ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА
СРБИЈЕ

МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА 2003/2004.

Београд – Ниш 2004

Организацију такмичења су помогли:

- Пеликан-Принт, Ниш
- Телеком – Србија
- Еуротурс, Ниш
- Мобтел – Србија – БК ПТТ
- Млекара, Ниш
- Хемофарм – Вршац, Ниш
- Нитекс, Ниш
- Наше време, Ниш
- Нишка банка
- Народни музеј, Ниш
- Дом војске, Ниш
- Машински факултет, Ниш
- Филозофски факултет, Ниш
- Тржница, Ниш
- Делта матиц, Ниш
- Спорт-шоп Ранђели, Ниш
- Ресторан Бољи живот, Ниш

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
46. РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

1. Домазет Владимир, председник Општине Ниш
2. Златановић Љиљана, директор Гимназије "Бора Станковић"
3. Дорословачки др Раде, председник ДМС
4. Антић Бранко, професор Гимназије "Бора Станковић"
5. Костић Славиша, професор Гимназије "Бора Станковић"
6. Милошевић Биљана, професор Гимназије "Бора Станковић"
7. Кваић Слађана, професор Гимназије "Бора Станковић"
8. Петровић Владана, професор Гимназије "Бора Станковић"
9. Динић Љубиша, ДМС – подружница Ниш
10. Милосављевић Славољуб, ДМС – подружница Ниш
11. Јовановић др Иван, професор ПМФ, Ниш

Редакција и обрада:

Владимир Балтић

Запис о Нишу

" И кад пређох преко речне планине, сиђох у један леп крај који је између планина и простире се дуж речене реке Нишаве. Ту је једна варош звана Ниш...", каже се у запису једног путописца од пре 600 година. Међутим, трајање овог древног града датира још пре римске цивилизације. Своје корене има у дубокој праисторији – раздобље прелаза из неолита у метално доба. Формирала га је Бубањско-хумска културна група, названа тако по локалитетима на Бубњу код Ниша и Великој хумској чуки у селу Хуму.

Бурна и бројна историјска дешавања везана за овај град произилазе из чињенице да лежи на разкрсници најважнијих путева Балканског полуострва, повезује средњу и западну Европу са Грчком, Турском, Блиским истоком и источну Европу са Јадранским морем.

Почетком II в.н.е. Наис се први пут спомиње у историјским изворима. Свој пуни развој и економски процват доживљава у IV веку. У њему је рођен Константин Велики 427. године. За време његове владавине изграђена је раскошна резиденција Медијана. Хуни град разарају 441. године. У VII веку Словени га освајају и обнављају утврђени град под именом Нисос. Под Стефаном Немањом 1183. улази у састав српске средњовековне државе. У походу крсташа Фридрих Барбароса се сусрео са С. Немањом 1189. Верује се да је црква Св. Пантелејмона саграђена на месту сусрета два владара.

За време владавине кнеза Лазара Ниш доживљава нагли политички и економски просперитет.

Од петовековног робовања под Турцима Ниш је коначно ослобођен 11. јануара 1878. године. Најпознатији споменик из тог периода је Нишка тврђава, симбол града, саграђена у XVIII веку.

Најпознатији покушај ослобађања града везан је за Први српски устанак и херојску смрт војводе Стевана Синђелића у Боју на Чегру. Видевши да ће Турци победити, он је опалио кубуру у магацин барута, не желећи да падне жив у руке Турцима.

Ћеле-кула, језиви споменик, саграђен од српских лобања, требало је да заплаши народ, али убрзо је прерастао у симбол отпора!

Кнезу Милану Обреновићу пошло је за руком да ослободи Ниш и створи суверену Србију на Берлинском конгресу. Он је Ниш сматрао својом другом престоницом и често боравио у њему.

У току I светског рата Ниш је ратна престоница. У њему је 1914. донета Нишка декларација која је упознала свет са ратним циљевима Србије у и светском рату и била важан корак у стварању Југославије.

Године 1915. Ниш је заузет, а ослобођен је 12. Октобра 1918. године.

У међуратном периоду Ниш постаје центар Моравске бановине.

У току II светског рата град је под немачком окупацијом. Ослобођен је 14. октобра 1944. године.

Данас је Ниш културни и привредни центар југоисточне Србије.

Неколико речи о школи домаћину

Гимназија "Бора Станковић" формирана је 1. септембра 1969. године. Носи име песника човековог сна о животу и срећи човековој, књижевника који је животом и радом оставио трага у нишкој средини.

Школа је почела са радом негујући праве вредности са уверењем да је она ковачница моралног и интелектуалног дигнитета ученика у којој се афирмишу креативни и стваралачки потенцијали, окренути будућности. Својим стваралачким и педагошким достигнућима, резултатима своје праксе, низом новина у раду који су добили највиша друштвена признања, школа је на најбољи начин нашла своје место у друштвеној средини.

Школа данас има 25 одељења и 760 ученика природно-математичког и друштвено-језичког опредељања. Селективна је по избору ученика; од укупне популације која се пријављује за I разред 80% су носиоци Вукове дипломе. Успех ученика креће се до 99% од тога 60% одличних. На пријемним испитима за факултете ученици наше школе заузимају сам врх ранг-листа, студенти су генерације, будући креативни научни потенцијал који додатно афирмише школу.

Образовно-васпитним облицима рада – они који су били пратећи и обавезни део наставне и организационе шеме школског живота – као они које су ученици сами организовали и за њих се по личним интересовањима и способностима опредељивали – дали су позитивне резултате.

Врхунске успехе бележе наши ученици у области природних и друштвених наука. Задивљује не само знање такмичара већ и њихов импозантан број. Мало је школа које се могу похвалити толиким бројем такмичара са широким дијапазоном интересовања од оних у знању матерњег језика и језичке културе, рецитовања, врсног познавања страних језика, историје, географије, биологије, хемије, физике, кроз програм "Наука младима", до врхунских Међународних олимпијада, такмичења градова у знању математике или екипног у оквиру Клуба "Архимедес", али и у литерарном, драмском као и на спортском пољу где су сваке године овенчани медаљама.

Велики број наших ученика су полазници Истраживачке станице у Петници, учесници у многим научним истраживачким пројектима.

У оквиру ваннаставних активности достојно су афирмисале школу: драмска, литерарна, лингвистичка и рецитаторска секција.

Младима образовање треба да омогући првенствено ефикасно комуницирање са светом науке и успешно ангажовање у цивилизацији која је све сложенија. Темељ таквог образовања добија се у школи уколико је она савремено конципирана и вишеструко повезана са средином која тежи прогресу. Имајући у виду ту чињеницу, наша школа се међу првима повезала на интернет и добила прву награду за њено презентовање.

Рад у кабинету информатике је специфичан – мала учионица где се ученици састају добровољно, предлажу области које желе да проучавају и истражују.

И садашње генерације непотрошене младости прихватају изазове и доказују да су изнад времена и света у коме живимо. Сигурно је да Гимназија "Бора Станковић" не би имала такав ореол духовности да сјајне генерације ученика нису убразовали стручни професори и ентузијасти. Једино надахнуће за прегалаштво је уверење да стваралачким радом и љубављу према младима штите своје људско достојанство, изложено многим искушењима времена и окружења у коме живе и раде.

Пред нама су нове године изазова, провере и потврде наредних достигнућа.

РЕПУБЛИЧКА КОМИСИЈА

за такмичења из математике за ученике средњих школа

школска година 2003/2004.

1. Балтић Владимир, Економски факултет, Београд — председник Републичке комисије
2. Гајић др Борислав, Математички институт САНУ
3. Долинка др Игор, ПМФ, Нови Сад
4. Дорословачки др Раде, ФТН, Нови Сад
5. Дугошија др Ђорђе, Математички факултет, Београд
6. Ђукић Душан, Математички факултет, Београд
7. Икодиновић мр Небојша, ПМФ, Крагујевац
8. Кнежевић Миљан, Математички факултет, Београд
9. Кртинић Ђорђе, Математички факултет, Београд
10. Лаудановић мр Младен, Математички факултет, Београд
11. Маринковић Растко, Математичка гимназија, Београд
12. Марковић др Петар, ПМФ, Нови Сад
13. Матић Иван, Математички факултет, Београд
14. Милићевић Ђорђе, Принстон, САД
15. Милосављевић Милош, ПМФ, Ниш
16. Огњановић мр Срђан, Математичка гимназија, Београд
17. Павловић Иван, Гимназија Вук Караџић, Лозница
18. Петровић Никола, Физички факултет, Београд
19. Радновић др Милена, Математички институт САНУ
20. Станојевић Раде, ПМФ, Ниш
21. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
22. Томић Иванка, Гимназија, Ваљево
23. Чукић др Љубомир, Грађевински факултет, Београд

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 17. 01. 2004.

Први разред – А категорија

1. На дијагонали AC ромба $ABCD$ изабрана је произвољна тачка E различита од A и C. Нека су N и M тачке правих AB и BC, редом, такве да је $AE = NE$ и $CE = ME$, а K пресечна тачка правих AM и CN. Доказати да тачке K, E и D припадају једној правој.

2. Природни бројеви a, b и c су такви да су бројеви

$$p = b^c + a, \ \ q = a^b + c \text{ и } r = c^a + b$$

прости. Доказати да су два од бројева p, q, r међусобно једнаки.

3. Доказати да за непаран цео број q једначина $x^3 + 3x + q = 0$ нема целобројних решења.

4. На колико начина можемо распоредити m различитих птица у n различитих кавеза тако да сваки кавез садржи бар једну, али највише две птице?

5. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004. Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Други разред – А категорија

1. Видети 1. задатак за први разред А категорије.

2. Наћи све бројеве $b \in \mathbb{N}$ за које постоји $a \in \mathbb{N}$ тако да

$$b \mid a^2 + 1 \text{ и } b \mid a^3 - 1.$$

3. Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви који задовољавају $x+y+z=1$. Наћи најмању могућу вредност израза $x+y^2+z^2$.

4. Решити једначину $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{17-x}=3$.

5. Видети 5. задатак за први разред А категорије.

Трећи разред – А категорија

1. Јединични квадрат је подељен на правоугле троуглове. (Троуглови немају заједничких унутрашњих тачака.) Нека је S збир хипотенуза свих тих троуглова. Доказати да је $S \geqslant 2\sqrt{2}$. Када важи једнакост?

2. а) Ако је $x \equiv y \pmod{p}$ онда је и $x^p \equiv y^p \pmod{p^2}$. Доказати.
б) Решити једначину $x^5+y^5+z^5=2004$ у $\mathbb{N}$.

3. Једначина
$$x^3+px+q=0$$
има комплексан корен $a+bi$, где су $a,b,p,q \in \mathbb{R}$ и $q,b \neq 0$. Показати да је $aq>0$.

4. Доказати да је број
$$n^{2003}+n+1$$
сложен за сваки природан број n, $n>1$.

5. Доказати да не постоји троугао коме за углове важи:
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma.$$

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $\triangle ABC$ троугао такав да је $\sphericalangle ACB \geqslant 120^\circ$. Нека је R полупречник описаног круга тог троугла. Доказати:
$$3R \geqslant AC+BC+\frac{AB}{\sqrt{3}}\ .$$
У ком случају важи једнакост?

2. Видети 2. б) задатак за трећи разред А категорије.

3. На свечаној смотри поводом дана Војске СЦГ изабрано је из сваког од 4 различита рода (пешадија, артиљерија, ваздухопловство и морнарица) по 4 војника различитих чинова (по један десетар, водник, поручик и капетан). Помозите мајору, задуженом за прославу, који је добио наређење да тих 16 војника размести у строј облика квадрата, тако да у сваком реду и свакој колони буду смештена 4 војника из различитих родова и са различитим чиновима.

4. Доказати да је број
$$n^{17} + n^1 + n^{2004} + n^8 + 1$$
сложен за сваки природан број n, $n > 1$.

5. Видети 5. задатак за трећи разред А категорије.

Први разред – Б категорија

1. Цифре a и b су различите и такве да важи
$$\overline{aa} \cdot \overline{ba} \cdot \overline{aba} = \overline{abaaba}.$$
Дешифровати ову једнакост.

2. У троуглу $\triangle ABC$ $(BC > CA)$ је $\sphericalangle CAB - \sphericalangle ABC = 45°$. Ако је D тачка странице BC таква да је $CD = CA$, израчунати величину угла $\sphericalangle BAD$.

3. Видети 3. задатак за први разред А категорије.

4. Колико има једнакокраких троуглова, чије су странице целобројне, а обим једнак $30cm$?

5. Доказати да је број $2^{12} + 5^9$ сложен.

Други разред – Б категорија

1. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ $(\sphericalangle ACB = 90°)$ конструисана је висина

CD. Симетрала угла $\sphericalangle CAB$ сече праву CD у тачки P, а симетрала угла $\sphericalangle BCD$ сече праву BD у тачки Q. Доказати да је $PQ \parallel BC$.

2. Испитати да ли квадратна једначина
$$(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0,$$
где су $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$, може имати реалне и различите корене.

3. Решити једначину $\sqrt{4x^2-4x+1}-|3x-2|-3x=1$.

4. Дата је једначина $(a-1)x^2-(a+1)x+2a-1=0$, при чему је $a \neq 1$. Наћи све вредности параметра b за које израз
$$(x_1-b)(x_2-b)$$
не зависи од a, при чему су x_1 и x_2 корени дате једначине.

5. Видети 5. задатак за први разред Б категорије.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати вредност израза
$$\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$$
без примене калкулатора и таблица.

2. Доказати неједнакост $(\log_{2003} 2004)^{-1}+(\log_{2005} 2004)^{-1}<2$.

3. Равни α и β секу се по правој c. Нека је φ угао диедра кога чине те две равни, а ψ угао између неке праве p равни α и праве c. Ако је γ угао између праве p и равни β, доказати да важи
$$\sin\gamma=\sin\varphi\sin\psi.$$

4. Израчунати вредност детерминанте $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

5. Решити систем једначина у скупу реалних бројева: $\begin{array}{l} x^3y^3z^4=1 \\ x^2y^4z^4=2 \\ x^2y^3z^5=3\ . \end{array}$

Четврти разред – Б категорија

1. Скуп природних бројева разбијен је у групе на следећи начин:
$$\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \ldots$$
Наћи збир чланова n-те групе.

2. Нека су x_1, x_2, x_3 корени полинома x^3+mx+n, $(n \in \mathbb{Z})$. Доказати да је ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2$ цео број дељив са 3.

