \{-2\sqrt{3} - i, 2\sqrt{3} - i\}$ (Тангента 57, стр. 29, Писмени задаци, задатак 5).

2. Ако је $t = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, следи да је једначина коректно дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$ и постаје $t + \dfrac{3}{t} \leqslant 4 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)(t-3)}{t} \leqslant 0 \Leftrightarrow t \in [1, 3]$, тј. $0 \leqslant x^2 + x \leqslant 2$. Како је $x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$ решење неједначине $0 \leqslant x^2 + x$, а $x \in [-2, 1]$ неједначине $x^2 + x \leqslant 2$, следи да је решење неједначине из задатка $x \in [-2, -1] \cup [0, 1]$ (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 5).

3. Како је $\sphericalangle BEA$ спољашњи у $\triangle BCE$, следи $\sphericalangle BEA = \sphericalangle EBC + \sphericalangle BCE = \sphericalangle ABC$, па је

$\triangle ABC \sim \triangle ABE$ ($\sphericalangle BEA = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCA$), па је $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AC}{AB}$, тј. $AB^2 = AC \cdot AE$ (Тангента 56, стр. 33, Писмени задаци, задатак 1).



ОП 10 2Б 3

4. Ако је $n = 3$, тада је $n^2 + 9n - 22 = 14 = 2 \cdot 7$, тј. овај број је сложен. Ако је $n > 3$, тада је $n^2 + 9n - 22 = (n-2)(n+11)$ и важи $n-2, n+11 > 1$, па је и у овом случају број $n^2 + 9n - 22$ сложен, тј. ни за једно $n \geqslant 3$ број из услова задатка није прост.

5. Видети решење првог задатка за други разред А категорије.

Трећи разред, А категорија

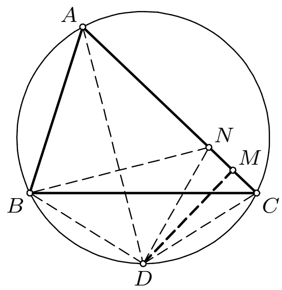
1. Неједначина има смисла за $4^x - 12 > 0$, $\log_2(4^x - 12) > 0$, $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} > 0$ и $\sqrt{x} \neq 1$, тј. за $x > \log_4 13$. За такво x је $\sqrt{x} > 1$ (обе логаритамске функције које се јављају у неједначини су растуће), па је

$$\begin{aligned} &\log_{\sqrt{x}} \log_2 (4^x - 12) \leqslant 2 \Leftrightarrow \log_2 (4^x - 12) \leqslant \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \\ \Leftrightarrow \quad & 4^x - 12 \leqslant 2^x \Leftrightarrow (2^x - 4)(2^x + 3) \leqslant 0, \end{aligned}$$

па мора бити $2^x \in (0, 4\,]$, одакле је $x \in (-\infty, 2\,]$, што, уз услов дефинисаности неједначине, даје решење $x \in (\log_4 13, 2]$ (Тангента 56, стр. 7, Наградни задаци, M788).

2. Нека је $x = 1 + 2010!$ и $y = 1 + (2010!)!$. Како је 2011 прост, на основу Вилсонове теореме $2011 \mid x$, па како је $x > 2011$, x је сложен. Пошто је и $x > 4$, следи $x \mid (x-1)!$, па је $y = (x-1)! + 1 = q \cdot x + 1$ за неко $q \in \mathbb{N}$. Следи $(x, y) = 1$.

3. Нека су α, β, γ углови који одговарају теменима A, B, C, редом, троугла ABC, а R полупречник описане кружнице овог троугла. Како је D средиште $\widehat{BC}$, следи $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD = \dfrac{\alpha}{2}$, па је $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BCA + \sphericalangle DCB = \gamma + \sphericalangle DAB = \gamma + \dfrac{\alpha}{2}$, па из правоуглог $\triangle CDM$ (угао над тетивом CD описане кружнице $\triangle ABC$ је $\dfrac{\alpha}{2}$) следи $CM = CD \cdot \cos\sphericalangle DCM = CD \cdot \cos\sphericalangle DCA = 2R \sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\gamma + \dfrac{\alpha}{2}\right) = R \cdot (\sin(\alpha + \gamma) - \sin\gamma) = \dfrac{2R\sin\beta - 2R\sin\gamma}{2} = \dfrac{AC - AB}{2}$.



ОП 10 3А 3

Друго решење. Нека је N тачка на AC таква да је $AB = AN$. Тада је AD симетрала дужи BN па је $DN = BD = DC$ и троугао NDC је једнакокрак, па је M средиште CN, одакле је $CM = \dfrac{AC - AB}{2}$.

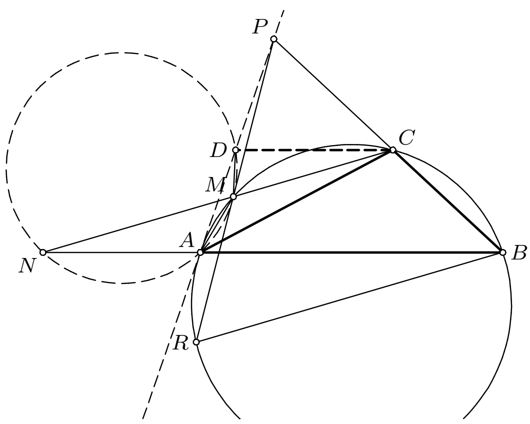
4. Нека је a_k (за $k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$) број одабраних тачака са праве $x = k$ (k-та колона); по услову задатка је $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 21$. Избор пара тачака у некој колони се може поистоветити за избором пара одговарајућих врста, тј. ако не постоји правоугаоник чија су темена међу одабраним тачкама, а странице паралелне координатним осама, тада је

$$\binom{5}{2} \geqslant \sum_{k=1}^{10} \binom{a_k}{2}$$

(врста укупно има 5, па парова врста има $\binom{5}{2}$). Како је функција $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ конвексна, из Јенсенове неједнакости следи

$$10 \geqslant 10 \cdot f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}}{10}\right) = 10 \cdot f\left(\frac{21}{10}\right),$$

тј. $200 > 231$, што је контрадикција, па следи да постоји тражени правоугаоник (Тангента 56, стр. 8, Наградни задаци, М797).



ОП 10 3А 5

5. Нека је R пресек k са правом PM. Како је $\sphericalangle PMC = \sphericalangle PCM$ (јер је $PM = PC$), следи да је $RBCM$ једнакокраки трапез и $CM \parallel RB$. Следи $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MNA = \sphericalangle RBA = \sphericalangle AMR$ (углови над истом тетивом и углови са паралелним крацима), па је $\triangle DPM \sim \triangle MPA$ и $PA \cdot PD = PM^2 = PC^2$,одакле је $\triangle PDC \sim \triangle PCA$, па је $\sphericalangle PCD = \sphericalangle PAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle PBA$ ($\sphericalangle PAC = \sphericalangle ABC$ следи из једнакости тангентног и тетивног угла), одакле следи $CD \parallel AB$.

Трећи разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = -a^3+3a+2 = -(a+1)^2(a-2),\\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 1-a & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix} = 0,\\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 1-a & a \\ a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -a^2+a+2 = -(a+1)(a-2),\\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ a & -1 & -1 \\ 1 & -a & 0 \end{vmatrix} = a^3-a^2-2a = a(a+1)(a-2),
\end{aligned}$$

за $a \notin \{-1, 2\}$ важи $\Delta \neq 0$, па за овакве a систем има јединствено решење

$$(x,y,z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(0, \frac{1}{a+1}, -\frac{a}{a+1}\right).$$

Ако је $a=-1$, тада је -1 једнострука нула у Δ_y, а двострука у Δ, па у овом случају систем нема решења.

Ако је $a=2$ систем постаје

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= -1,\\
2x - y + z &= -1,\\
x - 2y - z &= 0.
\end{aligned}$$

Одузимањем двоструке прве једначине од друге, односно одузимањем прве од треће, добија се еквивалентан систем

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= -1,\\
- 3y - 3z &= 1,\\
- 3y - 3z &= 1,
\end{aligned}$$

односно (како су друга и трећа једначина еквивалентне)

$$\begin{aligned}
x + y + 2z &= -1,\\
- 3y - 3z &= 1,
\end{aligned}$$

одакле је (за произвољно $z \in \mathbb{R}$) $y = -z - \frac{1}{3}$ и $x = -1 - y - 2z = -1 - \left(-z - \frac{1}{3}\right) - 2z = -z - \frac{2}{3}$, па у овом случају систем има бесконачно много решења $\left\{\left(-z - \frac{2}{3}, -z - \frac{1}{3}, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}$ (Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 4).

2. Нека је A врх, а B, C, A_1 темена основе пирамиде из задатка. Како је она правилна са правим ивичним угловима при врху A, постоје тачке D, B_1, C_1, D_1, тако да је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка. Описана сфера те коцке се поклапа да описаном сфером пирамиде $ABCA_1$ (четири некомпланарне тачке једнозначно одређују сферу). Нека је R полупречник те сфере, a страница коцке (она је једнака бочној ивици пирамиде), а H висина пирамиде из темена A. Основне ивице пирамиде су $a\sqrt{2}$ (дијагонала квадрата), а како је дијагонала коцке пречник сфере, следи $2R = a\sqrt{3}$, тј. $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Запремина пирамиде $ABCA_1$ једнака је $V(ABCA_1) = \dfrac{P(\triangle BCA_1) \cdot H}{3} = \dfrac{\dfrac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} \cdot H}{3} = \dfrac{a^2H\sqrt{3}}{6}$ (где $P(\triangle XYZ)$ означава површину $\triangle XYZ$; $\triangle BCA_1$ је једнакостраничан, странице $a\sqrt{2}$). Међутим, како је AA_1 висина пирамиде која одговара страни ABC, следи и $V(ABCA_1) = \dfrac{P(\triangle ABC) \cdot AA_1}{3} = \dfrac{\dfrac{a \cdot a}{2} \cdot a}{3} = \dfrac{a^3}{6}$, па је $\dfrac{a^2H\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{6}$, одакле је $H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Следи $\dfrac{H}{R} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{3}$ (Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, зад. 1).

3. По услову задатка је $a, b, c, d \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, па следи и $\cos(x+\varphi), \cos(x+2\varphi), \cos(x+3\varphi) \neq 0$. Из услова задатка је $b = a \cdot \dfrac{\cos(x+\varphi)}{\cos x}$, $c = a \cdot \dfrac{\cos(x+2\varphi)}{\cos x}$, $d = a \cdot \dfrac{\cos(x+3\varphi)}{\cos x}$, па је

$$\begin{aligned}
\frac{a+c}{b} &= \frac{a + a \cdot \dfrac{\cos(x+2\varphi)}{\cos x}}{a \cdot \dfrac{\cos(x+\varphi)}{\cos x}} = \frac{\cos x + \cos(x+2\varphi)}{\cos(x+\varphi)} \\
&= \frac{2\cos(x+\varphi)\cos\varphi}{\cos(x+\varphi)} = 2\cos\varphi \quad \text{и} \\
\frac{b+d}{c} &= \frac{a \cdot \dfrac{\cos(x+\varphi)}{\cos x} + a \cdot \dfrac{\cos(x+3\varphi)}{\cos x}}{a \cdot \dfrac{\cos(x+2\varphi)}{\cos x}} = \frac{\cos(x+\varphi) + \cos(x+3\varphi)}{\cos(x+2\varphi)} \\
&= \frac{2\cos(x+2\varphi)\cos\varphi}{\cos(x+\varphi)} = 2\cos\varphi,
\end{aligned}$$

одакле следи тврђење задатка (Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 2).

4. Свако $k \in \{1, 2 \ldots, n\}$, по условима задатка, припада једном (и тачно једном, јер су дисјунктни) од скупова $X \setminus Y$, $X \cap Y$, $Y \setminus X$ и тај избор је независан за различите елементе скупа $\{1, 2 \dots, n\}$, па решења скуповне једначине из задатка има 3^n.

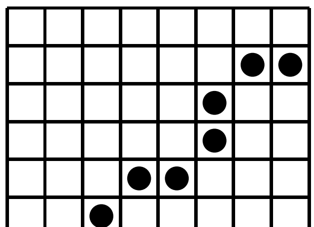
5. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Нека је $g(x) = 1+\frac{3}{2}\cdot x+\frac{3}{8}\cdot x^2-(1+x)^{\frac{3}{2}}$ и $h(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}-1-\frac{3}{2}\cdot x-\frac{3}{8}\cdot x^2+\frac{x^3}{16}$ (за $x \geqslant 0$; g и h су бесконачно диференцијабилне на $[0, \infty)$). Тада је $g'(x) = \frac{3}{2} \cdot \left(1 + \frac{x}{2} - (1+x)^{\frac{1}{2}}\right)$, $g''(x) = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$; следи $g''(x) > 0$ за $x > 0$, па g' расте, а како је $g'(0) = 0$, следи $g'(x) > 0$ за $x > 0$; даље, g расте, $g(0) = 0$, па је и $g(x) > 0$ за $x > 0$. Овим је доказана „десна” од две неједнакости из задатка.

Слично, $h'(x) = \frac{3}{2}\cdot\left((1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right)$, $h''(x) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{x}{2}\right)$, $h'''(x) = \frac{3}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}\right)$; следи $h'''(x) > 0$ за $x > 0$, па h'' расте, а како је $h''(0) = 0$, следи $h''(x) > 0$ за $x > 0$; следи да h' расте, а како је $h'(0) = 0$, следи $h'(x) > 0$ за $x > 0$; коначно, h расте, а како је $h(0) = 0$, следи $h(x) > 0$ за $x > 0$, тј. друга тражена неједнакост (Тангента 57, стр. 32, Писмени задаци, задатак 3).

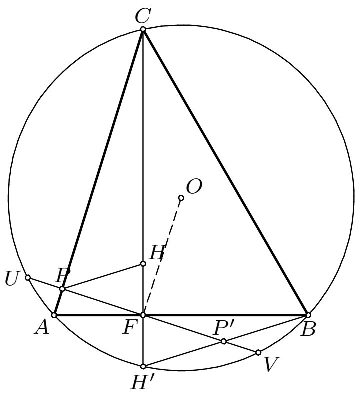
2. Како неки топ туче другог ако и само ако други туче првог, следи да се топови распоређени на тражени начин могу поделити у парове. Сваки од тих парова се налази у некој врсти или некој колони. Нека се v парова налази у врстама, а k у колонама. Пар који се налази у колони „заузима” две врсте, тј. у врстама у којима се налазе ови топови не сме бити више топова. Како је врста укупно 8, следи $v + 2k \leqslant 8$. Аналогно је $2v + k \leqslant 8$, па следи $3(v + k) \leqslant 16 \Leftrightarrow v + k \leqslant \frac{16}{3}$, тј. $v + k \leqslant 5$. Следи да се, при условима задатка, на таблу може поставити не више од 10 топова. Са друге стране, 10 топова се може поставити на таблу, тако да су испуњени услови задатка, на пример, као на слици ОП 10 4А 2.



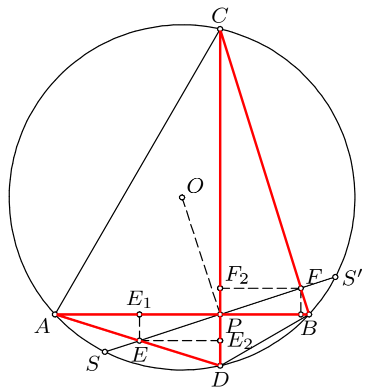
ОП 10 4А 2

3. Нека је H' тачка симетрична са H у односу на AB (H' припада описаној кружници $\triangle ABC$). Нека права FP описану кружницу $\triangle ABC$

у U и V, а праву $H'B$ у P'. Пошто је $OF \perp UV$, F је средиште дужи UV, па је, по леми о лептиру, F средиште дужи PP'. Следи $\triangle H'FP' \cong \triangle FHP$ ($HF = H'F$, $\sphericalangle H'FP' = \sphericalangle PFH$, $PF = P'F$), одакле је $\sphericalangle FHP = \sphericalangle FH'P' = \sphericalangle CH'B = \sphericalangle CAB$ (Тангента 57, стр. 15, Наградни задаци, M820).



ОП 10 4А 3-1



ОП 10 4А 3-2

Лема. *(„лема о лептиру") Кроз средиште P тетиве SS' кружнице конструисане су тетиве AB и CD, тако да су тачке A и C са исте стране праве SS'. Нека AD и BC секу SS' у E и F, редом. Тада је $EP = PF$.*

Доказ. Нека су E_1 и E_2 подножја нормала из E на AB и CD, редом. Нека су F_1 и F_2 подножја нормала из F на AB и CD, редом. Како је $\triangle EPE_1 \sim \triangle FPF_1$ и $\triangle EPE_2 \sim \triangle FPF_2$ следи $\dfrac{EP}{PF} = \dfrac{EE_1}{FF_1}$ и $\dfrac{EP}{PF} = \dfrac{EE_2}{FF_2}$. Како је $\triangle AEE_1 \sim \triangle CFF_2$ ($\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD$) и $\triangle DEE_2 \sim \triangle BFF_1$ ($\sphericalangle ADC = \sphericalangle ABC$) следи $\dfrac{AE}{CF} = \dfrac{EE_1}{FF_2}$ и $\dfrac{DE}{BF} = \dfrac{EE_2}{FF_1}$.

Како је $SP = SP'$, користећи потенцију тачака E и F, следи $\left(\dfrac{EP}{PF}\right)^2 = \dfrac{EE_1}{FF_1} \cdot \dfrac{EE_2}{FF_2} = \dfrac{EE_1}{FF_2} \cdot \dfrac{EE_2}{FF_1} = \dfrac{AE \cdot DE}{BF \cdot CF} = \dfrac{SE \cdot ES'}{SF \cdot FS'} = \dfrac{SP^2 - EP^2}{SP^2 - FP^2}$, одакле је $EP = PF$.

4. Нека је p решење задатка. Тада је $2010^{p^{2010}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ и (на основу мале Фермаове теореме, тј. $a^p \equiv a \pmod{p}$)

$$\begin{aligned} 2010^{p^{2010}}+1 &\equiv \left(2010^{p^{2009}}\right)^p+1 \equiv 2010^{p^{2009}}+1 \equiv \ldots \equiv 2010^{p^1}+1 \\ &\equiv 2010+1 \equiv 2011 \pmod{p}, \end{aligned}$$

па је $0 \equiv 2011 \pmod{p}$, тј. $p \mid 2011$. Како је 2011 прост, $p = 2011$ је једино p које може бити решење задатка.
Нека је $s = 2011^{2010}$. Из биномне формуле следи

$$2010^s+1 = (2011-1)^s+1 = 1+\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}2011^i\cdot(-1)^{s-i} = \sum_{i=1}^{s}\binom{s}{i}2011^i\cdot(-1)^{s-i}. \tag{$*$}$$

За $i \geqslant 2010$ важи $2011^{2010} \mid 2011^i$, па $s \mid \binom{s}{i}\cdot 2011^i\cdot(-1)^{s-i}$. За $1 \leqslant i < 2010$ важи $(i\,!, 2011) = 1$.
Како је бројилац разломка $\displaystyle\binom{s}{i} = \frac{s\cdot(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-i+1)}{i!}$ дељив са 2011^{2010} (пошто је $s = 2011^{2010}$), следи да (за $1 \leqslant i < 2010$) важи $s \mid \displaystyle\binom{s}{i}$, па и $s \mid \displaystyle\binom{s}{i}\cdot 2011^i\cdot(-1)^{s-i}$. Следи да су сви сабирци у $(*)$ дељиви са s, тј. $p = 2011$ је решење задатка.
Дакле, једино решење задатка је $p = 2011$.

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Како је

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = -m^2-m+6 = -(m+3)(m-2), \\
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & m \\ 2 & m & 3 \end{vmatrix} = -m^2-m+6 = -(m+3)(m-2), \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & m \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -m+2 = -(m-2), \\
\Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m+2 = -(m-2),
\end{aligned}$$

за $m \notin \{-3, 2\}$ важи $\Delta \neq 0$, па за овакве m (и само такве) систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(1, \frac{1}{m+3}, \frac{1}{m+3}\right)$$

(Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 5).

2. Како су $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 2 \cdot \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - 3 \cdot \overrightarrow{b}$ колинеарни, са њима су колинеарни и $\frac{1}{5} \cdot \left(3\overrightarrow{c} + 2\overrightarrow{d}\right) = \overrightarrow{a}$ и $\frac{1}{5} \cdot \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}\right) = \overrightarrow{b}$ (Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 3).

3. Видети решење другог задатка за трећи разред Б категорије.

4. Неједначина је дефинисана за $x \geqslant 0$. Нека је $x = y^4$, $y \geqslant 0$. Неједначина постаје $8 \cdot 3^{y^2+y} + 3^{2y+2} \geqslant 3^{2y^2} \Leftrightarrow 8 + 9 \cdot 3^{y-y^2} \geqslant 3^{y^2-y}$. Ако је $z = 3^{y^2-y} > 0$, неједначина постаје $8 + \frac{9}{z} \geqslant z \Leftrightarrow \frac{(z+1)(z-9)}{z} \leqslant 0$, одакле је $z \in (0, 9\,]$, тј. $3^{y^2-y} \leqslant 3^2$, одакле је $y \in [\,0, 2\,]$ и, коначно, $x \in [\,0, 16\,]$.

5. За $x \in \mathbb{R}$ посматрани низ је аритметички ако и само ако постоји $d \in \mathbb{R}$, тако да је

$$d = \sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos 2nx \quad \text{за свако} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (**)$$

1° Ако је $\sin x = 0$, из $(**)$ следи $d = 0$, тј. овакви бројеви су решења. То су бројеви облика $x = k\pi$, за $k \in \mathbb{Z}$ и, у интервалу $\left[2009^2\pi, 2010^2\pi\right]$ их има $2010^2 - 2009^2 + 1 = 2010 + 2009 + 1 = 4020$.

2° Ако је $\sin x \neq 0$, Из $(**)$ следи да је низ $(\cos 2nx)_{n\in\mathbb{N}}$ константан. Специјално, важи $\cos 2x = \cos 4x = 2 \cdot \cos^2 2x - 1$, одакле је $\cos 2x \in \left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

   (а) Ако је $\cos 2x = 1$, следи $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x = 0$, тј. $\sin = 0$, што је немогуће (у овом случају је $\sin x \neq 0$).

   (б) Ако је $\cos 2x = -\frac{1}{2}$, следи $\cos 6x = \cos 2x \cdot \left(4\cos^2 2x - 3\right) = 1$, па низ $(\cos 2nx)_{n\in\mathbb{N}}$ није константан.

   Следи да у случају 2° нема решења задатка.

Дакле, тражених x има 4020.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.02.2010.

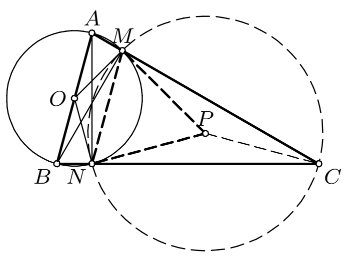
Први разред, А категорија

1. Како је $3xyz > 0$, следи $x > y, z$, одакле је $4x > 2(y+z) = x^2$, тј. $x < 4$. Из $x^2 = 2(y+z)$ следи $2 \mid x$, па мора бити $x = 2$. Тада мора бити $y = z = 1$, а ова тројка и задовољава систем из задатка и притом је $x + y + z = 4$.

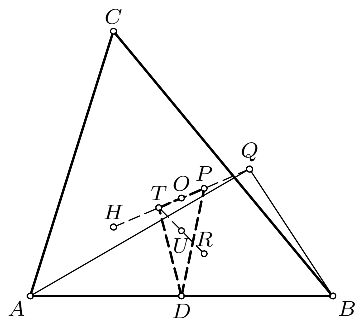
2. Ако је тврђење задатка тачно, за $n = 11$ следи да постоји природан број x чији је збир цифара $(s(x))$ једнак 11, који је дељив са 11 и који при дељењу са 100 даје остатак 11. Нека су $n(x)$ и $p(x)$

збирови цифара на непарним, односно парним позицијама декадног записа броја x, редом. Како је x дељив са 11 важи $11 \mid n(x)-p(x)$, а како је $11 = s(x) = n(x)+p(x)$, следи да је један $n(x)$ и $p(x)$ једнак 0, а други 11. Ово није могуће, јер је $x \equiv 11 \pmod{100}$ (тј. $n(x), p(x) \geqslant 1$).
Дакле, за $n = 11$ не постоји x са захтеваним особинама, па тврђење из задатка није тачно.

3. Нека је O центар кружнице k. Како је $\sphericalangle BNA = \sphericalangle BMA = 90^\circ$ (угао над пречником), следи $\sphericalangle MAN = \sphericalangle CAN = 90^\circ - \sphericalangle BCA$, па је $\sphericalangle MON = 2\cdot\sphericalangle MAN = 180^\circ - 2\cdot\sphericalangle BCA$ (централни и периферијски угао). Како су PM и PN тангенте на k, следи $\sphericalangle PMO = \sphericalangle ONP = 90^\circ$, четвороугао $NPMO$ је тетиван, па је $\sphericalangle NPM = 180^\circ - (180^\circ - 2\cdot\sphericalangle BCA) = 2\cdot\sphericalangle BCA$. Кружница са центром у P и полупречника PN садржи M (једнакост тангентних дужи), а по претходном и C (централни и периферијски угао). Како је и $PC = MN$, следи $PM = MN = NP$, тј. $\triangle PMN$ је једнакостраничан. Дакле, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle NCM = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle NPM = 30^\circ$ (Тангента 57, стр. 15, Наградни задаци, M821).



ОК 10 1А 3



ОК 10 1А 4

4. Нека је $x = \overrightarrow{OX}$ за $x \in \{a,b,c,h,t,d,p,q,r,u\}$ (тј. малим латиничним словом је означен вектор који спаја центар описане кружнице и тачку означену истим великим латиничним словом). Тада је $t = \frac{a+b+c}{3}, h = a+b+c$ (особине тежишта и ортоцентра), $d = \frac{a+b}{2}$ (средиште дужи), $p = -\frac{a+b+c}{3}, q = -(a+b+c)$ (по симетрији), $r = \frac{1}{3}\cdot(a+b+q) = \frac{1}{3}\cdot(a+b-a-b-c) = -\frac{c}{3}$ (тежиште $\triangle ABQ$).
Нека је V тежиште $\triangle DPT$. Тада је $v = \overrightarrow{OV} = \frac{1}{3}\cdot(d+p+t) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b+c}{3}\right) = \frac{a+b}{6}$. Како је $v = \frac{d}{3}$, следи $O-V-D$; како је $2(v-r) = 2\cdot\left(\frac{a+b}{6} + \frac{c}{3}\right) = \frac{a+b+2c}{3} = t-r$, следи $R-V-T$; дакле, V припада правама OD и RT, па је $U \equiv V$ (из $BC \neq CA$ следи $OD \not\equiv RT$).

Друго решење. На основу особина Ојлерове праве је $\frac{HT}{TO} = 2$, па је $\frac{QP}{PO} = 2$; како је и $\frac{QR}{RD} = 2$ (тежиште дели тежишну дуж у односу $2:1$), следи $PR \parallel OD$ и $OD = \frac{3}{2}\cdot PR$. Како је O средиште TP, OD је средња линија $\triangle PRT$, па је $OU = \frac{1}{2}\cdot PR = \frac{1}{3}\cdot OD$, тј. $\frac{DU}{UO} = 2$. Следи да је U тажиште $\triangle DPT$.

5. Ако се два суседна места на којима пар седи посматра као блок, када се сви сместе у реду ће бити 6 блокова и 8 празних места.
Блокови и празна места могу се у ред поређати на $\binom{14}{6}$ начина; парови се придружују блоковима на 6! начина; сваки пар може сести у изабрани блок на два начина (што даје 2^6 могућности).
Дакле, укупан број распореда је $\binom{14}{6} \cdot 6! \cdot 2^6$.

Први разред, Б категорија

1. Како је $|a| = a$ за $a \geqslant 0$ и $|a| = -a$ за $a < 0$, следи:

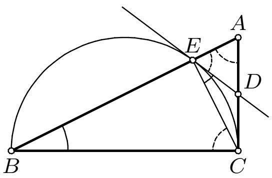
1° Ако је $x < -\frac{1}{2}$, једначина постаје $-(2x+1)-(x-1) = 2-x$, одакле је $x = -1$ (што је мање од $-\frac{1}{2}$).

2° Ако је $-\frac{1}{2} \leqslant x < 1$, једначина постаје $(2x+1)-(x-1) = 2-x$, одакле је $x = 0$ (што припада скупу $\left[-\frac{1}{2}, 1\right)$).

3° Ако је $x \geqslant 1$, једначина постаје $(2x+1)+(x-1) = 2-x$, одакле је $x = \frac{1}{2}$. Међутим, како $\frac{1}{2} \notin [1, \infty)$, ово није решење.

Дакле, решење је $x \in \{-1, 0\}$, тј. једначина има два решења (Тангента 56, стр. 25, Писмени задаци, задатак 8).

2. Како је $\sphericalangle DEC = \sphericalangle EBC = \sphericalangle ABC$ (тетивни и тангентни угао) и како је $\sphericalangle AEC = 180° - \sphericalangle CEB = 90°$ (угао над пречником), следи $\sphericalangle AED = 90° - \sphericalangle DEC = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB = \sphericalangle DAE$, тј. $\triangle DAE$ је једнакокраки (Тангента 58, стр. 31, Писмени задаци, задатак 5).



ОК 10 1Б 2

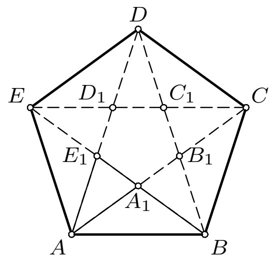
3. Како је $11^2 \equiv 121 \equiv 21 \pmod{100}$, $11^4 \equiv 21^2 \equiv 441 \equiv 41 \pmod{100}$, $11^8 \equiv 41^2 \equiv 1681 \equiv 81 \pmod{100}$, $11^{10} \equiv 11^2 \cdot 11^8 \equiv 21 \cdot 81 \equiv 1701 \equiv 1 \pmod{100}$, следи $2011^{2010} \equiv 11^{2010} \equiv 1 \pmod{100}$, па је цифра десетица броја 2011^{2010} једнака 0.

4. Како постоји посета између Ане и Бебе, једна од њих две је Дацу посетила ујутро, а друга увече. Како Ана није посетила Дацу и пре Весне и пре Гоце, следи да је Анина посета била увече. Дакле, Бебина посета је била ујутро, па су Весна и Гоца Дацу посетиле након ње. Пошто Весна није посетила Дацу између Бебе и Гоце, следи да је Гоцина посета била ујутро, а Бебина увече.
Дакле, редослед посета је Беба–Гоца–Ана–Весна.

5. Видети решење првог задатка за први разред А категорије.

Други разред, А категорија

1. Нека је $AB = a$ (страница петоугла $ABCDE$), а $A_1B_1 = x$ (страница петоугла $A_1B_1C_1D_1E_1$). Унутрашњи угао правилног петоугла је $\dfrac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Следи $\sphericalangle EAB = 108^\circ$, а како је $\triangle EAB$ једнакокраки, следи $\sphericalangle ABE_1 = \sphericalangle E_1EA = \frac{180^\circ-108^\circ}{2} = 36^\circ$. Слично, $\triangle EAE_1$ је једнакокраки, па следи $\sphericalangle EAE_1 = 36^\circ$, односно (спољни угао у троуглу) $\sphericalangle BE_1A = \sphericalangle E_1EA + \sphericalangle EAE_1 = 72^\circ$. Како је и $\triangle AA_1E_1$ једнакокраки, следи $\triangle ABE_1 \sim E_1AA_1$ и $AB = BE_1 = BA_1 + A_1E_1 = AA_1 + A_1E_1 = AE_1 + A_1E_1$. Из сличности следи $\frac{AB}{AE_1} = \frac{AE_1}{A_1E_1}$.