3. У правоуглом троуглу у коме је хипотенуза $c=8$ и оштар угао $\alpha = 60^\circ$ уписан је правоугаоник максималне површине, тако да му једна страница припада хипотенузи троугла. Одредити дужине страница тог правоугаоника.

4. Наћи реална решења система једначина
$$\frac{1}{1+(x-y)^2} = z+4, \qquad \sqrt{z+3}+2x = 8.$$

5. Видети 5. задатак за трећи разред Б категорије.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 28. 02. 2004.

Први разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, дужине страница су три узастопна природна броја. Ако је тежишна линија повучена из A нормална на симетралу угла $\sphericalangle ABC$, пронаћи дужине страница троугла.

2. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Нека су A_1, B_1 и C_1, редом, центри описаних кругова троуглова $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ и $\triangle AHB$. Доказати да су троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ подударни.

3. Посматрајмо коначан низ од 2003 броја, при чему је $a_n = \left[\dfrac{n^2}{2004}\right]$, $n = 1, 2, \ldots, 2003$. Колико различитих чланова садржи тај низ?

4. Да ли постоји полином са целобројним коефицијентима такав да важи: **а)** $P(7) = 8$ и $P(15) = 12$; **б)** $P(8) = 7$ и $P(12) = 15$?

5. Трговац преко реке мора да превезе: сир, миша, пацова, мачку, пса, вука и медведа. У чамцу има места за само k од тих 7 објеката. Ако остави миша са сиром, миш ће га појести. Ако остави пацова са мишем или сиром пацов ће их појести. Ако остави мачку са пацовом или мишем она ће их појести. Ако остави пса са пацовом или мачком он ће их убити. Ако остави вука са псом или мачком он ће их убити. Ако остави медведа са псом или вуком он ће их убити. Претпоставља се да трговац све ове догађаје спречава да се десе кад је присутан. Које минимално k гарантује да он може све артикле безбедно да пребаци на другу страну реке?

Други разред – А категорија

1. Нека су m и n природни бројеви не мањи од 2. Доказати да постоји природан број k тако да важи $\left(\dfrac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^m = \dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.

2. Дат је троугао $\triangle ABC$. Тангента t у тачки B на описану кружницу око тог троугла сече праву AC у тачки M. Наћи $\dfrac{AM}{MC}$, ако је $\dfrac{AB}{BC} = k$.

3. Ако је $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\cdot\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) = 1$, доказати да је $x + y = 0$.

4. Ако су тежишне линије ΔABC из темена B и C међусобно нормалне онда је: $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma \geqslant \dfrac{2}{3}$. Доказати. У ком случају важи једнакост?

5. Дата је бела табла 2002×2003 и доста црвене и беле боје.
а) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма која четири поља која чине квадрат 2×2. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?
б) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма којих девет поља која чине квадрат 3×3. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?

Трећи разред – А категорија

1. У правоугаонику $ABCD$ је $AB = 1$, $BC = 2$. Дата је тачка P унутар њега таква да је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 15^\circ$. Израчунати $\sphericalangle CPD$.

2. Ако су m, n и p одсечци које троугао $\triangle ABC$ одређује на правама које садрже средиште уписаног круга а паралелне су, респективно, са страницама $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, доказати да је

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 2.$$

3. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$, $b_1, b_2, \ldots, b_{2004}$ међусобно различити реални бројеви. Ако је за свако $i \in \{1, 2, \ldots, 2004\}$

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2)\ldots(a_i + b_{2004}) = \alpha,$$

доказати да, за свако $i \in \{1, 2, \ldots, 2004\}$ важи

$$(b_i + a_1)(b_i + a_2)\ldots(b_i + a_{2004}) = -\alpha.$$

4. Наћи све просте бројеве p и q, такве да је број

$$\sqrt{p^2 + 14pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$$

природан.

5.Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ које за све $x, y \in \mathbb{N}$ задовољавају

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \qquad \text{кад је } \frac{x+y}{3} \in \mathbb{N}.$$

Четврти разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ правоугаоник. Нека је E подножје висине из A на BD. Нека је F произвољна тачка на дијагонали BD између D и E. Нека је G пресек праве CF и нормале из B на AF. Нека је H пресек праве BC и нормале из G на BD. Доказати да је $\sphericalangle EGB = \sphericalangle EHB$.

2. Дата је $n \times n$ квадратна таблица $[a_{ij}]$, где је $a_{ij} = \dfrac{1}{i + j - 1}$. Одаберимо n бројева из таблице, тако да нису одабрана два броја из исте врсте или два броја из исте колоне. Доказати да збир тих n бројева не може бити мањи од 1.

3. Одредити услов који треба да задовоље реални бројеви a и b тако да систем

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x^2 & + & y^2 & + & z^2 & = & b^2 \end{array}$$

има јединствено реално решење. У којим случајевима систем нема решења?

4. Дате су две шаховске табле 2×4 и у доњем левом углу прве налази се краљ, а у доњем левом углу друге топ. Означимо са k_n број различитих n-потеза краљем, а са t_n број различитих n-потеза топом. За које n важи $k_n < t_n$?

5. Дат је правоугли троугао T. Да ли је могуће извршити разбијање троугла T на 2004 троуглића који испуњавају следеће услове:
1° сваки од тих троуглића је сличан троуглу T;
2° не постоје два троуглића који су подударни?

Први разред – Б категорија

1. Доказати да је $n^n - n$ дељиво са 24 за све непарне природне бројеве n.

2. Нека је S пресек, међусобно управних, дијагонала AC и BD конвексног и тетивног четвороугла $ABCD$. Доказати да нормала из тачке S на праву BC полови дуж AD.

3. У троуглу $\triangle ABC$ за унутрашње углове важи $\alpha - \beta = 2\gamma$.
а) Доказати да је угао α туп.
б) На правој AB, иза тачке A у односу на тачку B, је дата тачка E таква да је $EC = AC$. Доказати да је CA симетрала угла $\sphericalangle ECB$.

4. Нека је дато пресликавање $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, тако да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) + 2f(1-x) = x$. Одредити $f(x)$.

5. У једној групи људи се налазе три Италијана, четири Француза и пет Шпанаца. На колико различитих начина се сви ови људи могу поређати у низ тако да сви Французи буду један поред другог, сви Шпанци један поред другог и никоја два Италијана не буду један до другог?

Други разред – Б категорија

1. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Ако је $BC = CD = 12cm$ и $OC = 4cm$, наћи дужину дијагонале AC.

2. Доказати да разлика решења једначине
$$5x^2 - 2(5a+3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$
не зависи од a.

3. Доказати да за свако $x \geqslant 0$ важи неједнакост
$$\sqrt{x}(x+1) + x(x-4) + 1 \geqslant 0.$$

4. Наћи реални и имагинарни део комплексног броја
$$z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004} + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2004}.$$

5. За које вредности реалних бројева x и y израз
$$E = 2x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 2$$
има најмању вредност?

Трећи разред – Б категорија

1. Наћи све реалне бројеве x, y, z, t такве да је
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = x(y+z+t).$$

2. Наћи сва решења неједначине $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

3. Тачка A припада кругу k полупречника r. Ap и Aq су полуправе такве да је $\sphericalangle pAq = 60^\circ$. Ако су B и C пресечне тачке тих полуправих и круга k, наћи дужину тетиве BC.

4. Систем једначина

$$\begin{array}{ccccc} bx & + & ay & = & c, \\ cx & + & az & = & b, \\ cy & + & bz & = & a \end{array}$$

има јединствено решење. Доказати да је тада $abc \neq 0$ и наћи то решење.

5. Израчунати запремину пирамиде, чија је основа једнакостранични троугао странице a, ако су бочне стране нагнуте према равни основе под угловима α, β и γ.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи висину купе максималне површине омотача уписане у лопту полупречника R.

2. Дат је комплексан број $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}, \varphi \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Одредити модул и аргумент комплексног броја $\dfrac{z+1}{z-1}$.

3. Наћи област вредности функције $y = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

4. Доказати да се ни за један природан број n збир $1+2+\ldots+n$ не може завршавати неком од цифара 2,4,7,9.

5. Колико највише оштрих углова може имати конвексан многоугао?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ, 27. 03. 2004.

Први разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ трапез код кога је $AB \parallel CD$ и P тачка на продужетку дијагонале AC тако да је C између A и P. Ако су X и Y средишта основица AB и CD, а M и N пресечне тачке правих PX и PY са дужима BC и DA, редом, доказати да је права MN паралелна основицама трапеза.

2. У једнакостраничном троуглу $\triangle ABC$ је $|AB| = 2$. Нека су M и N унутрашње тачке странице AB такве да је $|MN| = 1$. Доказати да је $\sphericalangle MCN > 30^\circ$.

3. Колико има тројки природних бројева (a, b, c) таквих да је $2a + 1$ дељиво са b, $2b + 1$ дељиво са c, и $2c + 1$ дељиво са a.

4. Шаховска табла димензија 2004×2004 је поплочана доминама димензија 1×4. Може ли број хоризонталних домина да буде једнак броју вертикалних домина?

5. Колико има природних бројева n, $10 \leqslant n < 100000$, дељивих са 4 у чијем се декадном запису не појављује цифра 0 и никоје две суседне цифре нису једнаке?

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао $\triangle ABC$. Права симетрична тежишној дужи из A у односу на симетралу угла $\sphericalangle BAC$ сече описани круг троугла $\triangle ABC$ у K. Нека је L средиште дужи AK. Доказати:

$$\sphericalangle BLC = 2\sphericalangle BAC.$$

2. Наћи максималну вредност израза

$$I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

ако су $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e \geqslant 0$ реални бројеви за које важи $a + b \leqslant 5$ и $c + d + e \leqslant 5$. Када се постиже та вредност?

3. Нека је a природан број већи од 1. Доказати да је број
$$n(2n+1)(3n+1)\ldots(an+1)$$
дељив свим простим бројевима мањим од a, за сваки природан број n.

4. Разлика корена квадратне једначине $x^2+px+q=0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p+q$ буде најмањи могући.

5. Постоји ли бесконачан подскуп скупа природних бројева такав да ниједан његов члан, нити збир неколико његових елемената није степен природног броја (тј. није број облика a^k, $a, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$)?

Трећи разред – А категорија

1. Дат је круг k и његов пречник AB. Нека је P произвољна тачка тог круга различита од A и B. Пројекција тачке P на AB је Q. Круг са центром P и полупречником PQ сече круг k у C и D. Пресек правих CD и PQ је тачка E. Нека је F средиште AQ, а G подножје нормале из F на CD. Доказати да је $EP = EQ = EG$ и да су тачке A, G и P колинеарне.

2. У скупу реалних бројева наћи сва решења система једначина
$$x = 1 + \sqrt{y}, \quad y = 1 + \sqrt{z}, \quad z = 1 + \sqrt{x}.$$

3. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такав да
$$n \mid \big(1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n\big) + 1,$$
доказати да n није дељив ниједним квадратом већим од 1.

4. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је таква да је
$$x + f(x) = f(f(x))$$
за свако $x \in \mathbb{R}$. Наћи сва решења једначине $f(f(x)) = 0$.

5. Дејан је пре x година имао x пута мање година него онда кад је y година раније имао y пута мање године него што има сада, при чему су x, y и број Дејанових година природни бројеви. Колико све година може да има Дејан?

Четврти разред – А категорија

1. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$ код кога је $DC = DE$ и $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Нека је F унутрашња тачка сегмента AB одређена условом $AF : BF = AE : BC$. Доказати да је $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ и $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су M, N и P средишта страница AB, AC и BC, A_0 подножје нормале из тачке N на страницу BC, и нека је A_1 средиште дужи MA_0. Конструишимо аналогно B_1 и C_1. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу ако и само ако је троугао ABC једнакокрак.

3. Означимо са $d(n)$ број делилаца природног броја n. Одредити све природне бројеве n такве да међу бројевима

$$n,\ d(n),\ d(d(n)),\ d(d(d(n))),\ \ldots$$

нема ниједног потпуног квадрата.

4. Наћи све 1-1 функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које задовољавају услове:

$$1^\circ\ f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \qquad 2^\circ\ f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$$

5. Нека је A скуп од 6 елемената. Доказати да у свакој фамилији $\{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$ различитих троелементних подскупова од A, постоје три различита скупа A_i, A_j и A_k који су сви подскупови истог четвороелементног скупа.

Први разред – Б категорија

1. Нека су a, b и c три различите цифре, од којих ниједна није једнака нули, за које важи

$$\overline{abc} : c = \overline{bc}.$$

Одредити те цифре.

2. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ над катетом AC као над пречником конструисан је круг k који сече хипотенузу AB у тачки E. У тачки E конструисана је тангента t круга k која сече катету BC у тачки D. Доказати да је троугао $\triangle BDE$ једнакокраки.

3. Дат је паралелограм $ABCD$. На правама AB, BC, CD и DA изабране су, редом, тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 тако да је B средиште дужи AA_1, C средиште дужи BB_1, D средиште дужи CC_1 и A средиште дужи DD_1.
а) Доказати да је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ такође паралелограм.
б) Израчунати површину четвороугла $A_1B_1C_1D_1$, ако је површина четвороугла $ABCD$ једнака $2004cm^2$.

4. Одредити коефицијенте $a, b \in \mathbb{R}$ полинома $P(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$ ако се зна да је $x = -2$ нула полинома и да $P(x)$ при дељењу са $x + 3$ даје остатак -12, а затим факторисати полином $P(x)$.

5. Видети 5. задатак за први разред А категорије.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва реална решења једначине
$$(x^3 - 9x^2 - x + 9)^2 + (x^3 + 3x^2 - x - 3)^4 = 0.$$

2. Нека је AB пречник круга k и тетиве AD и BC тог круга се секу у тачки E. Доказати да
$$AE \cdot AD + BE \cdot BC$$
не зависи од избора тачака C и D.

3. Наћи све природне бројеве x и y тако да важи $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leqslant 1$.

4. Видети 4. задатак за други разред А категорије.

5. Наћи све целе бројеве m такве да важи $(1 + i)^m = (1 - i)^m$.

Трећи разред – Б категорија

1. Који је од бројева $2^{\sqrt{\log_2 2004}}$ и $2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$ већи?

2. Наћи висину правилне четворостране пирамиде ако је запремина лопте описане око пирамиде једнака V, а нормала, конструисана из центра те лопте на бочну страну, образује са висином пирамиде угао α.

3. Нека је O средиште описаног круга једнакокраког тоугла $\triangle ABC$. Ако је $AB = AC = b$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$ $(\alpha \neq 120^\circ)$. Наћи дужину дужи BD, при чему је D пресечна тачка правих BO и AC.