ОК 10 2А 1

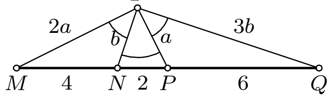
Дакле, $AE_1 = a - x$, $\frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{x}$, одакле је $\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 3\cdot\frac{a}{x} + 1 = 0$, тј. (јер је $\frac{a}{x} > 1$) $\frac{a}{x} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Како се површине сличних фигура односе као квадрати одговарајућих линеарних елемената, следи $\dfrac{P(ABCDE)}{P(A_1B_1C_1D_1E_1)} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ (Тангента 55, стр. 28, Наградни задаци, М781).

2. Играчи A и B су одиграли $k+\delta$ партија, где је $\delta = 0$ ако су A и B одиграли партију, а $\delta = 1$ ако нису. Преостали играчи су одиграли $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партија, па је $\frac{(n-2)(n-3)}{2}+k+\delta = 55$, односно $n^2-5n+2k+2\delta = 104$. Како је $k \geqslant 1$ и $\delta \geqslant 0$, следи $n^2-5n+2k+2\delta \geqslant n^2-5n+2$, одакле је $n^2-5n \leqslant 102$, а како је $n \in \mathbb{N}$, следи $n \leqslant 12$. Како је $k \leqslant n-3$ и $\delta \leqslant 1$, следи $n^2-5n+2k+2\delta \leqslant n^2-5n+2n-6+2$, одакле је $108 \leqslant n^2-3n$, а како је $n \in \mathbb{N}$, следи $n \geqslant 12$. Притом, ако је $k < n-3$ или $\delta < 1$, у последњој неједнакости се добија $108 < n^2-3n$, тј. $n > 12$, па у овој ситуацији нема решења.
Дакле, $n = 12$, $k = n-3 = 10$ и $\delta = 1$, тј. A и B нису играли међусобно.

3. Нека је $TP = a$, $TN = b$. Како је TN симетрала $\sphericalangle PTM$, следи $\frac{TM}{TP} = \frac{MN}{NP} = 2$, тј. $TM = 2a$. Како је TP симетрала $\sphericalangle QTN$, следи $\frac{TQ}{TN} = \frac{PQ}{NP} = 3$, тј. $TQ = 3b$.

Применом косинусне теореме на $\triangle TMN$, $\triangle TNP$, $\triangle TPQ$ следи

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4a^2 & + & b^2 & - & 4ab\cos\alpha & = & 16, \\ a^2 & + & b^2 & - & 2ab\cos\alpha & = & 4, \\ a^2 & + & 9b^2 & - & 6ab\cos\alpha & = & 36. \end{array}$$



ОК 10 2А 3

Решавањем овог система (систем линеарних једначина по $a^2, b^2, ab\cos\alpha$) добија се $a^2 = \frac{36}{5}, b^2 = \frac{32}{5}, ab\cos\alpha = \frac{24}{5}$, одакле $(a, b > 0)$ следи $a = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, b = \frac{6}{\sqrt{5}}$ и $\cos\alpha = \dfrac{24}{5ab} = \dfrac{24}{5\cdot\frac{24\sqrt{2}}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $\alpha = 45°$.

4. За свака два различита цела броја a и b и $p \in \mathbb{Z}[x]$ важи $a - b \mid p(a) - p(b)$. Ако је n сложен број који задовољава услове задатка, нека је d његов делилац такав да је $1 < d < n$; следи $n - d \mid p(n) - p(d) = 1 - \frac{n}{d}$, односно $\frac{1-\frac{n}{d}}{n-d} = -\frac{1}{d} \in \mathbb{Z}$. Како је $d > 1$, следи $\left|-\frac{1}{d}\right| < 1$, па је $-\frac{1}{d} \notin \mathbb{Z}$.
Ако је n прост број, полином $p(x) = -x + n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ задовољава $p(1) = n$ и $p(n) = 1$, тј. прости бројеви су решења задатка. Како је то и $n = 1$ (може се узети $p(x) = 1$), следи да су природни бројеви који задовољавају наведене услове 1 и сви прости бројеви.

5. Ако је $a^2 + b^2 = 1$, следи

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 1 - 2a^2b^2, \\ a^6 + b^6 &= (a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2) = 1 - 3a^2b^2, \quad \text{па је} \\ \frac{a^4+b^4-1}{a^6+b^6-1} &= \frac{-2a^2b^2}{-3a^2b^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ако је $\dfrac{a^4+b^4-1}{a^6+b^6-1} = \dfrac{2}{3}$, следи

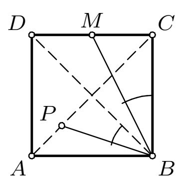
$$\begin{aligned} 0 &= 3(a^4+b^4) - 2(a^6+b^6) - 1 \\ &= 3(a^2+b^2)^2 - 6a^2b^2 - 2(a^2+b^2)^3 + 6a^2b^2(a^2+b^2) - 1 \\ &= 2(a^2+b^2)^2(1-a^2-b^2) + (a^2+b^2)^2 - 1 - 6a^2b^2(1-a^2-b^2) \\ &= (1-a^2-b^2)\left(2(a^2+b^2)^2 - 1 - a^2 - b^2 - 6a^2b^2\right), \end{aligned}$$

па је довољно доказати да је $S = 2(a^2+b^2)^2 - 1 - a^2 - b^2 - 6a^2b^2 \neq 0$ за $a^2+b^2 = t \neq 1$. Тада је $S = 2t^2 - t - 1 - 6a^2b^2 = (t-1)(2t+1) - 6a^2b^2$. Ако је $t < 1$, следи $S < 0$. Ако је $t > 1$, тада је $a^2b^2 > t - 1 \Leftrightarrow a^2(t-a^2) > t-1 \Leftrightarrow 0 < a^2t - t + 1 - a^4 = (1-a^2)(-t+1+a^2) = (1-a^2)(1-b^2)$, што је тачно $(a, b \in (0,1)$, па је $1-a^2, 1-b^2 > 0)$. Због $a, b \in (0,1)$ је и $t = a^2+b^2 < 2$, па важи $S = (t-1)(2t+1) - 6a^2b^2 < (t-1)(2t+1) - 6(t-1) = (t-1)(2t-5) < 0$.

Други разред, Б категорија

1. Како је M средиште BC, следи $\frac{BC}{CM} = 2$. Како је P средиште AS и $AS = SB$, следи $\frac{BS}{SP} = 2$.

Важи и $\sphericalangle BCM = 90° = \sphericalangle BSP$ (дијагонале квадрата се секу под правим углом), па је $\triangle BCM \sim \triangle BSP$. Специјално, $\sphericalangle PBS = \sphericalangle MBC$ (Тангента 52, стр. 47, Писмени задаци, задатак 5).



OK 10 2B 1

2. Ако је $t = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, једначина је дефинисана за свако $x \in \mathbb{R}$ и овом сменом постаје $\sqrt{t} = 2 - t$. За $t > 2$ она нема решења (стране су различитих знака), а за $t \leqslant 2$ је еквивалентна са $t = (2-t)^2 = 4 - 4t + 4 \Leftrightarrow 0 = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$. Због $t \leqslant 2$ следи $x^2 + x + 1 = t = 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0\}$ (Тангента 55, стр. 44, Писмени задаци, задатак 2).

3. Из услова задатка је $(x+y+1)^2 = (x^2+y^2) + 1 + 2(x + xy + y) = 11 + 6\sqrt{2} = (3+\sqrt{2})^2$.

1° Ако је $x + y + 1 = -3 - \sqrt{2}$, тј. $x + y = -4 - \sqrt{2}$ и $xy = 2 + 3\sqrt{2} - (-4 - \sqrt{2}) = 6 + 4\sqrt{2}$, x и y су корени квадратне једначине $t^2 + (4+\sqrt{2})t + (6 + 4\sqrt{2}) = 0$. Међутим, дискриминанта ове једначине је $(4+\sqrt{2})^2 - 4 \cdot (6 + 4\sqrt{2}) = -6 - 8\sqrt{2} < 0$, па она нема реалних решења.

2° Ако је $x+y+1 = 3+\sqrt{2}$, тј. $x+y = 2+\sqrt{2}$ и $xy = 2+3\sqrt{2}-(2+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$, x и y су корени квадратне једначине $t^2 - (2+\sqrt{2})t + 2\sqrt{2} = 0$ (тј. 2 и $\sqrt{2}$).

Дакле, решење је $(x, y) \in \left\{(2, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 2)\right\}$.

4. Играчи A и B су одиграли 10 партија ако су играли међусобно, односно 11 партија ако нису играли међусобно, а преостали играчи су одиграли $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ партија.

1° Ако A и B нису одиграли партију, следи $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 11 = 55$, тј. $n^2 - 5n - 82 = 0$. Међутим, ова једначина нема целобројних решења.

2° Ако су A и B одиграли партију, следи $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 10 = 55$, тј. $n^2 - 5n - 84 = 0 \Leftrightarrow n \in \{-7, 12\}$, односно $n = 12$ (јер је $n \in \mathbb{N}$).

Дакле, на турниру је учествовало 12 играча, а A и B су играли међусобно.

5. Нека је k број Перицине куће.

1° Ако $3 \mid k$, на основу прве изјаве је $50 \leqslant k \leqslant 59$, тј. мора бити $k \in \{51, 54, 57\}$. Како ниједан од тих бројева није дељив са 4, на основу друге изјаве је $60 \leqslant k \leqslant 69$. Како не може бити $k \leqslant 59$ и $k \geqslant 60$, следи да је ова ситуација немогућа.

2° Ако $3 \nmid k$, тада $6 \nmid k$, па, на основу треће изјаве, следи $70 \leqslant k \leqslant 79$. Такође $4 \mid k$, иначе би, по другој изјави, следило $60 \leqslant k \leqslant 69$, тј. $k \leqslant 69$ и $k \geqslant 70$, што је немогуће.

Дакле, $70 \leqslant k \leqslant 79$, $3 \nmid k$, $4 \mid k$. Једини број који задовољава претходне особине је 76 (између 70 и 79 постоје два броја дељива са 4 – то су 72 и 76, али је 72 дељив са 3).

Дакле, број Перицине куће је 76.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је $m = \sum_{k=1}^{n-3}(k \cdot k!)$. Тада је

$$\sum_{k=1}^{n-3}(k \cdot k!) = \sum_{k=1}^{n-3}((k+1-1) \cdot k!) = \sum_{k=1}^{n-3}((k+1)! - k!) = (n-2)! - 1.$$

Ако је n сложен број, пошто за $n \geqslant 4$ важи $\frac{n}{2} \leqslant n-2$, постоји $d > 1$ тако да $d \mid n$ и $d \leqslant n-2$, па $d \mid (n-2)!$ и $d \nmid m$, односно $n \nmid m$. Ако је n прост број, на основу Вилсонове теореме $n \mid (n-1)! + 1 = (n-1)m + n$, тј. $n \mid (n-1)m$. Како је $(n, n-1) = 1$, одавде и $n \mid m$ (Тангента 56, стр. 8, Наградни задаци, M792).

2. Како је x_i (за $i \in \{1, 2, \ldots, 2010\}$) нула полинома $x^{2010} + 20x + 2$, следи $x_i^{2010} = -20x_i - 2$, одакле је $x_i^{2011} = -20x_i^2 - 2x_i$. На основу Виетових формула следи $\sum_{i=1}^{2010} x_i = 0$ и $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2010} x_i x_j = 0$, па је

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2010} x_i^{2011} &= \sum_{i=1}^{2010}\left(-20x_i^2 - 2x_i\right) = -20 \cdot \sum_{i=1}^{2010} x_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} x_i \\
&= -20 \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{2010} x_i\right)^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2010} x_i x_j\right) - 2 \cdot \sum_{i=1}^{2010} x_i \\
&= -20 \cdot \left(0^2 - 2 \cdot 0\right) - 2 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

3. Ако је $n = 3$, важи $z_1 + z_2 = -z_3$, одакле је $|z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$, тј. $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = -|z_1|^2$. Следи $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2 = 3 \cdot |z_1|^2$. Аналогно је $|z_2 - z_3| = 3 \cdot |z_1|^2 = |z_3 - z_1|^2$, одакле је $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$, тј. тачке одређене бројевима z_1, z_2 и z_3 чине једнакостраничан троугао.

Ако је $n > 3$ паран број, $n = 2k, k \geqslant 2$, нека су $z_1, z_2, \ldots, z_k$ различити бројеви модула 1, нека припадају унутрашњости првог квадранта ($\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i > 0$ за $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$; такав избор постоји) и нека је $z_{k+i} = -z_i$ за $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Важи $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_{2k}|$ и $z_1 + z_2 + \ldots + z_{2k} = 0$. Уколико је $2k$-тоугао одређен овим тачкама правилан, он се ротацијама око свог центра (0) за $i \cdot \frac{\pi}{k}$ (за $i \in \{1, 2, \ldots, 2k\}$) слика у себе, па пошто има тачку у унутрашњости првог квадранта, мора је имати и у унутрашњости сваког квадранта (јер је $k \geqslant 2$, па је $\frac{\pi}{k}$ оштар угао). Међутим, по кострукцији он нема тачака у унутрашњости другог квадранта, па не може бити правилан.

Ако је $n > 3$ непаран број, $n = 2k+3, k \geqslant 1$, нека су $z_2, z_3, \ldots, z_{k+1}$ различити бројеви модула 1, нека припадају унутрашњости првог квадранта

($\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i > 0$ за $i \in \{2, 3, \ldots, k+1\}$) и нека је $\frac{1}{2} > \operatorname{Re} z_2 > \operatorname{Re} z_3 > \ldots > \operatorname{Re} z_{k+1}$ (такав избор постоји). Нека је $z_{k+2+i} = -z_i$ за $i \in \{2, 3, \ldots, k+1\}$ и нека је $z_1 = -1$, $z_{k+2} = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_{k+3} = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Важи $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_{2k+3}|$ и $z_1 + z_2 + \ldots + z_{2k+3} = z_1 + z_{k+2} + z_{k+3} = 0$ и ово је скуп различитих тачака (z_{k+3} је у унутрашњости четвртог крадранта, а $z_{k+3} \notin \{z_2, z_3, \ldots, z_{k+1}\}$, јер је $\operatorname{Re} z_{k+2} = \frac{1}{2}$). Уколико је $(2k+3)$-угао одређен овим тачкама правилан, он се ротацијама око свог центра (0) за $i \cdot \frac{2\pi}{2k+3}$ (за $i \in \{1, 2, \ldots, 2k+2\}$) слика у себе, па пошто има тачку у унутрашњости првог квадранта, мора је имати и у унутрашњости сваког квадранта (јер је $k \geqslant 1$, па је $\frac{2\pi}{2k+3}$ оштар угао). Међутим, по кострукцији он нема тачака у унутрашњости другог квадранта, па не може бити правилан.
Дакле, тврђење је тачно за $n = 3$, иначе није.

4. Нека је $b(n)$ (за $n \in \mathbb{N}$) број подскупова скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садрже три узастопна природна броја. Нека је $n \geqslant 4$, P подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и $m = \max\{\{1, 2, \ldots, n\} \setminus P\}$ (за $n \geqslant 4$ претходни максимум је добро дефинисан). Мора бити $m \in \{n-2, n-1, n\}$ (иначе $n-2, n-1, n \in P$).

1° Ако је $m = n$, P је подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ који не садржи три узастопна природна броја. Међутим и сваки такав подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ једнозначно одређује подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и за кога је $m = n$ (заправо, исти тај подскуп). Дакле, број оваквих скупова је $b(n-1)$.

2° Ако је $m = n-1$, P садржи n, а $P \setminus \{n\}$ је подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ који не садржи три узастопна природна броја. Међутим и сваки такав подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ једнозначно одређује подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и за кога је $m = n-1$ (исти тај подскуп коме се дода елемент n). Дакле, број оваквих скупова је $b(n-2)$.

3° Ако је $m = n-2$, P садржи $n-1$ и n, а $P \setminus \{n-1, n\}$ је подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-3\}$ који не садржи три узастопна природна броја. Међутим и сваки такав подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n-3\}$ једнозначно одређује подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садржи три узастопна природна броја и за кога је $m = n-2$ (исти тај подскуп коме се додају елементи $n-1$ и n). Дакле, број оваквих скупова је $b(n-3)$.

Дакле, $b(n) = b(n-1) + b(n-2) + b(n-3)$ за свако $n \geqslant 4$. Како је $b(1) = 2, b(2) = 4, b(3) = 7$, узастопном применом формуле се добија $b(10) = 504$.

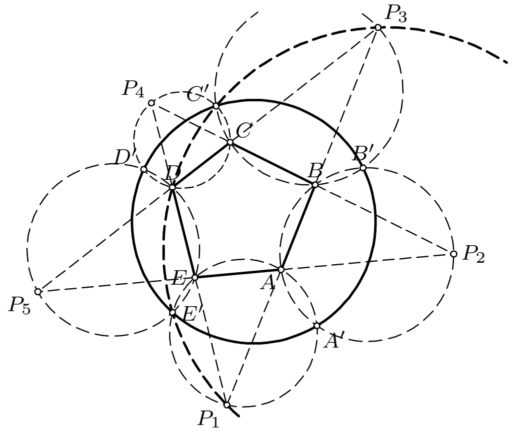
5. Нека су тачке A', B', C', D' и E' распоређене као на слици (решење је аналогно и у другим ситуацијама). Како је четвороугао $BP_3C'C$ тетиван, следи $\sphericalangle P_1P_3C' = \sphericalangle BP_3C' = \sphericalangle P_4CC' = \sphericalangle P_4DC' =$

$180^\circ - \sphericalangle C'DP_1$, па су тачке P_1, P_3, C' и D на истом кругу. Због симетрије том кругу припада и E'. Користећи тетивност четвороугла $AA'B'B$ и како су углови над истом ттивом једнаки, следи

$$\begin{aligned}\sphericalangle A'B'C' &= \sphericalangle A'B'B + \sphericalangle BB'C' = \sphericalangle A'AP_1 + \sphericalangle BP_3C' \\ &= A'E'P_1 + \sphericalangle P_1P_3C' = P_1E'C' - \sphericalangle A'E'C' + \sphericalangle P_1P_3C'.\end{aligned}$$

Како је четвороугао $P_1P_3C'E'$ тетиван, важи $\sphericalangle P_1E'C' + \sphericalangle P_1P_3C' = 180^\circ$, па је $\sphericalangle A'B'C' = 180^\circ - \sphericalangle A'E'C'$, односно тачке A', B', C' и E' припадају истом кругу, а због симетрије том кругу припада и D'.

Напомена. Ово тврђење је познато и као Микелова пентаграм теорема.



ОК 10 3А 5

Трећи разред, Б категорија

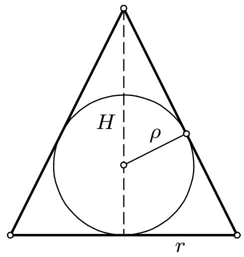
1. За све $\overrightarrow{x}$ и $\overrightarrow{y}$ је $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{x} = 0$ и $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x}$, па је и $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$. Следи

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\right) \times \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) &= \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \\ \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \times \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) &= \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}, \\ \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) \times \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\right) &= \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \times \overrightarrow{a},\end{aligned}$$

одакле се сабирањем добија тврђење задатка (Тангента 54, стр. 45, Писмени задаци, задатак 3).

2. Пресек купе и равни која садржи осу купе и пречник основе купе је једнакокраки троугао основице $2r$, висине H, крака s и полупречника уписане кружнице ρ. Из формула за површину тог троугла следи $\frac{2r \cdot H}{2} = \rho(2r + 2s)$.

Следи $r(H-\rho) = \rho s$, а како је $s^2 = r^2 + H^2$, добија се $r^2(H-\rho)^2 = \rho^2(H^2+r^2) = \rho^2H^2 + \rho^2 r^2 \Leftrightarrow r^2\left(H^2 - 2H\rho\right) = H^2\rho^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{H^2-2H\rho}{H^2\rho^2} = \dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{2}{\rho H}$ (Тангента 56, стр. 34, Писмени задаци, задатак 1).



ОК 10 ЗБ 2

3. За $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ је $\sin y, \cos y \neq 0$, па је систем еквивалентан са $\dfrac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y$, $\dfrac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y$. Сабирањем ове две једначине добија се $\dfrac{\sin(x+y)}{\sin y \cos y} = 2$, тј. $\sin(x+y) = \sin 2y \Leftrightarrow 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+3y}{2} = 0$. Из $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ следи $-\frac{\pi}{4} < \frac{x-y}{2} < \frac{\pi}{4}$, па ако је $\sin\frac{x-y}{2} = 0$ следи $x = y$; међутим, тада из полазних једначина следи $\sin x = 2\sin^3 x \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ (јер је $\sin x > 0$); тада је $y = \frac{\pi}{4}$. Из $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ следи $0 < \frac{x+3y}{2} < \pi$, па ако је $\cos\frac{x+3y}{2} = 0$ следи $x + 3y = \pi$; међутим, тада из полазних једначина следи $\sin 3y = \sin(\pi - 3y) = \sin x = 2\sin^3 y \Leftrightarrow 3\sin y - 4\sin^3 y = 2\sin^3 y \Leftrightarrow \sin y = 2\sin^3 y \Leftrightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4}$ (јер је $\sin y > 0$); тада је $x = \frac{\pi}{4}$.

Провером, $x = y = \dfrac{\pi}{4}$ је решење, па је ово једино решење система из задатка.

4. Видети решење трећег задатка за други разред А категорије.

5. Видети решење петог задатка за други разред Б категорије.

Четврти разред, А категорија

1. Видети решење првог задатка за трећи разред А категорије.

2. Нека је $\sin x = t$ и $g(t) = t + \dfrac{2}{3+t} + b$. g је диференцијабилна на $(0,1)$ и важи $g'(t) = \dfrac{7+6t+t^2}{(3+t)^2}$, па је g растућа на $[-1,1]$ ($\frac{-6+\sqrt{6}}{2} < \frac{-6+3}{2} = -\frac{3}{2} < -1$). Следи $f(b) = \max\{|g(-1), g(1)|\} = \max\left\{|b|, \left|b + \dfrac{3}{2}\right|\right\} \geqslant \dfrac{3}{4}$. Како је $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{3}{4}$, следи $\min\limits_{b\in\mathbb{R}} f(b) = \dfrac{3}{4}$.

3. Нека је $\mathfrak{I}(A,B) = \dfrac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n}$. Применом операција $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ вредност $\mathfrak{I}$ се не мења, тј. применом ових операција могуће добити само парове (C,D) за које је $\mathfrak{I}(C,D) = \mathfrak{I}(A,B)$. Са друге стране, ако су $C = (c_1, \ldots, c_m)$ и $D = (d_1, \ldots, d_n)$ такви да је $\mathfrak{I}(C,D) = \mathfrak{I}(A,B)$, узастопном применом операције 3° на c_1, d_j и $z = \frac{b_j}{d_j}$ (за свако $j \in \{1, \ldots, n\}$,

редом), а након тога узастопном применом операције 1° на c_1, c_j и $z = \frac{c_j}{a_j}$ (за свако $j \in \{2, \ldots, n\}$, редом) се долази до $C' = (c'_1, \ldots, c'_m)$ и $D' = (d'_1, \ldots, d'_n)$ таквих да важи $c'_i = a_i$ за $j \in \{2, \ldots, n\}$ и $d'_i = b_i$ за $j \in \{1, \ldots, n\}$; међутим, због $\mathfrak{I}(C', D') = \mathfrak{I}(C, D) = \mathfrak{I}(A, B)$ мора бити и $c'_1 = a_1$.
Дакле, од (A, B) се може добити $(\overline{A}, \overline{B})$ ако и само ако је $\dfrac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m}{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \in \mathbb{R}$.

4. Функције $f(x) = x^2 + kx + k - 1$ (за $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$), $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$ и $f(x) = x^2 + 4x + 4$ задовољавају услове задатка, па је $p(n) \geqslant n + 1 > n$. $p(4) = 5 < 4^2$, $p(5) = 6 < 5^2$, $p(6) = 10 < 6^2$, па за $n \in \{4, 5, 6\}$ важи и друга неједнакост. Ако $f(x) = a(x + x_1)(x + x_2)$ има тражена својства, бројеви a, $a(x_1 + x_2)$ и ax_1x_2 су из $\{1, 2, \ldots, n\}$, па је $x_2 \leqslant \dfrac{n}{ax_1}$, одакле је

$$p(n) \leqslant \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{a=1}^{n} \frac{n}{ax_1} = n \sum_{x_1=1}^{n} \frac{1}{x_1} \sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} = n \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^2.$$

Дакле, довољно је доказати да је $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} < \sqrt{n}$ за $n \geqslant 7$; доказ индукцијом; за $n = 7$ је $\displaystyle\sum_{i=1}^{7} \frac{1}{i} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = 2 + \frac{9}{20} + \frac{3}{21} < 2 + \frac{9}{20} + \frac{3}{20} = 2{,}6 < \sqrt{7}$. Нека је тврђење тачно за n; важи $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} < \sqrt{n} + \dfrac{1}{n+1}$, па је довољно доказати да је

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \frac{1}{n+1} \leqslant \sqrt{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ \Leftarrow \quad & \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow 2 \leqslant \sqrt{n+1} \Leftrightarrow n \geqslant 5. \end{aligned}$$

5. Видети решење петог задатка за трећи разред А категорије.

Четврти разред, Б категорија

1. Нека је x први, а y други број. Тада је $x + y = c$ и треба одредити највећу вредност израза x^3y^2 при услову $x, y > 0, x + y = c$, односно треба одредити највећу вредност функције $f(x) = x^3(c - x)^2$, $x \in (0, c)$. f је диференцијабилна функција. Како је $f'(x) = 3x^2(c-x)^2 + x^3 \cdot 2(c-x) \cdot (-1) = x^2(c-x)(3c-5x)$, следи да је $f'(x) > 0$ за $x \in \left(0, \frac{3}{5} \cdot c\right)$ и $f'(x) < 0$ за $x \in \left(\frac{3}{5} \cdot c, c\right)$, па се максимум ове функције достиже за $x = \frac{3}{5} \cdot c$ и износи $f\left(\frac{3}{5} \cdot c\right) = \frac{3^3 \cdot 2^2}{5^5} \cdot c^5$ (Тангента 58, стр. 28, Писмени задаци, задатак 3).

2. Видети решење другог задатка за трећи разред Б категорије.

3. Нека је $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{27}}, \beta = \arcsin \sqrt{\frac{3}{28}}$. Како је $\frac{1}{\sqrt{27}}, \sqrt{\frac{3}{28}} > 0$, α и β су оштри углови и важи $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}, \sin \beta = \sqrt{\frac{3}{28}}$. Следи $\cos \beta =$

$\sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{\frac{25}{28}} = \frac{5}{\sqrt{28}}$ (β је оштар угао), одакле је $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{3}}{5}$, па важи

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{5}}{1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

Како је $\alpha+\beta \in (0,\pi)$, следи $\alpha+\beta = \frac{\pi}{6}$ (једини угао из $(0,\pi)$ чији је тангенс једнак $\frac{1}{\sqrt{3}}$ је $\frac{\pi}{6}$), па је $\frac{\pi}{\alpha+\beta} = 6 \in \mathbb{N}$.

4. (а) Нека комплексном броју z одговара тачка T_z (за $z \in \{a, b, z_1, z_2, z_1 + z_2, 0\}$). За $a, b \in \mathbb{C}$ израз $|a-b|$ једнак је дужини дужи T_aT_b, па из $|(z_1+z_2)-0| = |z_1+z_2| = |z_1-z_2|$ следи $|T_{z_1+z_2}T_0| = |T_{z_1}T_{z_2}|$. Дакле, четвороугао $T_0T_{z_1}T_{z_1+z_2}T_{z_2}$ је паралелограм коме су дијагонале једнаких дужина, односно правоугаоник, па је $\triangle T_{z_1}T_0T_{z_2}$ правоугли.

(б) Ако је $z_1 = 1, z_2 = 1+i$, тада је $\triangle T_{z_1}T_0T_{z_2}$ правоугли ($\sphericalangle T_0T_{z_1}T_{z_2} = 90°$) и $|z_1+z_2| = \sqrt{5} \neq 1 = |z_1-z_2|$, тј. не мора бити $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$.

Друго решење. (дела (а)) Како је $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2)$, из $|z_1+z_2| = |z_1-z_2|$ и $z_1z_2 \neq 0$ следи $z_1\overline{z_2} = -\overline{z_1}z_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, тј. број $\frac{z_1}{z_2}$ је чисто имагинаран, што значи да вектори који одговарају бројевима z_1 и z_2 заклапају прав угао.

5. На основу таблице следи да сваки студент има бар један заједнички одговор $\top$–$\bot$ са неким другим студентом. Стога ако неки студент има свих 5 тачних одговора, онда сваки студент има бар 1 тачан одговор. Како студенти имају различит број тачних одговора, следи да је укупан број тачних одговора $5+4+3+2+1 = 15$. Из таблице следи да је максималан број тачних одговора $2+2+4+4+3 = 15$ (на прво питање a или b, на друго a или b, на треће $\top$, на четврто $\top$ и на пето $\top$). Због $\top$–$\bot$ питања следи би све тачне одговоре имао Аца, али би тада Беба и Гоца имали по два тачна одговора, а Весна и Доки по три, што противречи услову задатка да сви студенти имају различит број тачних одговора. Дакле, не постоји студент који има све тачне одговоре.
Укупан број тачних одговора је $4+3+2+1+0 = 10$. Уколико би тачни одговори на 3. и 4. питање били $\bot$ и $\bot$, онда би максималан број тачних одговора био $2+2+1+1+3 = 9 < 10$, што није могуће. Уколико би тачни одговори на 3. и 4. питање били $\top$ и $\top$, онда би минималан број тачних одговора био $1+1+4+4+2 = 12 > 10$, што није могуће.

Напомена. Под условима задатка, могуће је одредити шта је тачан одговор на свако од пет питања, тј. у потпуности одредити шта се догодило. Заиста, из претходног следи да Аца, Весна и Гоца (који су на на 3. и 4. питање одговорили са $\top$ и $\top$) не могу бити студент који има све нетачне одговоре, па је тај студент Беба или Доки.
Ако Беба нема тачног одговора онда су тачни одговори на $\top$–$\bot$ питања: 3. $\bot$ (јавља се 1 пут), на 4. $\top$ (јавља се 4 пута) и на 5. $\bot$ (јавља

се 2 пута). Тада Весна, Гоца и Доки имају бар 2 тачна одговора, па Аца има тачан 1 одговор и то ће бити 4. $\top$. Како су и Ацина и Бебина питања са вишеструким одговором нетачна, следи да су одговори на прва два питања: 1. c (јавља се 1 пут) и 2. c (јавља се 1 пут). Међутим, тада је укупан број тачних одговора $1+1+1+4+2=9$, а не 10, па Беба није студент који има све нетачне одговоре, него Доки.

Како Доки нема тачног одговора, тачни одговори на $\top$–$\perp$ питања су: 3. $\top$ (јавља се 4 пута), на 4. $\perp$ (јавља се 1 пут) и на 5. $\perp$ (јавља се 2 пута). Тада Беба, Весна и Гоца имају бар 2 тачна одговора, па Аца има тачан 1 одговор и то 3. $\top$. Како су и Ацина и Докијева питања са вишеструким одговором нетачна, одговори на прва два питања су: 1. b (јавља се 2 пута) и 2. b (јавља се 2 пута) или c (јавља се 1 пут). Како је укупан број тачних одговора $10=2+1+4+1+2$, следи да је тачан одговор 2. c.