4. Доказати да за све α и $\beta \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ важи неједнакост

$$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta} \geqslant 1.$$

Када важи једнакост?

5. У зависности од реалног параметра a решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \quad . \end{array}$$

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи све просте бројеве p и q такве да једначина $x^4 - px^3 + q = 0$ има цео корен.

2. Наћи све природне бројеве n такве да функција $f(x) = \cos nx \cdot \sin \dfrac{5}{n}x$ има период 3π.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned}
x_1(x_1+x_2+\ldots+x_n) &= 1\\
x_2(x_1+x_2+\ldots+x_n) &= 3\\
x_3(x_1+x_2+\ldots+x_n) &= 5\\
&\vdots\\
x_n(x_1+x_2+\ldots+x_n) &= 2n-1\ .
\end{aligned}$$

4. Наћи све реалне вредности параметра a такве да функција

$$f(x)=\frac{1}{3}\,2^{\,3x}+a\cdot 2^{2x-1}+(1-a)2^{x}$$

буде растућа за све вредности $x \in \mathbb{R}$.

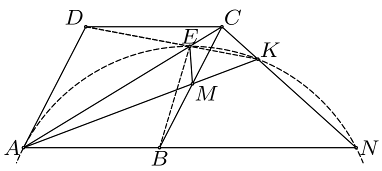
5. Доказати да за све природне бројеве n важи

$$\log(n+1)>\frac{\log 1+\log 2+\ldots+\log n}{n}\ .$$

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОПШТИНСКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Претпоставимо да је тачка E одабрана тако да је $AE \geqslant CE$ (као на слици). Приметимо да су четвороуглови $ABME$ и $EBNC$ тетивни. Заиста, тетивност четвороугла $ABME$ следи из једнакости углова $\sphericalangle EAB = \sphericalangle ECM = \sphericalangle EMC$, а тетивност четвороугла $BNCE$ следи из $\sphericalangle ECB = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ENB$. Докажимо, сада, да је и $ANKE$ тетиван. То важи јер је $\sphericalangle EAM = \sphericalangle EBM$ (као углови над тетивом EM круга описаног око $EABM$) и $\sphericalangle EBM = \sphericalangle ENC$ (као углови над тетивом EC круга описаног око $EBNC$).



Из тетивности четвороугла $ANKE$ закључујемо да је $\sphericalangle CEK = \sphericalangle KNB$, а из тетивности четвороугла $BNCE$ да је $\sphericalangle KNB = \sphericalangle AEB$. Пошто је AC оса симетрије ромба, имамо да је $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED$. То значи да је $\sphericalangle AED = \sphericalangle AEB = \sphericalangle KNB = \sphericalangle CEK$, из чега следи да су тачке K, E и D колинеарне.

2. Два од бројева a, b и c су исте парности. Нека су то, на пример, a и b. Тада је број $p = b^c + a$ паран, па је $p = 2$ и $a = b = 1$. Али тада је $q = a^b + c = c + 1 = c^a + b = r$.

3. Ако је q непаран, непарни су му и сви делиоци, па би и решење, x_0, морало бити непарно ($x_0 \mid q$). За то решење би морало бити $x_0^3 + 3x_0 + q$, а то је немогуће јер сума три непарна броја никада није једнака нула.

4. Тачно $2n - m = m - 2(m-n)$ птица су саме у својим кавезима, и њих можемо да одаберемо на $\binom{m}{2n-m}$ начина, а онда им одаберемо кавезе на $\frac{n!}{(m-n)!}$ начина. Преосталих $2(m-n)$ птица можемо да поставимо у ред на $(2m-2n)!$ начина, и две по две их стављамо у први кавез, други, итд. При том се сваки распоред добија на 2^{m-n} начина. Према томе, одговор је $\dfrac{m!n!(2m-2n)!}{(2n-m)!(2m-2n)!(m-n)!2^{m-n}} = \dfrac{m!n!}{2^{m-n}(m-n)!(2n-m)!}$.

5. Не може. Офарбајмо таблу у црну и белу боју (као шаховску). Видимо да комарац увек слеће на поља исте боје, а горњи леви и доњи десни угао ове табле су различитих боја.

Други разред – А категорија

1. Видети решење 1. задатка за први разред А категорије.

2. Из $b \mid a^2+1 \;\Rightarrow\; (b,a^2)=1 \;\Rightarrow\; (b,a)=1$, па $b \nmid a$. Имамо: $b \mid a^3-1+a^2+1 = a^3+a^2 \Rightarrow$ (због $(b,a^2)=1$) $b \mid a+1 \Rightarrow b \mid a(a+1)-(a^2+1) = a-1 \Rightarrow b \mid a+1-(a-1)=2$. Дакле једина решења су $b=1$ и $b=2$ за које постоје бројеви a (за $b=1$ a је прозивољан природан број, а за $b=2$ a је прозивољан непаран број).

3. $x+y^2+z^2 = 1-y-z+y^2+z^2 = \frac{1}{2}+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}$. Једнакост важи за $x=0,\ y=z=\frac{1}{2}$.

4. Ставимо $y=\sqrt[4]{x}$ и $z=\sqrt[4]{17-x}$. Дата једначина се своди на систем $y+z=3$ и $y^4+z^4=17$. Нека је $y^2+z^2=p$. Тада је $2yz=9-p$, значи $2y^2z^2=\frac{1}{2}(9-p)^2$, одакле добијамо квадратну једначину по p:

$$17 = y^4+z^4 = (y^2+z^2)^2-2y^2z^2 = p^2-\tfrac{1}{2}(9-p)^2,$$

чија су решења $p=5$ и $p=-23$. Само прво решење долази у обзир. Сада систем једначина постаје $y+z=3,\ y^2+z^2=5$, који се лако решава. Решења су $(x,y)=(2,1)$ и $(x,y)=(1,2)$.

5. Видети решење 5. задатка за први разред А категорије.

Трећи разред – А категорија

1. Нека је квадрат подељен на n правоуглих троуглова и нека су њихове површине $P_1,P_2,\ldots,P_n$, а њихове хипотенузе $c_1,c_2,\ldots,c_n$. За површину правоуглог троугла важи $P_i \leqslant \dfrac{{c_i}^2}{4}$. Како за све те хипотенузе важи $c_i \leqslant \sqrt{2}$ имамо да је $\dfrac{c_i}{\sqrt{2}} \leqslant 1$. Стога имамо: $1 = P_1+P_2+\ldots+P_n \leqslant$

$\frac{c_1{}^2}{4}+\frac{c_2{}^2}{4}+\ldots+\frac{c_n{}^2}{4}=\frac{c_1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{c_1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{c_n}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{c_n}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{c_1}{2\sqrt{2}}+\frac{c_2}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{c_n}{2\sqrt{2}}=$
$\frac{S}{2\sqrt{2}}$, чиме смо показали тражену неједнакост.
Једнакост важи само када је јединични квадрат подељен на два једнакокрака правоугла троугла.

2. а) $x^p-y^p=(x-y)(x^{p-1}+x^{p-2}y+\ldots+xy^{p-2}+y^{p-1})$. Први фактор је дељив са p јер је $x\equiv y \pmod{p}$. $x^ky^{p-1-k}\equiv x^kx^{p-1-k}=x^{p-1} \pmod{p}$, па имамо и $x^{p-1}+x^{p-2}y+\ldots+xy^{p-2}+y^{p-1}\equiv x^{p-1}+x^{p-1}+\ldots+x^{p-1}=p\cdot x^{p-1}\equiv 0 \pmod{p}$. Тиме смо показали $x^p\equiv y^p \pmod{p^2}$.
б) Коришћењем дела под а) добијамо да је

$$x^5\equiv\begin{cases}0 & \text{за} \quad n=5k\\ \pm1 & \text{за} \quad n=5k\pm1\\ \pm7 & \text{за} \quad n=5k\pm2\end{cases} \pmod{25}.$$

Како је $2004\equiv 4 \pmod{25}$, а три од ових бројева могу дати збир 4 или -21 само кад је $x\equiv y\equiv z\equiv -2 \pmod{5}$ и како је $3^5=243$, а већ $8^5=32768$ добијамо да једначина $x^5+y^5+z^5=2004$ нема решења у $\mathbb{N}$.

3. Остала два корена су $a-bi$ (комплексни корени реалног полинома су конјуговани) и $-2a$ (Виет: $x_1+x_2+x_3=0$). Из Виетових формула имамо и $x_1\cdot x_2\cdot x_3=-q$, тј. $q=2a(a^2+b^2)$, па је $qa=2a^2(a^2+b^2)>0$ јер је $a\neq 0$ (због $q\neq 0$).

4. Приметимо да је број $\varepsilon=e^{i2\pi/3}$ нула полинома $P(x)=x^{2003}+x+1$, те је $P(x)$ дељив са $(x-\varepsilon)(x-\overline{\varepsilon})=x^2+x+1$. Тиме смо добили и да је број $n^{2003}+n+1$ дељив са n^2+n+1 $(1<n^2+n+1<n^{2003}+n+1)$ за сваки природан $n>1$, те је $n^{2003}+n+1$ сложен број за сваки природан $n>1$.

5. <u>1:</u> Коришћењем $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$, полазна једначина се трансформише у

$$\operatorname{ctg}2\alpha+\operatorname{ctg}2\beta+\operatorname{ctg}(2\pi-(2\alpha+2\beta))=0.$$

Ако означимо $\operatorname{ctg}2\alpha=x$, $\operatorname{ctg}2\beta=y$, и применимо адициону формулу за збир котангенса, свешће се на:

$$x^2+2xy+y^2-xy+1=0,\ \text{тј.}\ (x+y/2)^2+3y^2/4+1=0,$$

што не може бити задовољено ни за које реалне бројеве x и y, па такав троугао не постоји.

<u>2:</u> Ако пођемо од познатог идентитета који важи за углове троугла: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$, означимо $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$, $\operatorname{tg}\gamma = c$, имаћемо са једне стране $abc = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, тј. $(abc)^2 = ab + bc + ca$, а са друге стране квадрирањем идентитета $abc = a + b + c$, добићемо: $ab + bc + ca = \frac{(abc)^2 - (a^2+b^2+c^2)}{2}$, па заменом прве једначине у другој добијемо: $(abc)^2 = -(a^2 + b^2 + c^2)$, што је могуће само кад су сви бројеви 0, а то је немогуће јер су бројеви a, b и c тангенси углова троугла.

Четврти разред – А категорија

1. Означимо са $f(XYZ)$ израз на десној страни који одговара троуглу $\triangle XYZ$, а $R(XYZ)$ полупречник описаног круга троугла $\triangle XYZ$. Претпоставимо $\sphericalangle ACB > 120°$. Нека је C' тачка на продужетку полуправе AC таква да је $\sphericalangle AC'B = 120°$. $f(ABC) < f(ABC')$ је због неједнакости троугла у $\triangle BCC'$, $BC < BC' + C'C$. Како је $\gamma = \sphericalangle ACB > \sphericalangle AC'B = \gamma'$ (и γ и γ' су тупи углови па је $\sin\gamma < \sin\gamma'$) из синусних теорема за троуглове $\triangle ABC$ и $\triangle ABC'$ добијамо $2R(ABC) = \dfrac{AB}{\sin\gamma} > \dfrac{AB}{\sin\gamma'} = 2R(ABC')$, тј. $R(ABC) > R(ABC')$.
Стога је довољно доказати неједнакост онда када је $\sphericalangle ACB = 120°$. Нека је k описани круг око ABC и нека је D тачка на том кругу таква да је троугао ABE једнакостраничан. У том случају имамо $R = \frac{AB}{\sqrt{3}}$ и $2R \geqslant CE = AC + BC$. Сабирајући ове две неједнакости добијамо жељену неједнакост. Једнакост важи само кад је $\sphericalangle ACB = 120°$ и $AC = BC$.

2. Видети решење 2. задатка за трећи разред А категорије.

3. Једно од решења је дато следећом таблицом (П,А,В,М су ознаке за родове, а д,в,п,к за чинове):

Пд	Ак	Вв	Мп
Мв	Вп	Ад	Пк
Ап	Пв	Мк	Вд
Вк	Мд	Пп	Ав .

4. Приметимо да су бројеви ε, ε^2, ε^3 и ε^4, нуле полинома $P(x) = x^{17} + x^1 + x^{2004} + x^8 + 1$, где је $\varepsilon = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$. Стога је $P(x)$ дељив са $(x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2)(x - \varepsilon^3)(x - \varepsilon^4) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Тиме смо добили и да је број $n^{17} + n^1 + n^{2004} + n^8 + 1$ дељив са $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ $(1 < n^2 + n + 1 < n^{2003} + n + 1)$ за сваки природан $n > 1$, те је он сложен за сваки природан $n > 1$.

5. Видети решење 5. задатка за трећи разред А категорије.

Први разред – Б категорија

1. Из $\overline{aa}\cdot\overline{ba}\cdot\overline{aba} = 1001\cdot\overline{aba}$ због $a \neq b (\neq 0)$, након дељења са $\overline{aba}$, следи $\overline{aa}\cdot\overline{ba} = 1001$, тј. $11a\cdot\overline{ba} = 7\cdot 11\cdot 13$, односно $a\cdot\overline{ba} = 7\cdot 13$. Случај $a = 7$, $\overline{ba} = 13$ не даје решења, па мора бити $a = 1$ и $\overline{ba} = 91$, тј.

$$11\cdot 91\cdot 191 = 191191.$$

2. Означимо са $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ и $x = \sphericalangle BAD$. Из $CD = CA$ следи $\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAC = \alpha - x$. Како у $\triangle ACD$ важи $\alpha - x + \alpha - x + \gamma = 180^\circ$, тј. $2(\alpha - x) + 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ$, добијамо $\alpha - \beta = 2x$. Дакле, $x = \dfrac{\alpha - \beta}{2} = 22^\circ 30'$.

3. Видети решење 3. задатка за први разред А категорије.

4. Нека је a основица, а b крак троугла. Из $a + 2b = 30$ следи да a мора бити паран број, а из неједнакости троугла $a < b + b = 2b$, тј. $a \leq 14$. У обзир долазе само следећи случајеви:

$$(a, b) \in \{(2, 14), (4, 13), (6, 12), (8, 11), (10, 10), (12, 9), (14, 8)\},$$

па оваквих троуглова има укупно 7.

5. Како је $2^{12} + 5^9 = (2^4)^3 + (5^3)^3 = (2^4 + 5^3)(2^8 - 2^4\cdot 5^3 + 5^6)$, добијамо да је дати број дељив са $2^4 + 5^3 = 141$, па је сложен.