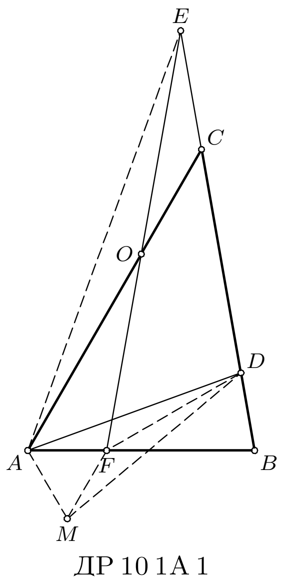
Дакле, тачни одговори су: 1. b, 2. c, 3. $\top$, 4. $\perp$ и 5. $\perp$ (они су у таблици уоквирени–у последњој колони је укупан број тачних одговора сваког од студената).

	I	II	III	IV	V	
Аца	a	a	$\boxed{\top}$	$\top$	$\top$	1
Беба	$\boxed{b}$	b	$\boxed{\top}$	$\boxed{\perp}$	$\top$	3
Весна	a	b	$\boxed{\top}$	$\top$	$\boxed{\perp}$	2
Гоца	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$	$\boxed{\top}$	$\top$	$\boxed{\perp}$	4
Доки	c	a	$\perp$	$\top$	$\top$	0

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ДРЖАВНОГ ТАКМИЧЕЊЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 20.03.2010.

Први разред, А категорија

1. Нека је O пресек AC и EF. Из услова задатка је $\sphericalangle BAD = 20^\circ$ ($\triangle ABD$ је једнакокраки са углом на основици 80°) и $\sphericalangle EOC = 20^\circ$ ($\sphericalangle CEO = \sphericalangle DEF = 20^\circ$ и $\sphericalangle BCA = 40^\circ$ из једнакокраког $\triangle ADC$, коме је угао над основицом 100°), па је $EC = OC$.



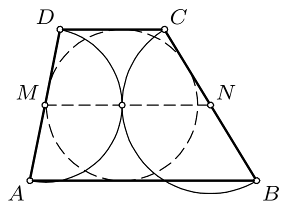
ДР 10 1А 1

Нека је M таква да је $\sphericalangle DAM = 80^\circ$, $AM = AF$ и налази се у полуравни одређеној правом AB у којој није C. Тада је $\triangle DAM \cong \triangle DBA$ ($AM = DB, AD = AB$, $\sphericalangle DAM = \sphericalangle ABD = 80^\circ$) и $\triangle AFD \cong \triangle MFD$ ($DF = DF, DM = DA$ и $FM = FA$, јер је $AF = AM$ и

$\sphericalangle FAM = \sphericalangle DAM - \sphericalangle DAB = 60°$, па је $\triangle FAM$ једнакостраничан), одакле следи $\sphericalangle ADF = 10°$.
Како је $\sphericalangle DEF = \sphericalangle DAF = 20°$ четвороугао $AEDF$ је тетиван, па је $\sphericalangle AEO = \sphericalangle AEF = 10°$. Како је $\sphericalangle OAE = \sphericalangle EOC - \sphericalangle AEO = 10°$, следи $\sphericalangle AOE = 160°$, а како је $\sphericalangle ABC = 80°$, O је центар описане кружнице $\triangle ABE$, па је $AO = BO$. Како је $\sphericalangle BAO = 60°$ (из $\triangle ABC$), $\triangle ABO$ је једнакостраничан, па је $AB = AO$.
Коначно, $DE = CD + EC = AB + OC = AO + OC = AC$.

2. Како је четвороугао $ABCD$ тангентан, важи $AB + CD = BC + AD$. Нека су M и N средишта страница AD и BC, редом. Дуж MN је средња линија трапеза, па је $MN = \frac{1}{2} \cdot (AB + CD) = \frac{1}{2} \cdot (AD + BC)$.

Ако је растојање између центара два круга једнако збиру полупречника та два круга, они се додирују. Како су M и N центри кружница над пречницима AD и BC, редом, следи тврђење задатка.



ДР 10 1А 2

3. Нека је $S(x)$ збир цифара броја $x \in \mathbb{N}$.

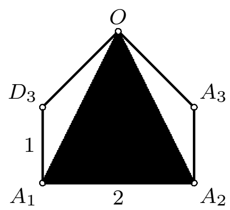
1° Ако $2 \mid n$, важи $n = 2k$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Број $x = \overline{a_1a_2\dots a_ka_k\dots a_2a_1}$, $a_1 > 0$, је дељив са 9 ако и само ако $9 \mid S(x) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = 2S(y)$, где је $y = \overline{a_1a_2\dots a_k}$, тј. $9 \mid S(x) \Leftrightarrow 9 \mid S(y)$, па тражених x има колико и одговарајућих y, тј. колико има k-тоцифрених бројева дељивих са 9. Дакле, у овој ситуацији тражених бројева има $\left[\dfrac{10^k-1}{9}\right] - \left[\dfrac{10^{k-1}-1}{9}\right] = 10^{k-1} = 10^{\frac{n}{2}-1}$ (број не сме почињати са 0, а сваки 9-ти број је дељив са 9).

2° Ако $2 \nmid n$, важи $n = 2k+1$ за неко $k \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, 9,\ a_1 > 0$. Број $x = \overline{a_1a_2\dots a_kca_k\dots a_2a_1}$ је дељив а 9 ако и само ако $9 \mid 2S(y) + c$, где је $y = \overline{a_1a_2\dots a_k}$. Ако $9 \mid S(y)$, тада је $9 \mid x \Leftrightarrow c \in \{0, 9\}$, тј. у овој ситуацији постоји две могућности за c. Ако $9 \nmid S(y)$, тада $2S(y) + c \equiv 0 \pmod 9$, тј. $c \equiv 2S(y) \not\equiv 0 \pmod 9$, па је у овој ситуацији c јединствено одређено. Ако су α_k, β_k, редом, број k-тоцифрених бројева који су дељиви, односно нису дељиви са 9 следи да у овој ситуацији тражених бројева има $2 \cdot \alpha_k + 1 \cdot \beta_k = \alpha_k + (\alpha_k + \beta_k) = \left[\dfrac{10^k-1}{9}\right] - \left[\dfrac{10^{k-1}-1}{9}\right] + 9 \cdot 10^{k-1} = 10^k = 10^{\frac{n-1}{2}}$ ($\alpha_k + \beta_k$ је укупан број k-тоцифрених бројева).

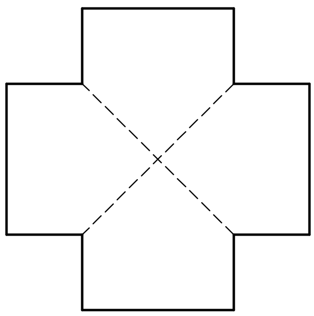
Дакле, тражени број је $10^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$.

4. За $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$ и $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ важи $a - b \mid P(a) - P(b)$.
Ако је $p > 2$, p, q, r су непарни, па су бројеви $p - q$, $q - r$, $r - s$ парни и сваки од њих дели одговарајући међу бројевима $2010 - 3$, $2010 - 20$ и $20 - 3$; међутим, ови бројеви нису сви парни, па је ова ситуација немогућа.
Дакле, $p = 2$. Како $2 \mid r - q$ и $r - q$ дели неки од бројева $2010 - 3$, $2010 - 20$ и $20 - 3$ (од којих је само $2010 - 20$ паран), следи $\{P(q), P(r)\} = \{20, 2010\}$, па је $P(2) = 3$. Пошто $r - q \mid P(r) - P(q) \in \{20 - 2010, 2010 - 20\}$, следи $r - q \in S = \{2, 10, 398, 1990\}$. Ако је $P(r) = 20$, следи $r - 2 \mid 17$, односно $r \in \{3, 19\}$. Како је $r > q > p$, следи $r = 19$, па како је $r - q \in S$, следи $q = 17$, одакле $17 - 2 \mid 2010 - 3$, што је нетачно.
Дакле, $P(r) = 2010$ и $P(q) = 20$. Како $r - 2 \mid 2010 - 3$, следи $r - 2 \in \{3, 9, 223, 669, 2007\}$, односно $r \in \{5, 11\}$ (225, 671 и 2009 су сложени). како је $r - q \in S$, не може бити $r = 11$, па је $r = 5$ и $q = 3$ (јер је $p < q < r$).
Коначно, $P(p + q) = P(2 + 3) = P(5) = P(r) = 2010$.

5. Нека је O пресек A_3C_3 и B_3D_3. Троугао највеће површине (не мора бити једнозначно одређен) који се може уписати у петоугао $A_1A_2A_3OD_3$ (слика ДР 10 1А 5-2) има темена на рубу овог петоугла (бар 2, иначе се површина може повећати хомотетичном сликом; а треће померањем дуж праве нормалне на правац који одређују претходна 2 темена, пошто је унутрашњост фигуре отворен скуп). Како линеарна функција (површина троугла фиксиране странице у зависности од висине) има екстремне вредности у крајевима интервала, његова темена се могу изабрати тако да буду темена петоугла. Међу таквим троугловима највећу површину (једнаку 2) има $\triangle A_1A_2O$.



ДР 10 1А 5-2



ДР 10 1А 5-3

Како се фигура из задатка може разложити на четири оваква петоугла (слика ДР 10 1А 5-3), бар у једном од њих се налази три од смештених девет тачака (Дирихлеов принцип), па оне образују троугао површине највише 2, који се налази унутар фигуре.
Дакле, одговор на питање задатка је негативан.

Први разред, Б категорија

1. Како је (за $x \neq -2,-3$) $f_2(x) = -\dfrac{-2\cdot\frac{2x+7}{x+3}+7}{-\frac{2x+7}{x+3}+3} = -\dfrac{3x+7}{x+2}$, $f_3(x) = -\dfrac{-2\cdot\frac{3x+7}{x+2}+7}{-\frac{3x+7}{x+2}+3} = x$, следи $f_{3k+l} = f_l(x)$, за све $k \in \mathbb{N}, l \in \{0,1,2\}, x \neq -2,-3$. Следи $f_{2009}(2010) = f_2(2010) = -\dfrac{3\cdot 2010+7}{2010+2} = -\dfrac{6037}{2012}$.

2. Нека је 2010 једнак збиру $k > 1$ узастопних природних бројева почев од n, тј. $(n+1)+\ldots+(n+k) = 2010$. Следи $kn+\frac{k(k+1)}{2} = 2010$, одакле је $n = \dfrac{2010}{k} - \dfrac{k+1}{2}$. Како за $k \geqslant 64$ важи $\dfrac{2010}{k} - \dfrac{k+1}{2} < 0$ и како је $k > 1$, следи $2 \leqslant k \leqslant 63$. Како је $n \in \mathbb{N}$, оба сабирка на десној страни су или природни бројеви или се за $\frac{1}{2}$ разликују од природног броја.

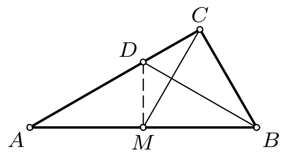
1° Ако је $\frac{2010}{k}, \frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}$, k је непаран делилац $2010 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 67$, тј. $k \in \{3,5,15,67,201,335,1005\}$, односно $k \in \{3,5,15\}$ (јер је $k \leqslant 63$), тј. у овој ситуацији постоји 3 могућности за k (тада је $(k,n) \in \{(3,668),(5,399),(15,126)\}$).

2° Ако је $\frac{2010}{k}, \frac{k+1}{2} \in \mathbb{N}+\frac{1}{2}$, следи $4 \mid k$, тј. $k = 4l$ где $l \mid 3\cdot 5\cdot 67$, па је $l \in \{1,3,5,15,67,201,335,1005\}$, односно $k \in \{4, 4\cdot 3, 4\cdot 5, 4\cdot 15, 4\cdot 67, 4\cdot 201, 4\cdot 335, 4\cdot 1005\}$, тј. (како је $k \leqslant 63$) $k \in \{4,12,20,60\}$, па у овој ситуацији постоји 4 могућности за k (тада је $(k,n) \in \{(4,500),(12,161),(20,90),(60,3)\}$).

Дакле, постоји седам могућности за тражено представљање.

3. Како је $\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} < 3 \Leftrightarrow 4+2\sqrt{1+a+b+ab} = 1+a+1+b+2\sqrt{1+a}\sqrt{1+b} < 9 \Leftarrow \sqrt{3+ab} = \sqrt{1+a+b+ab} \leqslant 2 \Leftrightarrow ab \leqslant 1$, следи тражена неједнакост, јер је $ab \leqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = 1$ (Тангента 55, стр. 45, Писмени задаци, задатак 1).

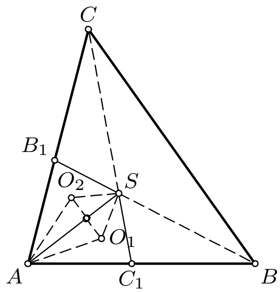
4. Нека је BD ($D \in CA$) симетрала $\sphericalangle ABC$. Како је $BD \perp CM$, $\triangle CMB$ је једнакокрак, одакле је $BC = BM$. Како је $BD = BD$, $BC = BM$ и $\sphericalangle DBM = \sphericalangle DBC$, следи $\triangle CDB \cong \triangle MBD$. Како



ДР 10 1Б 4

је $\triangle ABD$ једнакокрак ($\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAB = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$), следи $DM \perp AB$, па је $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DMB = 90°$. Како је $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = 90°$ и $\sphericalangle ABC = 2\cdot\sphericalangle CAB$, следи $\sphericalangle CAB = 30°$, $\sphericalangle ABC = 60°$.

5. Нека су O_1 и O_2 центри уписаних кругова $\triangle SAC_1$ и $\triangle SAB_1$, редом, а K_1 и K_2 подножја нормала из O_1 и O_2 на AS, редом. Тада је $\triangle AO_1K_1 \cong \triangle AO_2K_2$ ($O_1K_1 = O_2K_2$, $\sphericalangle O_1K_1A = \sphericalangle O_2K_2A = 90^\circ$, $\sphericalangle O_1AK_1 = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle BAS = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle CAS = \sphericalangle O_2AK_2$), па је $K_1 \equiv K_2$. Следи $\triangle SO_1K_1 \cong \triangle SO_2K_2$ ($\sphericalangle O_1K_1S = \sphericalangle O_2K_2S = 90^\circ$, $O_1K_1 = O_2K_2$, $SK_1 = SK_2$),

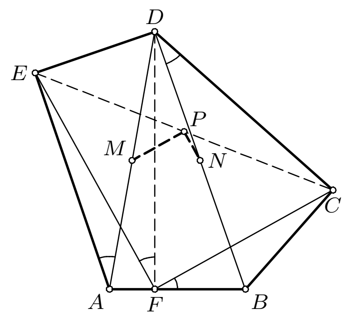


ДР 10 1Б 5

па је $\sphericalangle C_1SA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle O_1SA = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle O_2SA = \sphericalangle B_1SA$. Следи $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle C_1SA - \sphericalangle SAB_1 = \sphericalangle B_1SA - \sphericalangle SAC_1 = \sphericalangle ABB_1$, па је $\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC$. Аналогно је и $\sphericalangle BCA = \sphericalangle CAB$, па је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

Други разред, А категорија

1. Нека је F подножје нормале из D на AB. Како је $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DFB = \sphericalangle AFD = \sphericalangle DEA = 90^\circ$, четвороуглови $FBCD$ и $AFDE$ су тетивни (са центрима описаних кругова N и M, редом), па важи $\sphericalangle CFB = \sphericalangle CDB = \sphericalangle EAD = \sphericalangle EFD$ (углови над тетивом BC, тетивом ED и услов задатка), одакле је $\sphericalangle CFE = \sphericalangle EFD + \sphericalangle DFC = \sphericalangle DFC + \sphericalangle CFB = \sphericalangle DFB = 90^\circ$, односно $\triangle EFC$ је правоугли, а P је центар његове описане кружнице.



ДР 10 2А 1

Како је заједничка тетива два круга нормална на праву која спаја центре тих кругова, следи $MP \perp EF$ (кружница око $AFDE$ и $\triangle EFC$ са заједничком тетивом EF) и $NP \perp FC$ (кружница око $FBCD$ и $\triangle EFC$ са заједничком тетивом FC), па је $\sphericalangle MPN = \sphericalangle EFC = 90^\circ$ (углови са нормалним крацима).

2. За $n \in \mathbb{N}$ нека је $x_n = 2\underbrace{0\ldots0}_{n-1}\underbrace{1\ldots1}_{n}$. Нека је $A_k = \{x_j \mid k \mid x_j \wedge 1 \leqslant j \leqslant 2010\}$. Како $3 \mid x_n$ ако и само ако је збир цифара броја x_n дељив са 3, тј. ако и само ако $3 \mid n+2$, следи $x_n \in A_3 \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 3$. Како је $x_n = 2\underbrace{0\ldots0}_{n-1}\underbrace{1\ldots1}_{n} = 2 \cdot 10^{2n-1} + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{18 \cdot 10^{2n-1} + 10^n - 1}{9}$, следи $7 \mid x_n \Leftrightarrow 7 \mid 18 \cdot 10^{2n-1} + 10^n - 1$, тј. $x_n \in A_7 \Leftrightarrow 0 \equiv 18 \cdot 10^{2n-1} + 10^n - 1 \equiv -3 \cdot 3^{2n-1} + 3^n - 1 = -(3^{2n} - 3^n + 1) \equiv -(3^{2n} - 8 \cdot 3^n + 15) = -(3^n - 3) \cdot (3^n - 5)$

(mod 7), односно $x_n \in A_7 \Leftrightarrow (3^n \equiv 3 \pmod 7 \vee 3^n \equiv 5 \pmod 7)$. Како за $k \in \mathbb{N}_0$ важи $3^{6k+2} \equiv 2 \pmod 7$, $3^{6k+3} \equiv 6 \pmod 7$, $3^{6k+4} \equiv 4 \pmod 7$, $3^{6k+5} \equiv 5 \pmod 7$, $3^{6k} \equiv 1 \pmod 7$, следи $3^n \equiv 3 \pmod 7 \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 6$ и $3^n \equiv 5 \pmod 7 \Leftrightarrow n \equiv 5 \pmod 6$. Како $n \equiv 1 \pmod 6 \Rightarrow n \equiv 1 \pmod 3$ и како не постоји n за које је $n \equiv 5 \pmod 6$ и $n \equiv 1 \pmod 3$, следи $A_7 \setminus A_3 = \{x_j \mid j \equiv 5 \pmod 6\}$.

Како је $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ и $10^2 = 100 \equiv -2 \pmod{17}$, следи $9 \cdot x_{12} = 18 \cdot 10^{2\cdot 12-1} + 10^{12} - 1 = 10^{23} + 10^{12} - 1 \equiv 10^7 + 10^{12} - 1 \equiv 10 \cdot (-2)^3 + (-2)^6 - 1 = -80 + 64 - 1 = 17 \equiv 0 \pmod{17}$, па $17 \mid 9x_n$, односно $17 \mid x_n$.

Како 3 и 7 нису у уоченом низу, сви бројеви из $A_3 \cup A_7$ су сложени. Како и $12 \notin A_3 \cup A_7$ ($12 \not\equiv 1 \pmod 3$ и $12 \not\equiv 5 \pmod 5$), следи да сложених бројева у уоченом низу има барем

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_7 \cup \{x_{12}\}| &= |A_3| + |A_7 \setminus A_3| + |\{x_{12}\}| \\ &= |\{x_j \mid j \equiv 1 \pmod 3 \wedge 1 \leqslant j \leqslant 2010\}| \\ &+ |\{x_j \mid j \equiv 5 \pmod 6 \wedge 1 \leqslant j \leqslant 2010\}| + 1 \\ &= \frac{2010}{3} + \frac{2010}{6} + 1 = 670 + 335 + 1 = 1006 > \frac{2010}{2}, \end{aligned}$$

тј. у уоченом низу има више сложених него простих бројева.

3. Нека је $\alpha = \arcsin \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{6+3\sqrt{2}}}{4}$. Тада је $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{6+3\sqrt{2}}}{4}$. Како је $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{6+3\sqrt{2}}}{4} > \frac{0+2}{4} = \sin\frac{\pi}{6}$, следи $\alpha > \frac{\pi}{6}$. Како је

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2\cdot\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot\frac{2-\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+2\sqrt{(2-\sqrt{2})(6+3\sqrt{2})}}{16} \\ &= 1 - \frac{8+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \end{aligned}$$

следи $\cos 4\alpha = 2\cdot\cos^2 2\alpha - 1 = 2\cdot\dfrac{2+6+2\sqrt{12}}{16} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Како је $4\alpha \in \left(\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$ и како на овом интервалу једначина $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ има јединствено решење $x = \frac{11\pi}{6}$, следи $4\alpha = \frac{11\pi}{6}$, па је $\sin(24\alpha) = \sin 11\pi = 0$.

4. Квадратна једначина има бар једно реално решење ако и само ако је њена дискриминанта ненегативна, тј. у ситуацији из задатка ако и само ако је $D(n) = (b+2n)^2 - 4(a+n)(b+n) = 4(b-a-c)n + b^2 - 4ac \geqslant 0$.

1° Ако је $b-a-c < 0$ и $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{4ac-b^2}{4(b-a-c)}$ (постоји овакав природан број), следи $D(n) = 4(b-a-c)n + b^2 - 4ac < 4(b-a-c)\cdot\frac{4ac-b^2}{4(b-a-c)} + b^2 - 4ac = 0$, па $D(n) \geqslant 0$ не може да важи за свако $n \in \mathbb{N}$.

2° Ако је $b-a-c = 0$, важи $D(n) = b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geqslant 0$.

3° Ако је $b-a-c>0$, важи $b>a+c>0$ (и $n>0$), па је $D(n)=4(b-a-c)n+b^2-4ac>0+(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geqslant 0$.

Дакле, тражене уређене тројке $(a,b,c)\in\{1,2,\ldots,2010\}^3$ су тачно оне за које важи $b\geqslant a+c$. За $2\leqslant b\leqslant 2010$ је $1\leqslant a\leqslant b-1$, па је $1\leqslant c\leqslant b-a$, тј. за неко b ($2\leqslant b\leqslant 2010$) број тражених тројки је $\sum_{a=1}^{b-1}(b-a)=\dfrac{b(b-1)}{2}$, одакле је укупан број таквих тројки

$$\begin{aligned}\sum_{b=2}^{2010}\frac{b(b-1)}{2} &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sum_{b=1}^{2010}b^2-\sum_{b=1}^{2010}b\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2010\cdot 2011\cdot 4021}{6}-\frac{2010\cdot 2011}{2}\right)=\binom{2011}{3}.\end{aligned}$$

5. Једним питањем се сазнаје скуп бројева који се налази у скупу A као и у његовом комплементу $\overline{A}$. Такође, ако су познати бројеви који се налазе у скуповима A и B, тада су познати и бројеви који се налазе у скупу $A\cup B$ (као и $A\setminus B$).

(а) Шест питања је довољно. Нека су $K_1,K_2,\ldots,K_8$ колоне, а $V_1,V_2,\ldots,V_8$ врсте шаховске табле и нека су постављена питања везана за скупове

$$A_1=\{K_1,K_2,K_3,K_4\},A_2=\{K_1,K_2,K_5,K_6\},A_3=\{K_1,K_3,K_5,K_7\},$$

$$A_4=\{V_1,V_2,V_3,V_4\},A_5=\{V_1,V_2,V_5,V_6\},A_6=\{V_1,V_3,V_5,V_7\}.$$

Из прва три питања се могу открити бројеви који се налазе у произвољној колони ($K_1=A_1\cap A_2\cap A_3$, $K_2=(A_1\cap A_2)\setminus K_1$, $K_3=(A_1\cap A_3)\setminus K_1$, $K_4=A_1\setminus(K_1\cup K_2\cup K_3)$, $K_5=(A_2\cap A_3)\setminus K_1$, $K_6=A_2\setminus(K_1\cup K_2\cup K_5)$, $K_7=A_3\setminus(K_1\cup K_3\cup K_5)$, $K_8=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$), а из последња три питања који се бројеви налазе у произвољној врсти (симетрично), тј. може се открити који се број налази у произвољном пољу.

(б) Пет питања није довољно. Нека се првим питањем сазнаје скуп бројева у скупу A_1 и нека је $|A_1|\geqslant|\overline{A_1}|$ (без умањења општости). Тада је $|A_1|\geqslant 32$. Аналогно, нека се другим питањем сазнајемо скуп бројева у скупу A_2 и нека је (без умањења општости) $|A_1\cap A_2|\geqslant 16$. Настављајући поступак, добија се $|A_1\cap A_2\cap A_3|\geqslant 8$, $|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|\geqslant 4$ и $|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|\geqslant 2$. Потребно је сазнати све бројеве скупа $A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5$, међутим, овим питањима се не могу сазнати елементи нити једног његовог подскупа, па пет питања није довољно.

Дакле, тражени број је шест.

Други разред, Б категорија

1. Једначина има смисла за $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ (дефинисаност логаритма и дељење нулом у $\frac{1}{\log_3 x}$). За такво x је $\log_2 3 + 3\log_4 x = \log_2 3 + 3\log_{2^2} x = \log_2 3 + \dfrac{3}{2}\cdot \log_2 x = \log_2\left(3\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)$ и $\left(x^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{\log 3x}} = x^{\log_{3^2} 4^2 \cdot \frac{1}{\log 3x}} = x^{\frac{\log_3 4}{\log_3 x}} = x^{\log_x 4} = 4$, па је једначина еквивалентна са $\log_2\left(3\cdot x^{\frac{3}{2}}\right) = 4 \Leftrightarrow 3\cdot x^{\frac{3}{2}} = 16 \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{16}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$ (Тангента 55, стр. 45, Писмени задаци, задатак 5).

2. За $x < 0$ је $2^x > 3^x$ ($\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$, што је тачно, јер је $\frac{2}{3} \in (0,1)$, па је функција $x \to \left(\frac{2}{3}\right)^x$ опадајућа), па је

$$4^x + 1 - 2^x - 3^x > 4^x + 1 - 2^x - 2^x = (2^x)^2 - 2\cdot 2^x + 1 = (2^x - 1)^2 \geqslant 0,$$

одакле је $4^x + 1 - 2^x - 3^x > 0$, односно $4^x + 1 > 2^x + 3^x$.

3. Нека су a, b, c странице, а R полупречник описане кружнице $\triangle ABC$ и $s = \frac{a+b+c}{2}$. За површину троугла важи $P = \frac{abc}{4R}$ и $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, па је $64a^2b^2c^2 = 16\cdot(8RP)^2 = (8R)^2\cdot 16\cdot s(s-a)(s-b)(s-c) = 5^4\cdot(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$, одакле $5^4 \mid a^2b^2c^2$. Како је $a, b, c \leqslant 2R = 6{,}25$, следи да су бар два од a, b, c дељиви са 5 (и самим тим једнаки 5). Без умањења општости, нека је $a = b = 5$. Тада је $64c^2 = (10+c)c^2(10+c)$, одакле је $c = 6$.
Дакле, тражене тројке су $(5,5,6), (5,6,5), (6,5,5)$.

4. Нека је $S(n)$ збир цифара броја $n \in \mathbb{N}$ чији је декадни запис $n = \overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0}$ ($k \geqslant 0$). Како је $n - S(n) = \left(a_0 + 10^1 a_1 + \ldots + 10^k a_k\right) - (a_0 + a_1 + \ldots + a_k) = 9a_1 + 99a_2 + \ldots + \underbrace{9\ldots9}_{k} a_k$, следи $9 \mid n - S(n)$, па n и $S(n)$ дају исти остатак при дељењу са 9.
Нека је $x = 1\,2\,3\ldots2009\,2010$. Како $9 \mid (1 - S(1)) + (2 - S(2)) + \ldots + (2010 - S(2010)) = (1 + 2 + \ldots + 2010) - (S(1) + S(2) + \ldots + S(2010)) = \frac{2010\cdot 2011}{2} - S(x)$, бројеви x и $\frac{2010\cdot 2011}{2}$ дају исте остатке при дељењу са 9 и тај остатак је 6 ($\frac{2010\cdot 2011}{2} = 1005\cdot 2011 \equiv 6\cdot 4 \equiv 6 \pmod 9$).
Како је $72 = 8\cdot 9$, тражени број мора бити дељив са 8 и 9. Како $9 \nmid x$, следи $72 \nmid x$, па је потребно избацити бар једну цифру. Број је дељив са 8 ако и само ако је троцифрен број састављен од последње три његове цифре дељив са 8, па је потребно избацити цифру десетица броја x (нека је тако добијен број y); заиста, ако би та цифра остала, број добијен брисањем неких његових цифара не би био дељив са 4, па ни са 8 (или би последња цифра добијеног броја била 1 или би последње две биле 10). Како y није дељив са 9 (даје остатак 5 при дељењу са 9), потребно је обрисати бар још једну цифру. Како треба добити највећи могући број и како је број већи што више цифара има, потребно је избацити цифру 5. Избацивањем ма које цифре 5 из y добиће се број

који је дељив и са 9 и са 8 ($y \equiv 200 \equiv 0 \pmod 8$), па, како је $(8,9)=1$, тако добијени број ће бити дељив са 72. Како треба добити што већи број, треба избацити цифру која стоји на петој позицији (посматрано са лева на десно) у броју y (тако добијени број почиње са 12346, док би број добијен избацивањем неке друге цифре 5 почињао са 12345), па је тражени број $1\,2\,3\,4\,6\,7\ldots2009\,200$.

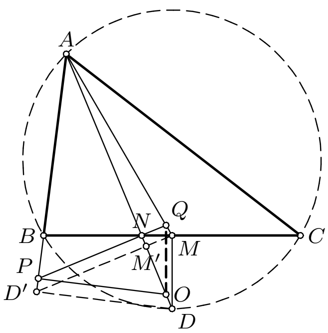
5. Ако речник садржи неку двословну реч, како шестословних речи које почињу том речи има 2^4 (пошто за сваку од преостале 4 позиције постоји два избора слова), њено постојање у речнику искључује 16 шестословних речи. Слично, свака трословна, четворословна и петословна реч искључује, редом, 8, 4 и 2 шестословних речи. Како су овако искључене шестословне речи различите, због особина речника њихов укупан број је $1\cdot16+2\cdot8+x\cdot4+4\cdot2$, где је x број четворословних речи у речнику. Како је број могућих шестословних речи једнак 2^6, а речник их садржи 5, следи

$$1\cdot16+2\cdot8+x\cdot4+4\cdot2+5\leqslant 64,$$

одакле је $4x\leqslant 19$, односно $x\leqslant 4$.
Пример речника: АА; АБА, АББ; БААА, БААБ, БАБА, БАББ; ББААА, ББААБ, ББАБА, ББАББ; БББААА, БББААБ, БББАБА, БББАББ, ББББАА; показује да је могуће да речник садржи тачно 4 четворословне речи.
Дакле највећи број четворословних речи у речнику је 4.

Трећи разред, А категорија

1. Нека је D пресек описане кружнице $\triangle ABC$ правом AO (различит од A); тада је $MD\perp BC$ (D је средиште лука $\widehat{BC}$ описане кружнице $\triangle ABC$ коме не припада A). Нека су M' и D' подножја нормала из M на AO и из D на AB, редом. Тада је $\sphericalangle M'MD = \sphericalangle DNM = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA$ (углови са нормалним крацима и спољашњи угао у $\triangle MCA$). Како је $\sphericalangle DMB = \sphericalangle DD'B = 90^\circ$, четвороугао $MBD'D$ је тетиван, па је



ДР 10 3А 1

$\sphericalangle DMD' = \sphericalangle DBD' = 180^\circ - \sphericalangle DBA = \frac{1}{2}\cdot\sphericalangle CAB + \sphericalangle BCA$. Следи $\sphericalangle DMM' = \sphericalangle DMD'$, па су M', M и D' колинеарне. На основу Талесове теореме следи $\dfrac{AQ}{AM}=\dfrac{AN}{AM'}, \dfrac{AN}{AM'}=\dfrac{AP}{AD'}, \dfrac{AP}{AD'}=\dfrac{AO}{AD}$, па је $\dfrac{AQ}{AM}=\dfrac{AO}{AD}$, одакле је $QO\parallel MD$, односно $QO\perp BC$.