Други разред – Б категорија

1. Из сличности троуглова $\triangle ACD \sim \triangle CBD$ следи $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{BC}{CD}$, а из својства симетрале угла следе $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{PC}{PD}$ и $\dfrac{CB}{CD} = \dfrac{QB}{QD}$. Одавде је $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{BQ}{QD}$, па је $PQ \parallel BC$.

2. Како је $D = 4[(a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2)] = 8(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2) = -4[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \leqslant 0$, дата једначина не може имати реалне и различите корене.

3. Једначина се представи у облику $|x2-1|-|3x-2|-3x = 1$ и разматрају се случајеви $x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3}$ и $x \geqslant 23$. Једино решење је $x = 1$.

4. Сређивањем добијамо $(x_1-b)(x_2-b) = x_1x_2 - b(x_1+x_2) + b^2 = \frac{2a-1}{a-1} - b\frac{a+1}{a-1} + b^2 = 2 + \frac{1}{a-1} - b(1+\frac{2}{a-1}) + b^2 = b^2 - b + 2 + \frac{1-2b}{a-1}$. Овај израз не зависи од a само ако је $b = \frac{1}{2}$.

5. Видети решење 5. задатка за први разред Б категорије.

Трећи разред – Б категорија

1. Множењем израза са $\dfrac{16\cos 8^\circ}{16\cos 8^\circ}$ имамо $\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \dfrac{16\sin 6^\circ \cos 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ}{16\cos 6^\circ} = \dfrac{8\sin 12^\circ \cos 48^\circ \cos 24^\circ \cos 12^\circ}{16\cos 6^\circ} = \dfrac{4\sin 24^\circ \cos 48^\circ \cos 24^\circ}{16\cos 6^\circ} = \dfrac{2\sin 48^\circ \cos 48^\circ}{16\cos 6^\circ} = \dfrac{\sin 96^\circ}{16\cos 6^\circ} = \dfrac{1}{16}$.

2. $(\log_{2003} 2004)^{-1} + (\log_{2005} 2004)^{-1} = \dfrac{1}{\log_{2003} 2004} + \dfrac{1}{\log_{2005} 2004} = \log_{2004} 2003 + \log_{2004} 2005 = \log_{2004}(2003 \cdot 2005) = \log_{2004}(2004^2 - 1) < \log_{2004} 2004^2 = 2$.

3. Нека је $\{D\} = p \cap c$ и $A \in p$, $A \neq D$. Ако је C подножје нормале из A на раван β, а B подножје нормале из A на праву c, имаћемо $\varphi = \sphericalangle ABC$, $\psi = \sphericalangle ADB$ и $\gamma = \sphericalangle ADC$. Из троугла $\triangle ABD$ је $AB = AD\sin\psi$, а из троугла $\triangle ABC$ је $AC = AB\sin\varphi$, док се из троугла $\triangle ADC$ добија је $AC = AD\sin\gamma$. Из ове три једнакости следи да је $\sin\gamma = \sin\varphi\sin\psi$.

4. Ако од треће колоне одузмемо прву помножену са $\cos\delta$ и одузмемо другу помножену са $\sin\delta$ добијамо колону са свим елементима 0. Стога је и тражена детерминанта једнака 0.

5. 1: Из прве две једначине имамо $y = 2x$, док из прве и треће имамо $z = 3x$. Сада из прве добијамо $648x^{10} = 1$, па су решења датог система

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{648}}, \frac{2}{\sqrt[10]{648}}, \frac{3}{\sqrt[10]{648}}\right) \text{ и } (x, y, z) = \left(\frac{-1}{\sqrt[10]{648}}, \frac{-2}{\sqrt[10]{648}}, \frac{-3}{\sqrt[10]{648}}\right).$$

2: Логаритмујемо једначине и добијамо систем линеарних једначина.

Четврти разред – Б категорија

1. Број чланова у првих $n-1$ група је $1+2+\ldots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$. Први члан n-те групе је $\frac{(n-1)n}{2}+1$ и у тој групи има n чланова, па је тражени збир (сума аритметичке прогресије) једнак $S_n = [2(\frac{(n-1)n}{2}+1)+(n-1)] \cdot \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n^2+1)$.

2. Из Вијетових формула добијамо: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и $x_1x_2x_3 = -n$, па је ${x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 = (x_1 + x_2 + x_3)({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2) - (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) + 3x_1x_2x_3 = -3n$.

3. Нека је x дужина странице правоугаоника, која не припада хипотенузи, и нека је EF страница која припада хипотенузи (распоред тачака је A, E, F, B). Тада је $AE = x \operatorname{tg} 30^\circ$, $BF = x \operatorname{tg} 60^\circ$, одакле је $EF = AB - AE - BF = 8 - \frac{4x}{\sqrt{3}}$, па је површина $P(x) = 8x - \frac{4x^2}{\sqrt{3}}$. Како је $P'(x) = 8 - \frac{8x}{\sqrt{3}}$, добијамо да је површина максимална када је $x = \sqrt{3}$. Друга страница правоугаоника има дужину 4.

4. Како је $(x-y)^2 \geqslant 0$ из прве једначине добијамо $z+4 = \dfrac{1}{1+(x-y)^2} \leqslant 1$, одакле је $z \leqslant -3$. Али из друге једначине је $z \geqslant -3$ (да би корен био дефинисан), па добијамо да је $z = -3$. Из друге једначине добијамо $2x = 8$, тј. $x = 4$, а из прве $y = 4$. Значи систем има јединствено решење $(x, y, z) = (4, 4, -3)$.

5. Видети решење 5. задатка за трећи разред Б категорије.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА ОКРУЖНОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. Означимо са D средиште странице BC. Пошто је симетрала угла код B истовремено и висина троугла ABD, онда је тај троугао једнакокрак, тј. $AB = BD = \frac{1}{2}BC$. Дакле, имамо да је $BC = AB + 2 = 2AB$ или $BC = AB + 1 = 2AB$. Други случај је немогућ, јер би AC онда била једнака 0 или 3, што је у супротности са неједнакости троугла. Дакле, дужине страница су $AB = 2$, $AC = 3$ и $BC = 4$.

2. 1: A_1 је центар описаног круга око троугла $\triangle BHC$, па је на симетрали странице CH, као и B_1 (из $\triangle CHA$), па је $A_1B_1 \perp CH$, тј. $A_1B_1 \parallel AB$. Аналогно се показује и $B_1C_1 \parallel BC$ и $C_1A_1 \parallel CA$. Докажимо да је H центар описаног круга око троугла $A_1B_1C_1$: из $\triangle AHB \cong \triangle AH_cB$ (где је H_c пресек продужетка висине из C са описаним кругом око $\triangle ABC$, полупречника R) следи да је $HA_1 = R$. Аналогно се показује и за HB_1 и HC_1, тј. добијамо $HA_1 = HB_1 = HC_1 = R$. Како су углови $\triangle A_1B_1C_1$ једнаки одговарајућим угловима $\triangle ABC$ (углови са паралелним крацима) и из чињенице да ова два троугла имају једнаке полупречнике описаних кругова следи подударност ова два троугла.

2: Нека је $A_2B_2C_2$ троугао који настаје кад кроз тачку A поставимо праву $C_2B_2 \parallel BC$, кроз B праву $A_2C_2 \parallel CA$ и кроз C праву $B_2A_2 \parallel AB$. Из $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp B_2A_2$, као и $BH \perp CA \Rightarrow BH \perp A_2B_2$, па је четвороугао $CHBA_2$ тетиван, тј. тачка A_2 припада кругу описаном око троугла $\triangle HBC$, односно HA_2 је пречник тог круга, па је A_1 средиште HA_2. Аналогно је и B_1 средиште HB_2, те је A_1B_1 средња линија у троуглу $\triangle HA_2B_2$, па је $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_2B_2$. Како из $\triangle ABC \sim \triangle CAB_2 \sim \triangle A_2BC \Rightarrow AB = CB_2 = A_2C$, добијамо да је $AB = \frac{1}{2}A_2B_2$, односно $AB = A_1B_1$. Аналогно се добијају и $BC = B_1C_1$ и $CA = C_1A_1$, па је $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

3. Одговор: 1503. Ако би посматрали низ $b_n = \frac{n^2}{2004}$, тада је $a_n = [b_n]$. Докле год је $b_{n+1} - b_n \leqslant 1$, то је $a_{n+1} - a_n$ или 0 или 1, тј. ни један број не бива прескочен. Тек за $n = 1002$, $b_{n+1} - b_n = \frac{2n+1}{2004} > 1$, па је од тада низ $\{a_n\}$ строго растући тј. сваки следећи члан је различит од претходног. Како је $a_{1002} = 501$, низ је узимао све целе вредности од 0 до 501 (дакле 502 различите вредности) плус још вредности које узимају чланови са индексима 1003 до 2003 (а оне су све међусобно различите, дакле 1001 различит члан). Дакле, низ $\{a_n\}$ садржи $502 + 1001 = 1503$ различитих чланова.

4. а) Не, јер би онда $8 \mid 4$ $(8 = 15 - 7 \mid P(15) - P(7) = 12 - 8 = 4)$!
б) Да, нпр. $P(x) = 2x - 9$.

5. Ако означимо редом објекте, видимо да n страда од $n+1$ и од $n+2$. Стога за $k \leqslant 3$ трговац не може никако да отплови први пут, а да иза њега не остане неко ко настрада (нпр. из сваког од скупова $\{1, 2, 3\}$ и $\{5, 6, 7\}$ морамо да узмемо бар 2 елемента!). Докажимо да је тражено k управо $k = 4$. Означавајући А као почетну обалу, а Б као завршну, трговац може за $k = 4$ да примени следеће потезе:
А: утовари миша, пацова, пса и вука
Б: истовари миша и пса
А: утовари сир и мачку
Б: истовари сир и мачку, утовари миша и пса
А: истовари миша и пса, утовари медведа
Б: истовари медведа
А: утовари миша и пса
Б: истовари миша, пацова, пса и вука.
Стога је $k = 4$ минимално k које задовољава услове задатка.

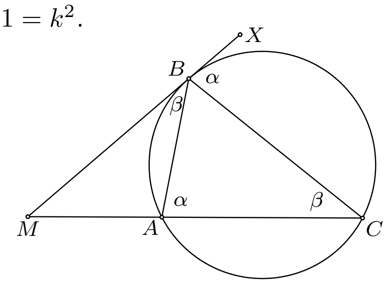
Други разред – А категорија

1. Означимо са $x = \dfrac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}$. Тада је $\dfrac{1}{x} = \dfrac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2}$ и $x + \dfrac{1}{x} = n$. Докажимо да је $x^m + \dfrac{1}{x^m} = k$ за неки природан број k. Ово тврђење доказујемо индукцијом по m. За $m = 1$, оно је очигледно. Претпоставимо да тврђење важи за све природне бројеве мање од неког m и докажимо га за m. Пођимо од једначине $x + \frac{1}{x} = n$ и степенујмо са m и леву и десну страну. Ако на леву страну применимо биномну формулу и групишемо сабирке први са последњим, други са претпоследњим, итд. добијамо

$$\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + m\left(x^{m-2} + \frac{1}{x^{m-2}}\right) + \binom{m}{2}\left(x^{m-4} + \frac{1}{x^{m-4}}\right) + \ldots = n^m.$$

Сабирак у првој загради је онај који рачунамо, и то је позитиван број. Међутим у свим осталим заградама се налази природан број, према индуктивној претпоставци. Због тога је и $x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}$ природан број. Према томе $x^m + \frac{1}{x^m} = k$ за неки природан број k. Уводећи смену $x^m = t$ и решавајући добијену квадратну једначину добијамо да је $t = \frac{k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$. Пошто је $x > 1$, тада је и $t > 1$, па је $t = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$. Тиме је тврђење доказано.

2. Без умањења општости можемо претпоставити да је $AB < CB$. Означимо са X тачку на тангенти t, тако да је тачка B између M и X. Због једнакости угла између тетиве и тангенте и периферијског угла над том тетивом имамо $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABM$ и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBX$. Одатле је $\sin\sphericalangle MBC = \sin(180^\circ - \sphericalangle CBX) = \sin\sphericalangle CBX = \sin\sphericalangle CAB$ и $\dfrac{BC}{\sin\sphericalangle BAC} \overset{S}{=} \dfrac{BA}{\sin\sphericalangle BCA} = \dfrac{BA}{\sin\sphericalangle MBA}$, при чему смо за једнакост S користили синусну теорему у троуглу $\triangle ABC$. Даље је: $\dfrac{MA}{MC} = \frac{P_{\triangle MBA}}{P_{\triangle MBC}} = \dfrac{\frac{1}{2}MB \cdot BA \cdot \sin\sphericalangle MBA}{\frac{1}{2}MB \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle MBC} = \dfrac{BA^2}{BC^2} \cdot \dfrac{BC}{\sin\sphericalangle MBC} \cdot \dfrac{\sin\sphericalangle MBA}{BA} = \dfrac{BA^2}{BC^2} \cdot \dfrac{BC}{\sin\sphericalangle BAC} \cdot \dfrac{\sin\sphericalangle MBA}{BA} = \dfrac{BA^2}{BC^2} \cdot 1 = k^2$.



3. Бројеви $x + \sqrt{x^2+1}$ и $y + \sqrt{y^2+1}$ су позитивни. Ако су x и y оба позитивна, тада су $x + \sqrt{x^2+1}$ и $y + \sqrt{y^2+1}$ већи од 1, па њихов производ не може бити 1. Слично се доказује да је немогуће да и x и y буду негативни.

Према томе, x и y су различитог знака. Нека је, не умањујући општост,

$x > 0$ а $y < 0$. Треба доказати да је $|x| = |y|$. Претпоставимо да то није тачно. Тада је, или $|x| > |y|$ или $|y| > |x|$. Ова два случаја су аналогна, и зато је довољно размотрити само први. Како је $x > -y$, важи $x + \sqrt{x^2+1} > -y + \sqrt{y^2+1}$, па је $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \cdot \left(y + \sqrt{y^2+1}\right) > \left(-y + \sqrt{y^2+1}\right) \cdot \left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1$. Контрадикција! Према томе, $x+y = 0$.