2. Нека је $x_n = \overline{a_n b_n}$, за $n \in \mathbb{N}$. Како је

$$\begin{aligned} x_{n+100^2} - x_n &= \sum_{i=0}^{99}\sum_{j=1}^{100}(n+j+100i)^{2010} \equiv \sum_{i=0}^{99}\sum_{j=1}^{100}(n+j)^{2010} \\ &= 100 \cdot \sum_{j=1}^{100}(n+j)^{2010} \equiv 0 \pmod{100}, \end{aligned}$$

и $x_{n+100^2}, x_n \in \{0, 1, \dots, 99\}$, следи $x_{n+100^2} = x_n$ (за свако $n \in \mathbb{N}$). Следи $a_{n+100^2} = a_n$ и $b_{n+100^2} = b_n$, па је низ $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ периодичан, тј. уочени број је рационалан.

Друго решење. Нека је $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$ (за свако $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$). По биномној формули је $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k+1}{i} j^i = j^{k+1} - (j-1)^{k+1}$, па следи $\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k+1}{i} S_i(n) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k+1}{i}\sum_{j=1}^{n} j^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k+1}{i} j^i = \sum_{j=1}^{n}\left(j^{k+1} - (j-1)^{k+1}\right) = n^{k+1}$, одакле индукцијом по k следи да је $S_k(n)$ полином степена $k+1$ по n са рационалним коефицијентима ($S_0(k) = k$).

Нека је c најмањи заједнички садржалац именилаца коефицијената полинома који одговара изразу $S_k(n)$. Како $100c \mid cS_k(n+100\cdot c) - cS_k(n)$ ($cS_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$), следи $100 \mid S_k(n+100\cdot c) - S_k(n)$, па је низ $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ периодичан, тј. уочени број је рационалан (за свако $k \in \mathbb{N}$, па и за $k = 2010$).

3. (а) За $n = 1$ добија се $f(1) + f(1 + f(1)) = 1$, одакле следи $f(1) \leqslant 1$. Из $f(1) = 0$ следи $f(1) + f(1 + f(1)) = 0 + f(1) = 0 \neq 1$, па је $f(1) = 1$ и $1 = f(1) + f(1 + f(1)) = 1 + f(2)$, односно $f(2) = 0$. За $n = 2$ добија се $f(2) + f(2 + f(2)) = 0 + f(2) = 0 \neq 2$. Из добијене контрадикције следи да у овом случају функционална једначина из задатка нема решења.

(б) Нека је $f(a) = t$. Тада за $j \in \mathbb{N}_0$ важи

$$f(2^j a) = 2^j t \qquad \text{и} \qquad f(2^j(a+t)) = 2^j(a-t). \tag{$\blacklozenge$}$$

Доказ индукцијом; за $j = 0$ прва релација је $f(a) = t$, а заменом $n = a$ у једначину из задатка се добија $a = f(a) + f(a + f(a)) = t + f(a+t)$, тј. друга релација (база индукције); ако важи ($\blacklozenge$), заменом $n = 2^j(a+t)$ у једначину из задатка се добија $2^j(a+t) = f(2^j(a+t)) + f(2^j(a+t) + f(2^j(a+t))) = 2^j(a-t) + f(2^{j+1}a)$, одакле је $f(2^{j+1}a) = 2^{j+1}t$, па се заменом $n = 2^{j+1}a$ у једначину из задатка добија $2^{j+1}a = f(2^{j+1}a) + f(2^{j+1}a + f(2^{j+1}a)) = 2^{j+1}t + f(2^{j+1}(a+t))$.

На основу функционалне једначине из задатка, вредност f у некој тачки a_1 једнозначно одређује вредност у тачкама $a_{k+1} = a_k + f(a_k)$,

за $k \geqslant 1$, и нигде више, тј. уређен пар (a, t), где је $f(a) = t$, одређује вредности f на скупу $A_{a,t} = \{2^j a, 2^j(a+t) \mid j \geqslant 0\}$ и нигде више, па се f једнозначно може добити ако се $\mathbb{N}$ прикаже као дисјунктна унија скупова $A_{a,t}$ (ако је унија $\mathbb{N}$, ту ће бити и дефинисана; ако је дисјунктна, f ће бити добро дефинисана).
Дакле, довољно је изабрати низове $(a_n)_{n\geqslant 1}$ и $(t_n)_{n\geqslant 1}$, тако да се међу бројевима $a_n, a_n + t_n$ $(n \in \mathbb{N})$ сваки непаран број налази тачно једном. То се може постићи избором

$$\mathfrak{I}_n : \qquad a_k^{(n)} = 4k - 3, \text{ за } n \in \mathbb{N}, \quad t_k^{(n)} = \begin{cases} 4n-2, & \text{за } k = 1 \\ 6-4n, & \text{за } k = n \\ 2, & \text{иначе} \end{cases}$$

(заиста, $a_1^{(n)} = 1, a_1^{(1)} + t_1^{(n)} = 4n-1, a_n^{(n)} = 4n-3, a_n^{(n)} + t_n^{(n)} = 3$ и $a_j^n = 4j-3, a_j^{(n)} + t_j^{(n)} = 4j-1$, за $j \notin \{1, n\}$).
Сваки избор $\mathfrak{I}_n$ одређује неку функцију $f^{(n)}$, која задовољава функционалну једначину из задатка. Како за $m \neq n$ важи $f^{(n)}(1) = 4n-2 \neq 4m-2 = f^{(m)}(1)$, тако добијене функције су различите, па у овом случају функционална једначина из задатка има бесконачно много решења.

4. Нека је $f_0 = f_2 - f_1 = 0$ и $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$ за $n \in \mathbb{N}$; низ $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ задовољава рекурентну релацију из задатка (индукција, $f_{-1} = -1, f_{-2} = 1$; ако је $f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$, $f_{-n-1} = (-1)^{n+2} f_{n+1}$, следи $f_{-n-2} = f_{-n} - f_{-n-1} = (-1)^{n+1} f_n - (-1)^{n+2} f_{n+1} = (-1)^{n+3}(f_n + f_{n+1}) = (-1)^{n+3} f_{n+2}$).
Нека је $g_j = f_j f_{n-j}$, за $n \in \mathbb{N}, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Како је $g_j = g_{n-j}$, довољно је посматрати само индексе $1 \leqslant j \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Како је

$$f_m f_{n+1} - f_{m+1} f_n = (-1)^n f_{m-n} \quad \text{за све } m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0, m \geqslant n$$

(за $n = 0$ тврђење је $f_m = f_m$, а за $n = 1$ гласи $f_m - f_{m+1} = -f_{m-1}$; ако је тврђење тачно за $n-2$ и $n-1$, за свако $m \geqslant n$ следи

$$\begin{aligned} f_m f_{n+1} - f_{m+1} f_n &= f_m (f_n + f_{n-1}) - f_{m+1} (f_{n-2} + f_{n-1}) \\ &= (f_m f_n - f_{m+1} f_{n-1}) + (f_m f_{n-1} - f_{m+1} f_{n-2}) \\ &= (-1)^{n-1} f_{m-n+1} + (-1)^{n-2} f_{m-n+2} \\ &= (-1)^n (f_{m-n+2} - f_{m-n+1}) = (-1)^n f_{m-n}, \end{aligned}$$

па је тврђење доказано индукцијом по n), следи (за $2k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, одакле $n - 4k - 2 \geqslant 0$)

$$\begin{aligned} f_{2k} f_{n-2k} - f_{2k+2} f_{n-2k-2} &= -(f_{2k+1} f_{n-2k-1} - f_{2k} f_{n-2k}) \\ &\quad - (f_{2k+2} f_{n-2k-2} - f_{2k+1} f_{n-2k-1}) \\ &= (-1)^{2k} (-f_{n-4k-1} + f_{n-4k-3}) = -f_{n-4k-2} \leqslant 0. \end{aligned}$$

Аналогно је $f_{2k+1} f_{n-2k-1} - f_{2k-1} f_{n-2k+1} = -f_{n-4k} \leqslant 0$ (за $2k-1 \leqslant \left[\frac{n}{2}\right] - 1$, одакле $n - 4k \geqslant 0$).

Дакле, ако је $n = 4m + p$, где је $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in \{0, 1, 2, 3\}$ и $\delta = \left[\frac{p}{2}\right]$, важи

$$\begin{aligned} f_2 f_{n-2} < f_4 f_{n-4} < \quad \ldots \quad &< f_{2m} f_{2m+p} \\ \leqslant f_{2m-1+2\delta} f_{2m+p+1-2\delta} < \quad \ldots \quad &< f_3 f_{n-3} < f_1 f_{n-1}, \end{aligned}$$

где се једнакост (на месту где се појавило $\leqslant$) достиже ако и само ако $n \equiv 1 \pmod 4$.

5. **(а)** Нека су звездице подељене у парове, тако исти пар звездица у прве две једначине чине оне које су уз исту променљиву (пар чине и звездице које представљају слободне чланове прве две једначине), а све преостале се произвољно поделе (како је укупан број звездица паран, ово је могуће урадити). Ако се Бранко придржава стратегије:

1° када Аца упише број уместо неке звездице која се не налази у некој од прве две једначине, он уместо звездице која је са њим у пару упише произвољан број;

2° када Аца упише број уместо неке звездице која се налази у некој од прве две једначине, он уместо звездице која је са њим у пару упише исти број ако се звездица налази уз променљиву, односно различит број ако је у питању звездица уз слободан члан;

након завршетка игре, прве две једначине ће имати једнаке „леве”, а различите „десне” стране, па ће систем бити противречан, тј. у овој ситуацији Бранко може победити без обзира како игра Аца.

(б) Нека су звездице из прве колоне (тј. звездице уз променљиву x_1) подељене у парове на произвољан начин; у оквиру исте једначине нека $2i$-та и $2i + 1$-ва (за $1 \leqslant i \leqslant 1005$) звездица чине пар (гледано „слева–надесно”). На овај начин све звездице су подељене у парове (има их парно, па се то може урадити). Ако се Бранко придржава стратегије:

1° када Аца упише број уместо неке звездице која се налази у првој колони, он уместо звездице која је са њим у пару упише произвољан број;

2° када Аца упише број a уместо неке звездице која се не налази у првој колони, он уместо звездице која је са њим у пару упише $-a$;

добија се систем једначина, коме простор решења садржи

$$\left\{ (0, b, b, \underbrace{0, \ldots, 0}_{2006}, -1) \mid b \in \mathbb{R} \right\},$$

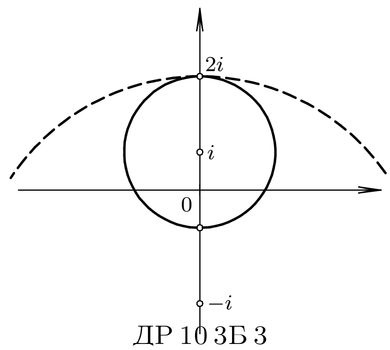
тј. систем има бесконачно много решења, тј. и у овој ситуацији Бранко може победити без обзира како игра Аца.

Трећи разред, Б категорија

1. Нека се тачка A налази у пресеку правих $p_1 : 3x + 5y - 14 = 0$ и $p_2 : x + 3y - 5 = 0$, и нека су B и C преостала два темена троугла из задатка, која припадају p_1 и p_2, редом. Тада B припада правој која је нормална на p_2 и садржи H, тј. (како једначина p_2 гласи $y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{5}{3}$ и како међусобно нормалне праве имају коефицијенте правца који у производу дају -1) $y = 3x + n$, где је $1 = 3 + n$ (H припада тој правој), односно $y = 3x - 2$. Дакле, координате тачке B задовољавају систем $3x + 5y = 14, y = 3x - 2$, одакле је $B\left(\frac{4}{3}, 2\right)$. Аналогно, C припада правој која је нормална на p_1 и садржи H, тј. (како једначина p_1 гласи $y = -\frac{3}{5} \cdot x + \frac{14}{5}$ и како међусобно нормалне праве имају коефицијенте правца који у производу дају -1) $y = \frac{5}{3} \cdot x + n$, где је $1 = \frac{5}{3} + n$ (H припада тој правој), односно $y = \frac{5}{3} \cdot x - \frac{2}{3}$. Дакле, координате тачке C задовољавају систем $x + 3y = 5, y = \frac{5}{3} \cdot x - \frac{2}{3}$, одакле је $C\left(\frac{7}{6}, \frac{23}{18}\right)$.
Коначно, једначина праве којој припада трећа страница троугла је једначна праве BC, тј. $y = 2 + \left(x - \frac{4}{3}\right) \cdot \dfrac{2 - \frac{23}{18}}{\frac{4}{3} - \frac{7}{6}} = 2 + \frac{13}{3} \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)$, односно $39x - 9y - 34 = 0$ (Тангента 55, стр. 45, Писмени задаци, задатак 2).

2. Једначина $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$ има смисла за $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Множењем са $\frac{\sin x \cos x}{2\sqrt{2}}$ добија се (еквивалентна на D) једначина $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \cdot \cos x + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x$. Како је $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \in [0, 1]$, постоји јединствено $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ тако да је $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. Тада је $\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ и $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Како је $2\alpha \in [0, \pi]$ и како једначина $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на овом интервалу има јединствено решење $x = \frac{\pi}{6}$, следи $2\alpha = \frac{\pi}{6}$, па је једначина еквивалентна са $\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin \frac{\pi}{12} \cos x + \cos \frac{\pi}{12} \sin x = \sin 2x \Leftrightarrow 0 = 2 \cdot \sin \frac{x - \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \cos \frac{3x + \frac{\pi}{12}}{2}$.
Дакле, решења једначине су $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ и $x = \frac{\pi + 2k\pi - \frac{\pi}{12}}{3}$ (за произвољно $k \in \mathbb{Z}$). Како су решења у првом квадранту $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{11\pi}{36} > \frac{\pi}{12}$ и како је $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$, следи да постоји решење једначине облика n° (за неко $n \in \mathbb{N}$), као и да је најмање такво решење за $n = 15$.

3. Како је $|z^2+1| = |z^2-i^2| = |z-i| \cdot |z+i|$, следи $z \in S \Leftrightarrow (|z-i|-1) \cdot |z+i| = 0 \Leftrightarrow (|z-i| = 1 \vee z = -i)$, па S чине они комплексни бројеви чије одговарајуће тачке леже на кружници јединичног полупречника са центром у тачки која одговара броју i, као и тачка $-i$.



ДР 10 3Б 3

Пошто $|z_1 - z_2|$ представља растојање између тачака одређених комплексним бројевима z_1 и z_2, следи да је највеће могуће растојање тачака из S једнако 3 (ако z_1 и z_2 припадају кружници, њихово растојање није веће од пречника кружнице, тј. 2; најудаљенија тачка кружнице од $-i$ је тачка $2i$, а растојање ове две тачке је 3) и достиже се ако и само ако је $\{z_1, z_2\} = \{-i, 2i\}$.

4. Нека је $S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Како је

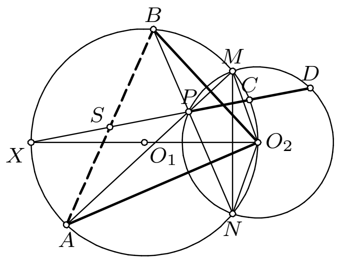
$$S_m - S_n = \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{m^2 - n^2 + m - n}{2} = \frac{(m-n)(m+n+1)}{2},$$

уколико је $m = n + 200$, следи $S_{n+200} - S_n = 100 \cdot (2n + 201)$, па $100 \mid S_{n+200} - S_n$. Следи $a_{n+200} = a_n$ и $b_{n+200} = b_n$, па је низ $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ периодичан, тј. уочени број је рационалан.

5. Ако је S коначан, постоје две тачке из S које су на најмањем растојању; нека су то A и B. Ако је $C \in S$ тачка на кружници са пречником AB тада је $\triangle ABC$ правоугли са правим углом код C, па је $CA < AB$, што је контрадикција са начином избора тачака A и B.

Четврти разред, А категорија

1. Нека су O_1 и O_2 центри k_1 и k_2, редом. Из једнакости периферијских углова у k_1 следи $\sphericalangle AMN = \sphericalangle AO_2N$, а из односа централног и периферијског угла у k_2 следи $\sphericalangle PMN = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle PO_2N$, па је AO_2 симетрала $\sphericalangle PO_2N$. Како је $\triangle PNO_2$ једнакокрак, следи $AO_2 \perp PN$. Аналогно је $O_2B \perp PM$, па је P ортоцентар $\triangle AO_2B$. Описана кружница овог троугла је k_1.



ДР 10 4А 1

Нека је X тачка симетрична са P у односу на S. Тада је $X \in k_1$ (тачка симетрична ортоцентру у односу на средиште странице), као и $X - O_1 - O_2$ ($O_1S \parallel O_2P$ и $O_1S = \frac{1}{2} \cdot O_2P$) („велики задатак”), па је $\sphericalangle XCO_2 = 90^\circ$, тј. C је на средини тетиве PD круга k_2. Дакле, $PC = CD$.

2. За $1 \leqslant k \leqslant p-1$ важи $p \nmid k$ и $p \mid k^3 + (p-k)^3$, па $\frac{k^3+(p-k)^3}{p} \in \mathbb{N}$ и $\frac{k^3}{p}, \frac{(p-k)^3}{p} \notin \mathbb{N}$. Следи $0 < \left\{\frac{k^3}{p}\right\} + \left\{\frac{(p-k)^3}{p}\right\} < 2$ и $\left\{\frac{k^3}{p}\right\} + \left\{\frac{(p-k)^3}{p}\right\} \in \mathbb{Z}$, па је $\left\{\frac{k^3}{p}\right\} + \left\{\frac{(p-k)^3}{p}\right\} = 1$, односно $\left[\frac{k^3}{p}\right] + \left[\frac{(p-k)^3}{p}\right] = \frac{k^3+(p-k)^3}{p} - 1$.

Следи

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{k^3}{p}\right] &= \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{p-1}\left(\left[\frac{k^3}{p}\right]+\left[\frac{(p-k)^3}{p}\right]\right)=\frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{k^3+(p-k)^3}{p}-1\right)\\ &= -\frac{p-1}{2}-\frac{1}{p}\cdot\sum_{k=1}^{p-1}k^3=-\frac{p-1}{2}+\frac{1}{p}\cdot\frac{p^2(p-1)^2}{4}\\ &= \frac{p-1}{4}\cdot\left(-2+p^2-p\right)=\frac{(p-2)(p-1)(p+1)}{4}\,.\end{aligned}$$

3. Број је рационалан (у систему са произвољном базом) ако и само ако је његов запис, почев од неке позиције, периодичан (ако је запис коначан, може се подразумевати да је периода дужине 1 (састављена од цифре 0); то није неопходно у овом задатку, пошто је из конструкције броја x јасно његов запис није коначан). Ако је x рационалан, нека је n_0 позиција од које његов запис постаје периодичан и нека је дужина периоде $T=2^t\cdot y$ $(t\in\mathbb{N}_0, 2\nmid y)$. Низ $\left(2^t(4k+2-y)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ није ограничен одозго, па постоји $k_0\in\mathbb{N}$ такво да је $\alpha=2^t(4k_0+2-y)\geqslant n_0$. Како је a_n једнак највећем степену броја 2 који дели n, следи $a_\alpha=t$. Међутим, како је $\alpha+T=2^{t+1}(2k_0+1)$, следи $a_{\alpha+T}=t+1$, па, како су t и $t+1$ различите парности, следи $b_\alpha\neq b_{\alpha+T}$, што је у контрадикцији са T-периодичношћу низа $(b_n)_{n\geqslant n_0}$.
Из добијене контрадикције следи да је x ирационалан.

4. Сваки прост број $p>3$ је облика $6k\pm1$, за неко $k\in\mathbb{N}_0$, па важи $2\cos\frac{p\pi}{3}=2\cos\left(2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\right)=1$. Како је $\cos3x=4\cos^3x-3\cos x$, следи $1=2\cos\frac{p\pi}{3}=8\cos^3\frac{p\pi}{9}-6\cos\frac{p\pi}{9}=\left(2\cos\frac{p\pi}{9}\right)^3-3\cdot\left(2\cos\frac{p\pi}{9}\right)$, одакле следи тврђење задатка.

Друго решење. Корени полинома z^9+1 су $\cos\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{9}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{9}\right)$, за $-4\leqslant i\leqslant4$ (ови бројеви су различити, тј. овај полином нема вишеструких нула), а полинома z^3+1 су $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)$, за $-1\leqslant k\leqslant1$. Како је $z^9+1=(z^3+1)(z^6-z^3+1)$, корени полинома су $\cos\frac{j\pi}{9}+i\cdot\sin\frac{j\pi}{9}$, за $j\in\{-7,-5,-1,1,5,7\}$. Следи

$$z^6-z^3+1=\left(z^2-2z\cos\frac{\pi}{9}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{5\pi}{9}+1\right)\left(z^2-2z\cos\frac{7\pi}{9}+1\right),$$

одакле је (изједначавањем коефицијената уз z,z^2,z^3 у предходној једнакости)

$$\begin{aligned}-2\cdot\left(\cos\tfrac{\pi}{9}+\cos\tfrac{5\pi}{9}+\cos\tfrac{7\pi}{9}\right) &= 0,\\ 3+4\cdot\left(\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{5\pi}{9}+\cos\tfrac{5\pi}{9}\cos\tfrac{7\pi}{9}+\cos\tfrac{7\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9}\right) &= 0,\\ -8\cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{5\pi}{9}\cos\tfrac{7\pi}{9}-2\cdot\left(\cos\tfrac{\pi}{9}+\cos\tfrac{5\pi}{9}+\cos\tfrac{7\pi}{9}\right) &= -1,\\ \text{одакле је}\qquad \cos\tfrac{\pi}{9}+\cos\tfrac{5\pi}{9}+\cos\tfrac{7\pi}{9} &= 0,\\ \cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{5\pi}{9}+\cos\tfrac{5\pi}{9}\cos\tfrac{7\pi}{9}+\cos\tfrac{7\pi}{9}\cos\tfrac{\pi}{9} &= -\tfrac{3}{4}\,,\\ \cos\tfrac{\pi}{9}\cos\tfrac{5\pi}{9}\cos\tfrac{7\pi}{9} &= \tfrac{1}{8}\,.\end{aligned}$$

На основу Виетових правила следи да су $\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}$ корени полинома $8y^3-6y-1$, па су $2\cos\frac{\pi}{9}, 2\cos\frac{5\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{9}$ корени полинома x^3-3x-1.
Како је сваки прост број већи од 3 облика $9k \pm r$, за неко $k \in \mathbb{N}_0$, $2 \mid k$ и неко $r \in \{1,5,7\}$ (број већи од 2, дељив са 2, је сложен; број већи од 3, дељив са 3, је сложен), следи (пошто $2 \mid k$, нека је $k = 2k_1$, $k_1 \in \mathbb{N}_0$) $2\cos\dfrac{p\pi}{9} = 2\cos\left(2k_1\pi \pm \dfrac{r\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\pm\dfrac{r\pi}{9}\right) = 2\cos\dfrac{r\pi}{9}$, тј. тврђење задатка.

5. Нека су бојама придружени бројеви из $\{1,2,\dots,2010\}$. Уколико децимални запис броја c има период k, нека су све тачке праве $y=c$ обојене бојом j, тако да је $j-1 \equiv k \pmod{2010}$, а уколико децимални запис није периодичан, нека је права $y=c$ обојена произвољно. Пројекција произвољне кружнице на x-осу је интервал (за уочену кружницу, нека је то $[a,b]$). Како за произвољно $0 \leqslant k \leqslant 2009$, произвољан интервал садржи број c коме је децимални запис периодичан са периодом k (у $[a,b]$ постоји број облика $n+0,\overline{a_1\dots a_m}$, тако да је $n \in \mathbb{Z}$, $a_m < 9$ и $n+0,a_1\dots(a_m+1) \in [a,b]$; ако је $b_1,\dots,b_k$ непериодичан низ, број $c = n+0,\overline{a_1\dots a_m} + \frac{1}{10^m}\cdot\frac{\overline{b_1\dots b_k}}{10^k-1}$ има период децималног записа k (почев од позиције $m+1$) и припада $[a,b]$) и како $y=c$ сече кружницу, следи тврђење задатка.

Четврти разред, Б категорија

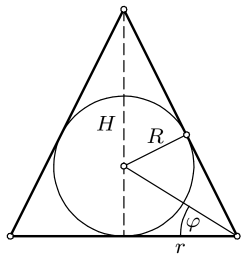
1. Једначина има смисла за $a > 0$. Како је $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 3x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos 3x\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\sin 3x + \sin\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos 3x\right) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, једначина је еквивалентна са $\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \log_{\frac{1}{\pi}} a$, па (како је слика функције $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$ једнака $[-1,1]$), има решења ако и само ако је $-1 \leqslant \log_{\frac{1}{\pi}} a \leqslant 1 \Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{1}{\pi},\pi\right]$ ($\frac{1}{\pi} < 1$, па је функција $x \to \log_{\frac{1}{\pi}} x$ опадајућа) (Тангента 56, стр. 31, Писмени задаци, задатак 2).

2. Једначина има смисла за $x \in \mathbb{R}$. Нека је $t = \left(\sqrt{2}-1\right)^x$. Како је $5\sqrt{2}-7 = \left(\sqrt{2}-1\right)^3$, неједначина постаје $t^3-5t+2 \leqslant 0$ и задовољена је за $t \in (-\infty, -(1+\sqrt{2})] \cup [\sqrt{2}-1, 2]$. Како је $t > 0$, следи $\sqrt{2}-1 \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^x \leqslant 2$. Како је $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, функција $x \to \left(\sqrt{2}-1\right)^x$ је опадајућа, па следи да је решење неједначине $x \in \left[\log_{\sqrt{2}-1} 2, 1\right]$.

3. Нека су R и V_l,редом, полупречник и запремина лопте. Нека су r, V_k и h,редом, полупречник основе, запремина и висина купе описане око те лопте. Пресек равни која садржи пречник основе и висину купе са купом је једнакокраки троугао (основице $2r$ и висине h), а са лоптом круг (уписан у претходни троугао, полупречника R). Нека је угао на основици тог троугла 2φ.

Како је $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{H}{r}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{R}{r}$, следи $\dfrac{V_l}{V_k} = \dfrac{\frac{4}{3}\cdot R^3\pi}{\frac{1}{3}\cdot r^2 H\pi} = \dfrac{4R^3}{r^2H} = \dfrac{4\operatorname{tg}^3\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi} = \dfrac{4\operatorname{tg}^3\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)}{2\operatorname{tg}\varphi} = 2\cdot(\operatorname{tg}^2\varphi - \operatorname{tg}^4\varphi)$.

Ако је $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ дефинисана са $f(x) = 2x^2 - 2x^4$, како је $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $f'(x) = 4x - 8x^3 = 4x(1-2x^2)$ (једина позитивна нула је $\frac{\sqrt{2}}{2}$), $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$, следи да је $\dfrac{V_l}{V_k} = 2\operatorname{tg}^2\varphi - 2\operatorname{tg}^4\varphi \leqslant \dfrac{1}{2}$ и ова вредност се достиже за $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тј. највећи могући количник је $\frac{1}{2}$.



ДР 10 4Б 3

4. Нека су параболе из текста задатка $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Нека је координатни систем постављен тако да су x и y оса тог система директрисе, редом, парабола $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Нека су координате жижа $F_1(p_1, q_1)$ и $F_2(p_2, q_2)$ (у том систему) и нека су координате пресечних тачака $A_i(x_i, y_i)$, за $i \in \{1,2,3,4\}$. Како је парабола геометријско место тачака које су једнако удаљене од жиже и директрисе, за свако $i \in \{1,2,3,4\}$ важи

$$A_i \in \mathcal{P}_1 \Rightarrow (x_i - p_1)^2 + (y_i - q_1)^2 = y_i^2, A_i \in \mathcal{P}_2 \Rightarrow (x_i - p_2)^2 + (y_i - q_2)^2 = x_i^2,$$

односно $x_i^2 - 2p_1x_i - 2q_1y_i + p_1^2 + q_1^2 = 0$, $y_i^2 - 2p_2x_i - 2q_2y_i + p_2^2 + q_2^2 = 0$. Следи да за произвољну тачку $O(\alpha, \beta)$ равни, важи

$$\begin{aligned}
|A_iO|^2 &= (x_i-\alpha)^2 + (y_i-\beta)^2 = x_i^2 + y_i^2 - 2x_i\alpha - 2y_i\beta + \alpha^2 + \beta^2 \\
&= (2p_1x_i + 2q_1y_i - p_1^2 - q_1^2) + (2p_2x_i + 2q_2y_i - p_2^2 - q_2^2) \\
&- 2x_i\alpha - 2y_i\beta + \alpha^2 + \beta^2 \\
&= 2x_i(p_1 + p_2 - \alpha) + 2y_i(q_1 + q_2 - \beta) + \alpha^2 + \beta^2 - p_1^2 - q_1^2 - p_2^2 - q_2^2.
\end{aligned}$$

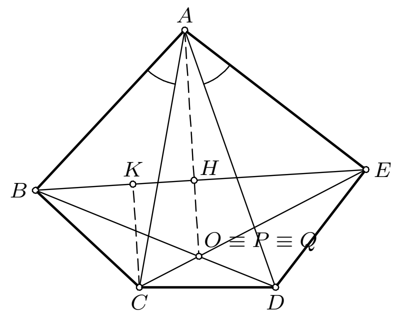
Ако је $\alpha = p_1 + p_2$ и $\beta = q_1 + q_2$, вредност последњег израза не зависи од бројева x_i, y_i ($i \in \{1,2,3,4\}$), па се тачка $O(p_1+p_2, q_1+q_2)$ налази на једнаком растојању од тачака A_1, A_2, A_3 и A_4, тј. тачке A_1, A_2, A_3 и A_4 припадају једној кружници.

5. Нека је H подножје нормале из A на BE, а P и Q пресеци AH са CE и BD, редом. Нека је K подножје нормале из C на BE. Тада је $\sphericalangle KCB = \sphericalangle HBA$ (углови са нормалним крацима), а како је и $\sphericalangle BHA = \sphericalangle CKB = 90^\circ$, следи $\triangle CKB \sim \triangle BHA$. Следи $\dfrac{CK}{BH} = \dfrac{BK}{AH} = \dfrac{BC}{AB} = \operatorname{tg}\sphericalangle BAC$. Како је $\triangle EHP \sim \triangle EKC$ ($\sphericalangle PEH = \sphericalangle CEK$,

$\sphericalangle EHP = \sphericalangle EKC = 90^\circ$), следи

$$PH = \frac{EH \cdot CK}{EK} = \frac{EH \cdot BH \cdot \mathrm{tg}\sphericalangle BAC}{EB - BK} = \frac{EH \cdot BH \cdot \mathrm{tg}\sphericalangle BAC}{EB - AH \cdot \mathrm{tg}\sphericalangle BAC}.$$

Аналогно је $QH = \dfrac{EH \cdot BH \cdot \mathrm{tg}\sphericalangle DAE}{EB - AH \cdot \mathrm{tg}\sphericalangle DAE}$, па како је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAE$, следи $PH = QH$, одакле је $AP = AQ$, тј. $P \equiv Q$. Следи $P \equiv Q \equiv O$ и $AO \equiv AH \perp BE$, тј. тврђење задатка.



ДР 10 4Б 5

Садржај

Крагујевац . . . 1
Лична карта Прве крагујевачке гимназије . . . 2
Републичка комисија за такмичења из математике ученика средњих школа . . . 4
Општинско такмичење, 23.01.2010. . . . 5
Окружно такмичење, 20.02.2010. . . . 8
Државно такмичење, 20.03.2010. . . . 13
Решења задатака општинског такмичења . . . 18
Решења задатака окружног такмичења . . . 29
Решења задатака државног такмичења . . . 41