4. <u>1:</u> Нека је T тежиште, A_1 средиште BC, а D подножје висине из A (решење је без обзира да ли D пада на BC или продужетак). Пошто T лежи на кругу над BC, као пречником, то је $BC = 2TA_1$. Како је $\operatorname{ctg}\beta = \frac{BD}{AD}$, $\operatorname{ctg}\gamma = \frac{CD}{AD}$ (ако би један од ових углова био туп једно од ових би било $-\operatorname{ctg}$) онда је:

$$\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \frac{BD}{AD} + \frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AD} \geqslant \frac{CB}{AA_1} = \frac{2AA_1}{3AA_1} = \frac{2}{3}$$

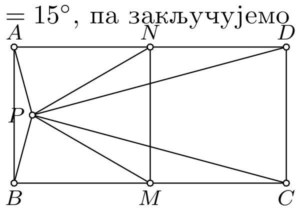
(у случају тупог угла овде уместо плуса имамо минус, али тада је управо $CB = \mid DB - CD \mid$). Једнакост важи кад је $AD = AA_1$, тј. када је троугао једнакокрак.

<u>2:</u> Нека су C_1,B_1, T, редом средиште AB, средиште AC, тежиште троугла. Означимо још $\gamma_1 = \sphericalangle BCC_1$, $\gamma_2 = \sphericalangle ACC_1$, $\beta_1 = \sphericalangle ABB_1$, $\beta_2 = \sphericalangle CBB_1$ и $x = \frac{t_b}{3}$, $y = \frac{t_c}{3}$. Са слике видимо: $\operatorname{ctg}\beta_1 = \frac{2x}{y}$, $\operatorname{ctg}\beta_2 = \frac{x}{y}$, $\operatorname{ctg}\gamma_1 = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\gamma_2 = \frac{2y}{x}$. Остаје лакши рачун – $\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{ctg}(\beta_1+\beta_2) + \operatorname{ctg}(\gamma_1+\gamma_2)$, применом адиционе формуле за ctg збира добијемо да је тај израз на крају: $\frac{x^2+y^2}{3xy}$, а из неједнакости квадратне и геометријске средине добијамо $\frac{x^2+y^2}{3xy} \geqslant \frac{2}{3}$. Једнакост важи кад је $AB = AC$.

5. **а)** Након сваког корака је број црвених поља паран. На почетку имамо 2002×2003 белих и 0 црвених поља, тј. тај број је паран, а ако би имали исти број белих и црвених поља, тај број би био $1001 \cdot 2003 = 2\,005\,003$ непаран, што је немогуће.
б) Могуће је јер можемо да променимо боју 9 поља (квадрат 3×3) и 4 поља (ако променимо боју у квадратима 3×3 са доњим левим пољем у А1,А2,Б1,Б2, променићемо боју само у пољима А1,А4,Д1 и Д4). $1001 \cdot 2003 = 2\,005\,003 = 9 \cdot 222\,775 + 4 \cdot 7$.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су M и N редом средишта страница BC и DA редом, и P' треће теме једнакостраничног троугла MNP', где је P' у унутрашњости $MNAB$. Тада је $P'M = MN = AB = \frac{1}{2}BC = MB = MC$, одакле следи да су троуглови $P'MB$ и $P'MC$ једнакокраки. Зато због $\sphericalangle P'MB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ имамо $\sphericalangle P'BM = \sphericalangle BP'M = 75^\circ$, одакле је $\sphericalangle ABP' = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$. Слично је $\sphericalangle BAP' = 15^\circ$, па закључујемо да је $P' \equiv P$.



Како је $\sphericalangle PMC = 150^\circ$ и $PM = MC$, добијамо $\sphericalangle PCM = 15^\circ$ и $\sphericalangle PCD = 75^\circ$. На исти начин је $\sphericalangle PDC = 75^\circ$, одакле коначно следи $\sphericalangle CPD = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ$.

2. Означимо са h_a, h_b и h_c одговарајуће висине, са r полупречник уписаног круга и са P површину троугла $\triangle ABC$. Из сличности троугла $\triangle ABC$ са троугловима које одсецају одсечци m, n и p од троугла $\triangle ABC$ добијамо да је $\dfrac{m}{a} = \dfrac{h_a - r}{h_a} = 1 - \dfrac{r}{h_a}$ и слично $\dfrac{n}{b} = 1 - \dfrac{r}{h_b}$ и $\dfrac{p}{c} = 1 - \dfrac{r}{h_c}$. Дакле, $\dfrac{m}{a} + \dfrac{n}{b} + \dfrac{p}{c} = 3 - r\left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}\right) = 3 - r\left(\dfrac{a}{2P} + \dfrac{b}{2P} + \dfrac{c}{2P}\right) = 3 - r\left(\dfrac{a+b+c}{2P}\right) = 3 - \dfrac{r}{r} = 2$.

3. Полином $P(x) = (x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_{2004}) - \alpha$ је 2004-тог степена и његове (међусобно различите реалне) нуле су: $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$, па је $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2004})$. Дакле, за свако $i \in \{1, 2, \ldots, 2004\}$ имамо: $P(-b_i) = (-b_i - a_1)(-b_i - a_2)\cdots(-b_i - a_{2004}) = (b_i + a_1)(b_i + a_2)\cdots(b_i + a_{2004})$. С друге стране, имамо и да је $P(-b_i) = (-b_i + b_1)(-b_i + b_2)\cdots(-b_i + b_{2004}) - \alpha = -\alpha$.

4. Докажимо прво да су бројеви $\sqrt{p^2 + 14pq + q^2}$ и $\sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$ природни. Ако је $a = p^2 + 14pq + q^2$ и $b = p^2 + 7pq + q^2$, онда је за неко $c \in \mathbb{N}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = c$. Зато је $\sqrt{a} = c - \sqrt{b}$ што имплицира $a = c^2 + b - 2c\sqrt{b}$, односно $\sqrt{b} = \dfrac{c^2 + b - a}{2c}$. Дакле, $\sqrt{b}$ је рационалан број што је могуће

само у случају да је b потпун квадрат. Аналогно закључујемо да је и a потпун квадрат. Зато су $\alpha = \sqrt{p^2+14pq+q^2} + \sqrt{p^2+7pq+q^2}$ и $\beta = \sqrt{p^2+14pq+q^2} - \sqrt{p^2+7pq+q^2}$ природни бројеви. Како је $\alpha\beta = 7pq$, то је $\alpha \in \{1, q, p, pq, 7, 7q, 7p, 7pq\}$. Без губљења општости можемо да претпоставимо да је $p \geqslant q$, те је $7q = 4q + 3q = \sqrt{q^2+14qq+q^2} + \sqrt{q^2+7qq+q^2} \leqslant \sqrt{p^2+14pq+q^2} + \sqrt{p^2+7pq+q^2} = \alpha$. Аналогно је и $\alpha \leqslant 7p$. Отуда је $\alpha \in \{7q, 7p, pq\}$. Ако је $\alpha = 7q$ или $\alpha = 7p$ одмах следи да је $p = q$. У случају да је $\alpha = pq$, користећи закључак да је $\alpha \leqslant 7p$ налазимо да је $q \leqslant 7$. Заменом за $q \in \{2, 3, 5\}$ налазимо да не постоји одговарајући прост број p, а за $q = 7$ добијамо да је и $p = 7$.
Сви парови простих бројева који задовољавају услов задатка су (p, p), где је p произвољан прост број.

5. Ставимо $f(1) = a$. Како је за свако x, $f(x) = f(\frac{x+2x}{3}) = \frac{f(x)+f(2x)}{3}$, добијамо $f(2x) = f(x)$: између осталог, $f(1) = f(2) = f(4) = a$. Такође, $a = f(2) = f(\frac{3+3}{3}) = \frac{f(3)+f(3)}{2} = f(3)$.
Доказаћемо индукцијом да је $f(n) = a$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да је $f(1) = f(2) = \ldots = f(n-1) = a$. Тада за дато n постоји $i \in \{1, 2, 3\}$ такво да је $n+i$ дељиво са 3. Зато је $a = f(\frac{n+i}{3}) = \frac{f(n)+f(i)}{2} = \frac{f(n)+a}{2}$, тј. $f(n) = a$, с обзиром на то да је $\frac{n+i}{3} \leqslant n-1$ за $n \geqslant 4$. Овим је индукција завршена.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је X пресек права BG и AE. Пошто је $BX \perp AF$ и $AX \perp BF$ следи да је X ортоцентар троугла ABF те је према томе $FX \perp AB \Rightarrow FX \parallel BC \parallel AD$. Следи:

$$\frac{EF}{ED} = \frac{FX}{DA} = \frac{FX}{BC} = \frac{GF}{GC},$$

где прва једнакост следи из $\triangle EFX \sim \triangle EDA$, а последња из $\triangle GFX \sim \triangle GCB$. Из претходног добијамо да је $GE \parallel CD \perp BH$. Пошто је $BE \perp GH$ следи да је E ортоцентар троугла GHB из чега $\sphericalangle EGB = \sphericalangle EHB$ следи директно.

2. 1: Претпоставимо да смо одабрали поља $a_{i,\sigma(i)}$, где је $i = 1, 2, \ldots, n$ и σ пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тада је

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i,\sigma(i)}} = \sum_{i=1}^{n} (i + \sigma(i) - 1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - n = n^2.$$

По неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског је $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{i,\sigma(i)}} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \geqslant n^2$, одакле следи тврђење.

<u>2:</u> Ако су међу изабраним бројевима a_{ij} и a_{kl} при чему је $i < k$ и $j < l$, онда се лако показује да је $a_{ij} + a_{kl} \geqslant a_{il} + a_{kj}$. Тако закључујемо да се најмања вредност збира a_{ij} достиже онда када одаберемо управо $a_{1n}, a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – а тада је збир једнак 1.

3. <u>1:</u> Приметимо да прва једначина представља једначину равни, док друга једначина система представља једначину сфере са средиштем у тачки $(0,0,0)$, полупречника $|b|$. Узимајући то у обзир добијамо да за $|a| = |b|\sqrt{3}$ систем има јединствено решење. Систем нема решења ако је $|a| > |b|\sqrt{3}$.

<u>2:</u> Из прве једначине имамо $x = a - y - z$, што кад уврстимо у другу једначину добијамо квадратну једначину (по y) $2y^2 + (2z - 2a)y + 2z^2 - 2az + a^2 - b^2 = 0$. Њена дискриминанта $D_y = 4(-3z^2 + 2az + 2b^2 - a^2)$ мора бити $D_y = 0$ да би једначина имала јединствено решење. $D_y = 0$ има јединствено решење (по z) уколико је њена дискриминанта $D_z = 128(3b^2 - a^2) = 0$, а то је испуњено за $a^2 = 3b^2$, тј. $|a| = |b|\sqrt{3}$.
Систем нема решења уколико је $D_y < 0$, што важи за свако z уколико је $D_z < 0$ (јер је коефицијент уз z^2 једнак $-12 < 0$). $D_z < 0$ када је $a^2 > 3b^2$, тј. $|a| > |b|\sqrt{3}$.

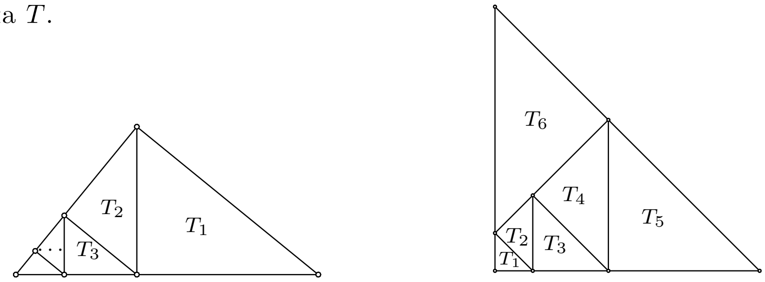
4. Како топ у сваком потезу може да одигра на тачно 4 поља (3 по хоризонтали и 1 по вертикали), то је $t_n = 4^n$. Означимо са a_n број n-потеза краљем ако се краљ налази на угаоном пољу (А1,А2,Д1,Д2), а са b_n број n-потеза краљем ако се краљ налази на неком од централних поља (Б1,Б2,Ц1,Ц2). Како краљ са угаоног поља може да оде на 1 угаоно и 2 централна поља добијамо $a_{n+1} = a_n + 2b_n$. Како краљ са централног поља може да оде на 2 угаона и 3 централна поља добијамо $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Из овог система рекурентних једначина добијамо

$a_{n+2} - 4a_{n+1} - a_n = 0$. Приметимо још да је $k_n = a_n$. Како је

n	0	1	2	3	4	5	6	7	...
k_n	1	3	13	55	233	987	4181	17711	...
t_n	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	...

остаје још да се математичком индукцијом покаже да је $k_n > t_n$ за $n \geqslant 6$: 1° *База математичке индукције* за $n = 6$ имамо да је $a_6 = 4181 > 4096 = 4^6 = t_6$. ✓.
2° *Индукцијска претпоставка* претпоставимо да за $n = k$ важи $a_k > 4^k = t_k$.
3° *Индукцијски корак* за $n = k+1$ имамо $a_{k+1} = 4a_k + a_{k-1} > 4^k + 4^{k-1} > 4^{k+1} = t_{k+1}$.
Стога $k_n < t_n$ важи за $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5. Имамо 2 случаја:
1° *троугао T није једнакокрак* – повлачењем висине из темена правоуглог троугла троугао је разбијен на два троугла који су слични полазном. Ако понављамо овај поступак (увек са мањом "половином" последње-подељеног троугла) долазимо до траженог разбијања троугла T.

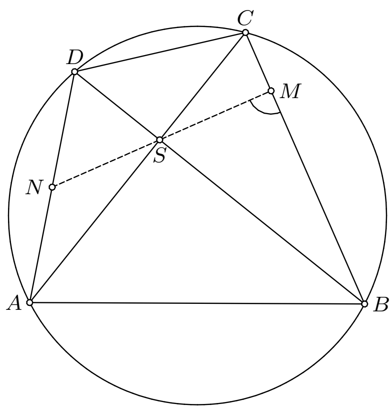


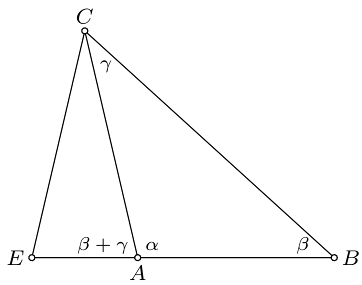
2° *троугао T је једнакокрак* – поновимо поступак из претходног случаја и поделимо троугао на 1999 делова, а затим један од два најмања троуглића поделимо на 6 делова као на слици десно (странице ових троуглића се односе као $1 : \sqrt{2} : 2 : 2\sqrt{2} : 4 : 3\sqrt{2}$), што нам даје тражену поделу.
<u>Напомена:</u> Постоје и другачија разбијања у случају 2°.

Први разред – Б категорија

1. Нека је $n = 2k+1$. Тада је $n^n - n = n \cdot (n^k - 1) \cdot (n^k + 1)$. Како су $n^k - 1$ и $n^k + 1$ узастопни парни бројеви, тачно један од њих је дељив са 4, а један са 2, али не и са 4. Дакле, производ та два броја је дељив са 8. Ако је n дељиво са 3, онда је тврђење задатка показано. Ако није, онда ни n^k није дељиво са 3. Тада је или $n^k - 1$ или $n^k + 1$ дељиво са 3, јер од три узастопна природна броја један мора бити дељив са 3. Тиме смо у сваком случају добили да је број $n^n - n$ дељив са 24 за све непарне природне бројеве n.

2. 2. ИНека је подножје нормале n из S на BC тачка M, а пресек n и AD тачка M. Четвороугао $ABCD$ је тетиван па је $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$ (над тетивом DC). Из $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BMS = 90°$ добијамо да је $\sphericalangle ADS = \sphericalangle BSM$. Како је $\sphericalangle BSM = \sphericalangle DSN$ (унакрсни углови) добијамо да је $\triangle DSN$ једнакокраки ($\sphericalangle NDS = \sphericalangle DSN$), тј. $NS = ND$. Стога је N центар описане кружнице око правоуглог $\triangle ADS$, па је $NA = ND$, што је и требало доказати.





3. а) Сабирањем левих и десних страна једнакости $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ и $\alpha - \beta = 2\gamma$ добијамо $2\alpha = 180° + \gamma$, тј. $\alpha = 90° + \frac{\gamma}{2} > 90°$.
б) Како је $\sphericalangle EAC = \beta + \gamma$ (спољашњи угао) из једнакокраког троугла $\triangle EAC$ добијамо $\sphericalangle AEC = \sphericalangle EAC = \beta + \gamma$. Стога је $\sphericalangle ECA = 180° - \sphericalangle AEC - \sphericalangle EAC = 180° - 2(\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - 2(\beta + \gamma) = \alpha - \beta - \gamma = 2\gamma - \gamma = \gamma = \sphericalangle ACB$, па је CA симетрала угла $\sphericalangle ECB$.

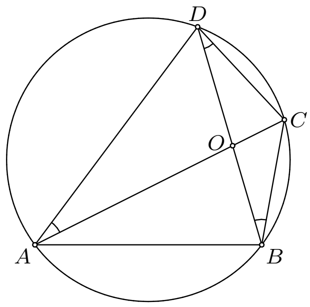
4. Ако у релацији $f(x) + 2f(1-x) = x$ уместо сваког x ставимо $1-x$ добијамо $f(1-x) + 2f(x) = 1-x$. Решавајући овај систем једначина налазимо $f(x) = -x + \frac{2}{3}$.

5. Могућа су два распореда (по националностима):

ИФФФФИШШШШШИ и ИШШШШШИФФФФИ.

Како у сваком од ових распореда Италијане можемо распоредити на 3! начина, Французе на 4! и Шпанце на 5! добијамо да се ови људи могу распоредити на $2 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! = 34560$ начина.

Други разред – Б категорија



1. Из једнакости $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ (периферијски углови круга) и из једнакокраког троугла $\triangle BCD$ добијамо $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD$. Стога је $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDO$, што са $\sphericalangle ACD = \sphericalangle OCD$ даје сличност $\triangle ACD \sim \triangle DCO$. Дакле, важи $\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{CD}{CO}$, одакле је $AC = 18cm$.

2. Из $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \dfrac{4(5a+3)^2}{25} - \dfrac{4(5a^2+6a+1)}{5} = \dfrac{16}{25}$, добијамо да $x_1 - x_2 = \dfrac{4}{5}$ не зависи од параметра a.

3. $\sqrt{x}(x+1) + x(x-4) + 1 = x\sqrt{x} + \sqrt{x} + x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2x + 1) + \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x} + 1) = (x-1)^2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2 \geqslant 0$. Једнакост важи само за $x = 1$.

4. Како је број $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ трећи корен из -1, а број $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ трећи корен из 1, добијамо да је $z = (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2004} + (\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^{2004} = \left((\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^3\right)^{668} + \left((\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^3\right)^{668} = (-1)^{668} + 1^{668} = 2$.

5. <u>1:</u> $E = (x+y+1)^2 + (x-2)^2 - 3$ има најмању вредност ако је $x+y+1 = 0$ и $x - 2 = 0$, тј. $E_{\min} = -3$ је за $x = 2$ и $y = -3$.

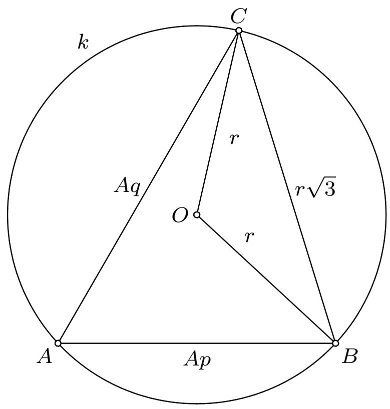
<u>2:</u> Квадратна функција $E(x,y) = y^2+2(x+1)y+2(x^2-x+1)$ има минимум (због $a = 1 > 0$) за $y = \frac{-b}{2a} = -(x+1)$. Када то уврстимо у полазни израз добијамо $E(x) = x^2 - 4x + 1$, што има минимум за $x = \frac{-b}{2a} = 2$. Значи израз E има најмању вредност за $x = 2$ и $y = -3$ (и тад је $E_{\min} = -3$).

Трећи разред – Б категорија

1. Полазна једначина је еквивалентна једначини $\frac{x^2}{4}+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2+\left(\frac{x}{2}-z\right)^2+\left(\frac{x}{2}-t\right)^2 = 0$ а једино решење претходне једначине је $x = y = z = t = 0$.

2. Да би оба корена била дефинисана потребно је да важи $\sin x \geqslant 0$ и $\cos x \geqslant 0$, тј. $2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако квадрирамо полазну неједначину добијамо $\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x \cos x} > 1$. Како за $\sin x \geqslant 0$, $\cos x \geqslant 0$ важи $\sin x + \cos x \geqslant 1$, а за $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ је $\sin x + \cos x > 1$, добијамо да су сва решења дате неједначине $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

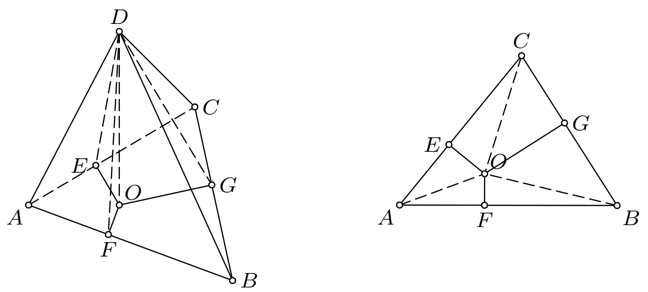
3. Нека је O центар круга k. Тада је централни угао $\sphericalangle BOC = 120^\circ$, па се применом косинусне теореме у троуглу $\triangle BOC$ добија $BC^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 120^\circ = 3r^2$, односно $BC = r\sqrt{3}$.



4. Детерминанта система мора бити $\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc \neq 0$ да би

систем имао јединствено решење. Тада се добија решење:
$x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

5. Нека су E, F и G подножја апотема и O подножје висине пирамиде $ABCD$. Површину троугла $\triangle ABC$ изразимо на два начина: $\dfrac{1}{2}a(OF+OG+OE)=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, па је $OF+OG+OE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Са друге стране, важи $OG=H\operatorname{ctg}\alpha$, $OE=H\operatorname{ctg}\beta$ и $OF=H\operatorname{ctg}\gamma$, па је $H=\dfrac{a\sqrt{3}}{2(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}$ (овај резултат важи и када је O ван троугла $\triangle ABC$) и одатле $V=\dfrac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)}$.



Четврти разред – Б категорија

1. Из $R^2=r^2+(H-R)^2$ налази се $r^2=2HR-H^2$ и $s=\sqrt{r^2+H^2}=\sqrt{2HR}$, па је $M=\pi\sqrt{2HR-H^2}\cdot\sqrt{2HR}$. Ако посматрамо функцију $f(H)=\frac{M^2}{2\pi^2}$, $f(H)=(2HR-H^2)\cdot HR$ биће $f'(H)=HR(4R-3H)$ и ова функција (исто као и M) има максимум за $H=\frac{4}{3}R$.

2. Из $\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi+1}{\cos\varphi+i\sin\varphi-1}=\dfrac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{-2\sin^2\frac{\varphi}{2}+2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}=-i\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ добијамо модул $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|=\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|$. Ако је $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>0$, тј. $2k\pi<\varphi<(2k+1)\pi$, биће $\arg\dfrac{z+1}{z-1}=-\dfrac{\pi}{2}$, а ако је $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}<0$, тј. $(2k-1)\pi<\varphi<2k\pi$, биће $\arg\dfrac{z+1}{z-1}=\dfrac{\pi}{2}$.

3. Из $y(x^2-x+1)=x^2+x+1$ добија се $(y-1)x^2-(y+1)x+y-1=0$. За $y=1$ биће $x=0$, а за $y\neq 1$ да би решења квадратне једначине по x била реална треба да дискриминанта $D=-3y^2+10y-3$ буде ненегативна, тј. $\dfrac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$.

4. Ако би се $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ завршавао неком од цифара 2,4,7 или 9, онда би се $n(n+1)$ завршавао или са 4 или са 8, што је немогуће јер се производ два узастопна природна броја може завршавати само једном од цифара 0, 2 или 6.

5. Збир спољашњих углова конвексног многоугла једнак је $360°$, па конвексан многоугао може имати највише 3 тупа спољашња угла и према томе највише 3 оштра унутрашња угла. Оштроугли троуглови су, на пример, конвексни многоуглови са три оштра унутрашња угла.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА РЕПУБЛИЧКОГ ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Први разред – А категорија

1. 1: Означимо са $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$. Тада је $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DC} = -\vec{d} + \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\vec{a}$ и $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c} + \vec{d})$. Из услова задатка имамо да је $\overrightarrow{AP} = p \cdot \overrightarrow{AC} = p \cdot (\vec{a} + \vec{c})$, за $p > 1$. За тачку N која припада страници AD важи $\overrightarrow{AN} = n \cdot \overrightarrow{AD} = n \cdot \vec{d}$ (где је $0 < n < 1$) и слично $\overrightarrow{BM} = m \cdot \overrightarrow{BC} = m \cdot \vec{c}$ (где је $0 < m < 1$), одакле добијамо $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + m \cdot \vec{c}$. Да би тачке N, Y и P биле колинеарне мора да важи $\varphi \cdot \overrightarrow{AN} + (1 - \varphi) \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AY}$, одакле налазимо $\varphi = \dfrac{2p-1}{2p}$ и $n = \dfrac{p}{2p-1}$. Слично је $\theta \cdot \overrightarrow{AX} + (1 - \theta) \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM}$, одакле налазимо $\theta = \dfrac{2p-2}{2p-1}$ и $m = \dfrac{p}{2p-1}$. Како је $AB \parallel DC$ и $m = n$ из Талесове теореме добијамо и да је $AB \parallel NM \parallel DC$.

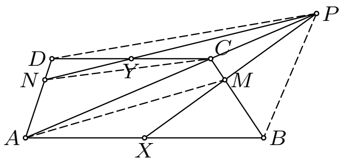
2: Приметимо да је $\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\triangle PMB}}{S_{\triangle PMC}}$. Како је $S_{\triangle PMB} + S_{\triangle XMB} = S_{\triangle PXB} = S_{\triangle PXA} = S_{\triangle PCM} + S_{\triangle ACM} + S_{\triangle AXM}$, добијамо да је $S_{\triangle PMB} = S_{\triangle PMC} + S_{\triangle ACM}$. Према томе,

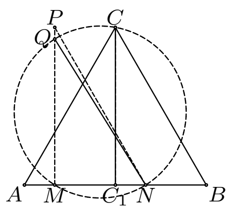
$$\frac{BM}{MC} = \frac{S_{\triangle PMC} + S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle PMC}} = 1 + \frac{S_{\triangle ACM}}{S_{\triangle PMC}} = 1 + \frac{AC}{CP}. \tag{1}$$

Слично као и горе, користићемо да је $\frac{AN}{ND} = \frac{S_{\triangle PNA}}{S_{\triangle PDN}}$. Како је Y средиште дужи CD, важи: $S_{\triangle PNC} = S_{\triangle PYC} + S_{\triangle YCN} = S_{\triangle PDY} + S_{\triangle DYN} = S_{\triangle PDN}$. Из $S_{\triangle PNA} = S_{\triangle PNC} + S_{\triangle CNA}$ следи да је

$$\frac{AN}{ND} = \frac{S_{\triangle PNA}}{S_{\triangle PDN}} = \frac{S_{\triangle PNC} + S_{\triangle CNA}}{S_{\triangle PNC}} = 1 + \frac{S_{\triangle CNA}}{S_{\triangle PNC}} = 1 + \frac{AC}{CP}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следи $\frac{AN}{ND} = \frac{MB}{MC}$, што значи да је $NM \parallel AB \parallel CD$.





2. Претпоставимо без смањења општости да је M између тачака A и N. Нека је C_1 средиште дужи AB. Конструишимо тачку P са оне стране праве AB на којој је C такву да је $\triangle PMN \cong \triangle CC_1B$. Нека круг k описан око MCN сече праву MP у тачкама M и Q. Тада је $\sphericalangle NCQ = \sphericalangle NMQ = 90^\circ$ док је $\sphericalangle NCP = \sphericalangle BNC > 90^\circ$ (јер је $CP \parallel AB$). Следи да се тачка P налази изван круга k, па је према томе $\sphericalangle MCN = \sphericalangle MQN > \sphericalangle MPN = 30^\circ$.

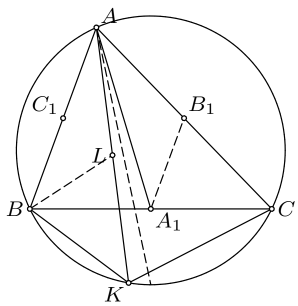
3. Претпоставимо без смањења општости да је a највећи од три броја: $a \geqslant b$, $a \geqslant c$. Тада из $a \mid 2c+1 \leqslant 2a+1$ и $2c+1 \neq 2a$ добијамо да је $a = 1$ или $2c+1 = a$.
Ако је $a = 1$ онда имамо решење $(a,b,c) = (1,1,1)$.
Ако је $2c+1 = a$ онда имамо $b \mid 4c+3$ и $c \mid 2b+1$ и тада улазимо у 3 случаја:
1° ако је $b = c$ онда $b \mid 4b+3$ и $b \mid 2b+1$, па и $b \mid 4b+3-2(2b+1) = 1$, што повлачи $b = 1$, односно $(a,b,c) = (3,1,1)$.
2° Ако је $b < c$, онда $2b+1 < 3c$, па је $2b+1 = c$ и онда $b \mid 4c+3 = 8b+7$, тј. $b \mid 7$. У овом случају је $(a,b,c) = (31,7,15)$ или $(a,b,c) = (7,1,3)$.
3° Ако је $b > c$, онда $b \mid 4c+3 \leqslant 4b-1$, па имамо само две могућности: $4c+3 = b$ и $4c+3 = 3b$. У првом случају $c \mid 2b+1 = 8c+7$, и зато $(a,b,c) = (3,7,1)$ или $(a,b,c) = (15,31,7)$, супротно претпоставци да је a највећи. У другом случају $c \mid 6b+3 = 8c+9$ што се своди на $c \mid 9$, одакле добијамо $(a,b,c) = (19,13,9)$ (за $c = 1$ и $c = 3$ нема решења).
Сва решења су $(1,1,1)$, $(3,1,1)$, $(7,1,3)$, $(31,7,15)$, $(19,13,9)$ са цикличним пермутацијама (јер могу бити и b и c највећи и онда би аналогно резоновали), односно $(1,1,1)$, $(3,1,1)$, $(1,1,3)$, $(1,3,1)$, $(7,1,3)$, $(1,3,7)$, $(3,7,1)$, $(31,7,15)$, $(7,15,31)$, $(15,31,7)$, $(19,13,9)$, $(13,9,19)$, $(9,19,13)$.
Дакле, тражених тројки има $1+3+3+3+3 = 13$.

4. Не може. Почевши од првог реда обојимо сваки четврти ред црвеном бојом. Укупан број црвених поља је дељив са 4. Свака вертикална домина покрива непаран број црвених поља (1), а свака хоризонтална паран (0 или 4). Претпоставимо да је број вертикалних домина једнак броју хоризонталних домина. Како је број домина дељив са 4, али не и са 8, следи да су бројеви вертикалних и хоризонталних домина дељиви са 2, али не и са 4. Стога је укупан број покривених црвених поља дељив са 2, али не и са 4, што је контрадикција (на почетку смо видели да је дељив са 4). Према томе, није могуће да бројеви вертикалних и хоризонталних домина буду исти.

5. Цифру десетица и цифру јединица, које испуњавају услове задатка, можемо одредити на 16 начина: 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96. 16 смо могли добити и без набрајања: $16 = 9\cdot 2 - 2$ – цифра десетица може бити било која сем нуле и за сваку од тих цифара десетица (сем 4 и 8) можемо цифру јединица одабрати на 2 начина (тј. морамо избацити 44 и 88). Сваку следећу цифру можемо одабрати на 8 начина (све сем 0 и претходне цифре), те укупно тражених бројева има $16 + 16\cdot 8 + 16\cdot 8\cdot 8 + 16\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 16 + 128 + 1024 + 8192 = 9360$.

Други разред – А категорија

1. 1: Нека су A_1, B_1 и C_1 средишта дужи BC, CA и AB, редом. Имамо $\sphericalangle BKA = \sphericalangle A_1CA$ и $\sphericalangle CKA = \sphericalangle A_1BA$ а такође и $\sphericalangle BAK = \sphericalangle A_1AC$ из чега следи $\triangle BAK \sim \triangle A_1AC$ и $\triangle CAK \sim \triangle A_1AB$. Сада је $\sphericalangle BLK = \sphericalangle A_1B_1C = \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle KLC = \sphericalangle BC_1A_1 = \sphericalangle BAC$ одакле следи да је $\sphericalangle BLC = 2\sphericalangle BAC$.



2: Нека је O центар описаног круга k троугла $\triangle ABC$. Пошто је $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC$ довољно је доказати да је четвороугао $BLOC$ тетиван. Применимо инверзију са центром у A и означимо слику сваке тачке X са X'. Пошто је $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AC}{AB}$ а углови са теменом у A се не мењају следи да је AK' тежишна дуж троугла $\triangle AB'C'$ из A на $B'C'$. Пошто k иде у $B'C'$ следи да је K' средиште $B'C'$ те је онда због $AL' = 2AK'$ тачка L' таква да је $AC'L'B'$ паралелограм. Нека је M диаметрално супротна тачка тачки A на k. Пошто $AM \perp k$ следи $AM' \perp B'C'$ те је M' подножје висине из A на $B'C'$ па је тачка O', због $AO' = 2AM'$, симетрична тачки A у односу на $B'C'$. Сада имамо $\sphericalangle B'O'C' = \sphericalangle B'L'C' = \sphericalangle B'AC'$ те је $B'L'O'C'$ тетиван из чега следи да је $BLOC$ тетиван.

2. Очигледно је $b \leqslant \frac{5}{2}$.
Ако је $b \leqslant \frac{5}{3}$, тада се вредност израза $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ може повећати

тако што ставимо $a = 5 - b$, $c = d = e = b$. Тада је $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = (5 - b)^2 + 4b^2 = f(b)$. Максимална вредност функције $f(b)$ на интервалу $(0, \frac{5}{3})$ је $\max\{f(0), f(\frac{5}{3})\} = 25$ и достиже се за $a = 5$ и $b = c = d = e = 0$. Ако је $\frac{5}{3} \leqslant b \leqslant \frac{5}{2}$ тада се вредност израза $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$ може повећати тако што ставимо $a = 5 - b$, $c = d = b$ и $e = 5 - 2b$. Тада је $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = (5-b)^2+3b^2+(5-2b)^2 = g(b)$. Максимална вредност функције $g(b)$ на интервалу $(\frac{5}{3}, \frac{5}{2})$ је $\max\{g(\frac{5}{3}), g(\frac{5}{2})\} = 25$ и достиже се за $a = b = c = d = \frac{5}{2}$ и $e = 0$.

3. Нека је $p < a$ прост број. Ако је n дељив са p, доказ је готов. Нека n није дељив са p. Онда бројеви $2n+1, 3n+1, \dots, (p+1)n+1$ дају различите остатке $r_1, r_2, \dots, r_p$ при дељењу са p. Заиста, ако је $r_i = r_j$ за $i \neq j$, онда је $(i-j)n$ дељиво са p, па је и $i - j$ дељиво са p, што је немогуће, јер је $1 \leqslant |i - j| < p$. Пошто имамо p различитих остатака, један од њих је једнак нули.

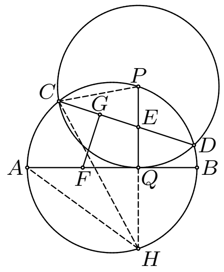
4. Како је $x_2 = x_1 - 4$, то је $p+q = x_1x_2 - (x_1+x_2) = x_1(x_1-4) - x_1 - (x_1-4) = {x_1}^2 - 6x_1 + 4 = (x_1-3)^2 - 5$. Дакле, збир $p+q$ је минималан ако је $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ $(p = -2,\ q = -3)$.

5. Постоји. Видећемо да скуп: $\{2, 2^2 3, 2^2 3^2 5, \dots, 2^2 3^2 5^2 \cdots p_{n-1}^2 p_n, \dots\}$, где је p_n n-ти прост број задовољава услове задатка. Збир ма колико бројева из овог скупа је дељив са неким p_k, где је k, индекс минималног сабирка те суме, а није дељив са p_k^2 (јер су њиме дељиви остали сабирци, а први је дељив само са првим степеном p_k), те никако не може бити степен (већи од 1) неког природног броја.

Трећи разред – А категорија

1. <u>1:</u> Обележимо са H другу пресечну тачку круга k са PQ. Како је AB симетрала дужи PH закључујемо да је $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle QAH$. Из једнакости $PD = PC$ имамо $\sphericalangle PHC = \sphericalangle PDC = \sphericalangle PCD$ и сличност троуглова $\Delta PCE \sim \Delta PHC$. Зато је $PH \cdot PE = PC^2 = PQ^2$. Тачка Q је средиште PH, па је $2PE = PQ$, односно $PE = EQ$.

Углови $\sphericalangle GFQ$ и $\sphericalangle CEP$ су једнаки (углови са нормалним крацима). Из горње сличности имамо једнакост $\sphericalangle PEC = \sphericalangle PCH = \sphericalangle PAH = 2\sphericalangle PAQ$. FE је средња линија троугла $\triangle PQA$, па следи $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle EFQ$. Сада имамо $\sphericalangle GFQ = 2\sphericalangle PAQ = 2\sphericalangle EFQ$, што је еквивалентно са чињеницом да је EF симетрала $\sphericalangle GFQ$. Троуглови $\triangle GFE$ и $\triangle QFE$ су подударни и $GE = EQ = EP$.
Из подударности закључујемо да је $AF = FQ = FG$, па је $\sphericalangle GAF = \sphericalangle EFQ$. Сада је AG паралелно са EF, што значи да су тачке A, G и P колинеарне.



2: Нека је l круг са центром P и полупречником PQ. Посматрајмо инверзију у односу на круг l. Круг k се пресликава у праву CD, а права AB се пресликава у круг m са пречником PQ. Пошто су круг k и права AB ортогонални, и њихове слике при инверзији ће бити ортогоналне, што значи да се центар круга m налази на CD. То значи да је E средиште дужи PQ. Тачка A припада и кругу k и правој AB па њена слика A' мора припадати и правој CD и кругу m. A' такође мора припадати и дужи PA, што значи да је A' пресек правих PA и CD и да важи $\sphericalangle PA'Q = 90^\circ$. Сада се једноставно добија да је $\sphericalangle FA'E = 90^\circ$ па се тачке A' и G поклапају и тражено тврђење сада непосредно следи.

2. Како је вредност корена увек ненегативна добијамо $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$ и $z \geqslant 1$. Нека је, даље, $x \geqslant y$ и $x \geqslant z$. Тада је $y = (x-1)^2$, $z = (y-1)^2$ и $x = (z-1)^2$, па из $x \geqslant y$ следи $(z-1)^2 \geqslant (x-1)^2$. Дакле, $z \geqslant x$, тј. $z = x$. Слично је $y = x$. Сада лако долазимо до решења $x = y = z = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

3. Претпоставимо да је n дељиво квадратом простог броја p, тј. да је $n = mp^2$, $m \in \mathbb{N}$. Тада $S = 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ можемо написати као

$$S = \left(0^n + 1^n + \ldots + (p-1)^n\right) + \ldots + \left((p(mp-1))^n + \ldots + (p \cdot mp - 1)^n\right).$$

У овом представљању се појављује n сабирака који сви дају исти остатак при дељењу са p. Према томе, S је дељиво са p, па $S+1$ никако не може бити дељиво са $n = mp^2$, што је контрадикција.

4. 1: Ако је a решење дате једначине, онда, због $x + f(x) = f(f(x)) \quad (*)$, важи једнакост $a = -f(a)$. Замењујући $x = f(a)$ у $(*)$, добијамо $a =$

$-f(a) - f(f(a)) = -f(f(f(a))) = -f(0)$. Опет из $(*)$, за $x = 0$, добијамо $f(0) = f(f(0))$, а за $x = f(0)$: $f(0) + f(f(0)) = f(f(f(0))) = f(f(0))$, па је $f(0) = 0$, тј. $a = 0$.
Покажимо још да је 0 решење дате једначине: $f(f(0)) = f(0) = 0$.
2: Из функционалне једначине непосредно следи да је f инјективно пресликавање. Стављањем $x = 0$ добијамо да је $f(0) = f(f(0))$ што због инјективности даје $f(0) = 0$. Опет, због инјективности, имамо да је 0 једино решење једначине $f(x) = 0$ а тиме и $f(f(x)) = 0$.

5. 1: Нека је D број Дејанових година. Из услова задатка имамо $y(x(D - x) - y) = D \Rightarrow D = \frac{x^2y+y^2}{xy-1} = x + \frac{y^2+x}{xy-1}$. Нека је $z = \frac{y^2+x}{xy-1} \in \mathbb{N}$. Следи $xyz = x + y^2 + z$ при чему је $D = x + z$. Даље имамо $x + z = y(xz - y) \geqslant 1(xz - 1) \Rightarrow (x - 1)(z - 1) \leqslant 2$. Претпоставимо даље без ограничења општости $x \leqslant z$. Сад разматрамо следеће случајеве.

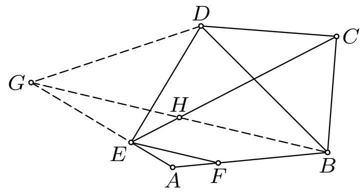
- $x = 1 \Rightarrow \frac{y^2+1}{y-1} = y + 1 + \frac{2}{y-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \{2, 3\} \Rightarrow z = 5 \Rightarrow D = 6$.
- $x = z = 2 \Rightarrow y = 2,\ D = 4$.
- $x = 2,\ z = 3 \Rightarrow y \in \{1, 5\},\ D = 5$.

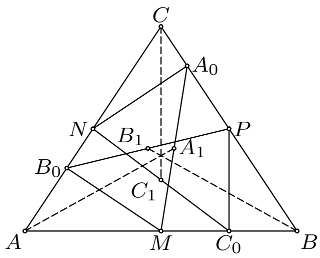
Следи да Дејан има 4, 5 или 6 година.

2: Као и у првом добијамо $xyz = x + y^2 + z$. Решавајући квадратну једначину по y добијамо $y = \frac{xz\pm\sqrt{(xz)^2-4(x+z)}}{2}$. Приметимо да дискриминанта мора да буде квадрат природног броја и то исте парности као xz. Дакле $(xz)^2-4(x+z) \leqslant (xz-2)^2 \Rightarrow (x-1)(z-1) \leqslant 2$. Даље разматрамо случајеве као у првом решењу.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је G тачка таква да је $\triangle GED \cong \triangle BCD$. Тачке G, E и A су колинеарне и, због постављеног услова (пропорције), важи $EF \parallel GB$. Нека је H пресечна тачка дужи EC и GB. Троуглови $\triangle DGB$ и $\triangle DEC$ су слични (јер је $\sphericalangle GDB = \sphericalangle EDC$ и $DG : DE = DB : DC$), па је $\sphericalangle DGH = \sphericalangle DEH$ и четвороугао $EHDG$ је тетиван. Због тога је $\sphericalangle GDE = \sphericalangle GHE$. Међутим, $\sphericalangle GDE = \sphericalangle BDC$ (из $\triangle GED \cong \triangle BCD$) и $\sphericalangle GHE = \sphericalangle CEF$ (углови са паралелним крацима). На тај начин смо доказали да је $\sphericalangle CEF = \sphericalangle CDB$. Једнакост $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ се слично доказује.





2. Нека је $\{A_2\} = AA_1 \cap BC$, очито је A_2 унутрашња тачка дужи BC. Такође, нека је Q подножје нормале из M на BC, тако да је очито A_1 центар правоугаоника $MNPQ$. Даље је, $\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{\sin\sphericalangle BAA_2/\sin\sphericalangle BA_2A\cdot BA}{\sin\sphericalangle A_2AC/\sin\sphericalangle AA_2C\cdot CA} = \frac{\sin\sphericalangle MAA_1}{\sin\sphericalangle A_1AN}\cdot\frac{BA}{CA} = \frac{\sin\sphericalangle AMA_1\cdot MA_1/AA_1}{\sin\sphericalangle ANA_1\cdot A_1N/AA_1}\cdot\frac{BA}{CA} = \frac{\sin\sphericalangle AMP}{\sin\sphericalangle ANQ}\cdot\frac{BA}{CA} = \frac{\sin\sphericalangle MAP\cdot AP/MP}{\sin\sphericalangle QAN\cdot AQ/NQ}\cdot\frac{BA}{CA} = \frac{BA\cdot AP\cdot\sin\sphericalangle BAP}{CA\cdot AQ\cdot\sin\sphericalangle QAC} = \frac{P_{\triangle BAP}}{P_{\triangle QAC}} = \frac{BP}{QC}$ (уместо површина могли смо још једном применити синусну теорему). Даље рачунамо применом косинусне теореме: $BP = BC - PC = a - \frac{1}{2}AC\cos\sphericalangle C = a - \frac{b}{2}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{3a^2-b^2+c^2}{4a}$, $QC = \frac{3a^2+b^2-c^2}{4a}$. То значи да се услов Чевине теореме за конкурентност правих AA_1, BB_1 и CC_1: $\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_2}{C_2B} = 1$, може преписати као

$$(3a^2-b^2+c^2)(3b^2-c^2+a^2)(3c^2-a^2+b^2) = (3a^2+b^2-c^2)(3b^2+c^2-a^2)(3c^2+a^2-b^2).$$

Ова релација се елементарним алгебарским трансформацијама своди на $(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2) = 0$, а то је управо услов да је троугао $\triangle ABC$ једнакокрак.

3. Може се узети да је $n > 1$, јер је за $n = 1$ $d(1) = 1$ и тад је низ пун квадрата: 1,1,1,1,1...

Означимо са $d_0 = n$ и $d_i = d(d_{i-1})$. Овај низ строго опада док се не заустави на броју 2. Значи, $d_k = 2$ за неко k.

Ако је број n прост, имамо $d_1 = d_2 = \ldots = 2$, па у низу d_i нема квадрата. Претпоставимо да је n сложен. Ово повлачи да је $d_1 > 2$, па је $k \geqslant 2$. Испитајмо претходне чланове низа. Број d_{k-1} има тачно два делиоца по дефиницији, па мора бити прост (он је непаран јер је $d_{k-1} > 2$). Следи да d_{k-2} има непаран број делилаца. Међутим, знамо да су једини бројеви који имају непаран број делилаца потпуни квадрати.

Закључујемо да је d_{k-2} потпун квадрат.
Према томе, услове задатка испуњавају сви прости бројеви n.

4. Из $f(f(m)+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ заменом m и n добијамо
$$f(f(m)) - f(f(n)) = f(m) - f(n),$$
одакле следи да на скупу слика S важи $f(s_1) - f(s_2) = s_1 - s_2$, односно $f(s) = s + c$. Како $2 \in S$ и $f(2) = 4$, следи
$$\forall s \in S, \quad f(s) = s + 2. \qquad (1)$$
Одатле добијамо да је $f(2n) = 2n + 2$. Како је f 1-1, слике непарних бројева морају бити непарни бројеви. Нека је $2p+1$ најмањи непаран број у S. Из (1) имамо да за сваки непаран број $2s+1$ који није мањи од $2p+1$ важи $f(2s+1) = 2s+3$, па је $2p+1$ слика неког мањег непарног броја. Доказаћемо да је $2p+1 = 5$. Како је $2p+1$ најмањи непаран број у S, и f 1-1, онда $p-1$ бројева $3, 5, ..., 2p-1$ морају да се сликају у неке од $p+1$ бројева $1, 3, ..., 2p+1$. Одатле следи да је $2p+1 = 5$ и $f(3) = 5$ ($f(3) = 1$ је контрадикција са $1 \in S$ и (1)). Дакле једини кандидат за функцију која задовољава услове задатка је:
$$f(1) = 2, \quad f(n) = n + 2, \quad n > 1.$$
Лако са проверава да она заиста задовољава услове задатка.

5. 1: Уочимо да постоји укупно $\binom{6}{3} = 20$ троелементних подскупова од A. Даље, тих 20 скупова се могу поделити на 10 парова облика $\{B, A \setminus B\}$. По Дирихлеовом принципу, постоје i, j такви да је $A_i = A \setminus A_j$. Без губљења општости, нека су то A_1 и A_2.
Преосталих 9 скупова или имају двоелементни пресек са A_1, а једноелементни пресек са A_2, или обратно, двоелементни пресек са A_2, а једноелементни пресек са A_1. Дакле, по Дирихлеовом принципу, и без губљења општости, постоји 5 од преосталих 9 скупова који имају једноелементни пресек са A_2. Међу тих 5 скупова, постоје два скупа, A_k и A_l, чији је пресек са скупом A_2 исти једноелементан скуп, тј. $A_k \cap A_2 = \{a\}$ и $A_l \cap A_2 = \{a\}$. Тада је $|A_1 \cup A_k \cup A_l| = 4$, па су то тражени скупови.

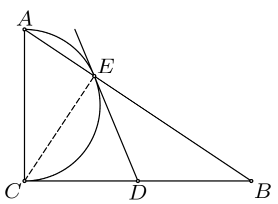
2: Постоји укупно $\binom{6}{3} = 20$ троелементних подскупова A и $\binom{6}{4} = 15$ четвороелементних подскупова A. Направимо граф чији су чворови свих тих 35 скупова, а два чвора су повезана граном акко је један од њих прави подскуп другог. Очигледно, могу да постоје гране само између троелементних и четвороелементних чворова. (Овакав граф

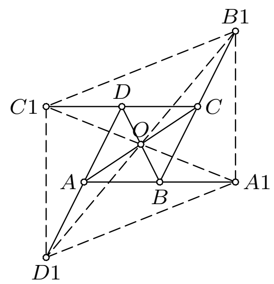
се назива *бипартитан*). За сваки троелементни чвор, постоје тачно 3 чвора са којима је повезан, а за сваки четвороелементни чвор постоји тачно 4 чвора са којима је повезан (укупан број грана је 60).
Даље, уочимо подграф овог графа који се добија тако што обришемо било којих 9 троелементних чворова и све гране које су у њих улазиле. Овај граф ће одговарати нашој фамилији скупова из поставке задатка. Преостало нам је 33 гране, а како свака грана повезује неки троелементни чвор и неки четвороелементни чвор, значи да је бар један од 15 четвороелементних чворова повезан са више од два троелементна чвора. То су тражени троелементни скупови.

Први разред – Б категорија

1. Из $\overline{abc} = \overline{bc} \cdot c$ следи $c \in \{1, 5, 6\}$ (из поставке је $c \neq 0$).
1° $c = 1$: $100a + 10b + 1 = 10b + 1$, што је немогуће због $a \neq 0$.
2° $c = 5$: $100a + 10b + 5 = 5(10b + 5)$, па је $5a = 2b + 1$, одакле је $a = 1$, $b = 2$ или $a = 3$, $b = 7$.
3° $c = 6$: $100a + 10b + 6 = 6(10b + 6)$, одакле је $10a = 5b + 3$, што је немогуће.
Дакле једина решења су $125 : 5 = 25$ и $375 : 5 = 75$.

2. Из правоуглог троугла $\triangle BCE$ добијамо $\sphericalangle DBE = 90^\circ - \sphericalangle BCE$ и $\sphericalangle BED = 90^\circ - \sphericalangle DEC$. Како су DC и DE тангенте из D на k, добијамо да је $DC = DE$, тј. троугао $\triangle DCE$ је једнакокраки, па важи $\sphericalangle DEC = \sphericalangle BCE$ и одатле $\sphericalangle DBE = \sphericalangle BED$.





3. а) AA_1CC_1 је паралелограм, па се дијагонале AC и A_1C_1 полове. Њихово средиште – тачка O је истовремено и средиште дијагонале BD и, аналогно, средиште и дијагонале B_1D_1 паралелограма BB_1DD_1.

Дакле дијагонале A_1C_1 и B_1D_1 се полове, па је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ паралелограм.

б) Како троуглови $\triangle ABD_1$, $\triangle BA_1D_1$, $\triangle BA_1C$, $\triangle A_1CB_1$, $\triangle DCB_1$, $\triangle C_1DB_1$, $\triangle C_1DA$ и $\triangle C_1AD_1$ имају исте површине – по $\frac{1}{2}\cdot 2004cm^2$, добијамо да је укупна површина паралелограма $A_1B_1C_1D_1$ једнака $5\cdot 2004 = 10020cm^2$.

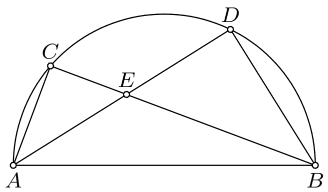
4. Како је $P(-2) = -4 + 4a + b = 0$ и остатак при дељењу $P(x)$ са $x+3$ једнак $-21+9a+b = -12$, добијамо систем $4a+b = 4$ и $9a+b = 9$. Његова решења су $a = 1$ и $b = 0$, па је тражени полином $P(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$.

5. Видети решење 5. задатка за први разред А категорије.

Други разред – Б категорија

1. Треба да буде $x^3-9x^2-x+9 = 0$ и $x^3+3x^2-x-3 = 0$, тј. $(x^2-1)(x-9) = 0$ и $(x^2-1)(x+3) = 0$, одакле је $x^2 - 1 = 0$, тј. $x_{1,2} = \pm 1$.

2. Користимо да су троуглови $\triangle BCE$ и $\triangle BCE$ правоугли, као и потенцију тачке E у односу на круг k: $AE\cdot ED = BE\cdot ED$. Стога имамо да је $AE\cdot AD = AE^2+AE\cdot ED = AC^2+EC^2+AE\cdot ED = AC^2+EC^2+BE\cdot EC = AC^2 + EC(EC + BE) = AC^2 + EC\cdot BC = AC^2 + (BC - BE)\cdot BC = AC^2 + BC^2 - BE\cdot BC$, па је $AE\cdot AD + BE\cdot BC = AB^2$.



3. Због дефинисаности корена важи $x \geqslant y^2+1$, па је $x+y^2+\sqrt{x-y^2-1} \geqslant 2y^2 + 1 + \sqrt{x-y^2-1} \geqslant 1$. Дакле дата неједнакост важи само ако је $x + y^2 + \sqrt{x-y^2-1} = 1$, где је $x = y^2 + 1$, а то је испуњено за $x = 1$, $y = 0$.

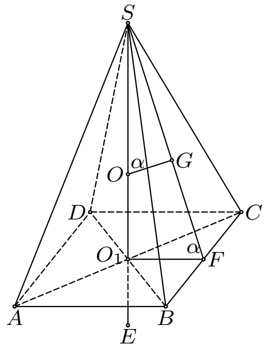
4. Видети решење 4. задатка за други разред А категорије.

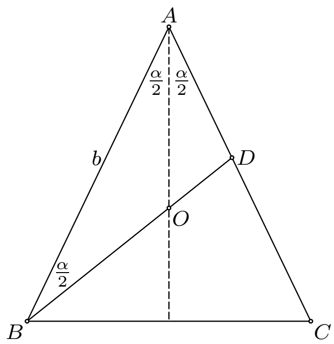
5. Из $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, тј. $\left(\dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^m = 1$, односно $i^m = 1$ добија се $m = 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Трећи разред – Б категорија

1. Ови бројеви су једнаки јер је $\log 2^{\sqrt{\log_2 2004}} = \sqrt{\log_2 2004} \cdot \log 2 = \dfrac{\sqrt{\log 2004}}{\sqrt{\log 2}} \cdot \log 2 = \sqrt{\log 2004 \cdot \log 2}$ и $\log 2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}} = \sqrt{\log_{2004} 2} \cdot \log 2004 = \dfrac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\log 2004}} \cdot \log 2004 = \sqrt{\log 2 \cdot \log 2004}$.

2. Из $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ налазимо $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$. Ако је SE пречник лопте, из правоуглог троугла $\triangle SBE$ налазимо $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = H(2r - H)$, а из троугла $\triangle FO_1S$ (који је сличан са $\triangle OGS$, па је $\sphericalangle O_1FS = \sphericalangle GOS = \alpha$) имамо $\dfrac{a}{2} = H \operatorname{ctg} \alpha$, па је $H = \dfrac{2r}{2\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$, односно $H = \dfrac{1}{1 + 2\operatorname{ctg}^2 \alpha} \left(\dfrac{6V}{\pi}\right)^{1/3}$.





3. Како је $\sphericalangle ADB = 180^\circ - \frac{3\alpha}{2}$ (због $BO = AO$), применом синусне теореме у троуглу $\triangle ABD$ налазимо $\dfrac{BD}{\sin \alpha} = \dfrac{AB}{\sin(180^\circ - \frac{3\alpha}{2})}$, тј. $BD = \dfrac{b \sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$.

4. Дата неједнакост је еквивалентна неједнакости $\cos^4\alpha\cos^2\beta+\sin^4\alpha\sin^2\beta \geqslant \sin^2\beta\cos^2\beta$, тј. $\cos^4\alpha\cos^2\beta + (1-\cos^2\alpha)^2(1-\cos^2\beta) \geqslant (1-\cos^2\beta)\cos^2\beta$, односно $(\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1)^2 \geqslant 0$. Једнакост важи ако и само ако је $\cos^2\alpha = \sin^2\beta$ $(\beta \neq \frac{k\pi}{2})$, тј. $\alpha = \pm\beta + \dfrac{2n+1}{2}\pi$, $\beta \neq \frac{k\pi}{2}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

5. Добија се $\Delta = (a+3)(2-a)$, $\Delta_x = (a+3)(2-a)$, $\Delta_y = 2-a$ и $\Delta_z = 2-a$, па за
1° $a \neq 2, a \neq -3$ систем има решење $(x,y,z) = (1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3})$;
2° $a = -3$ систем нема решења;
3° $a = 2$ систем је еквивалентан систему $x+y-z=1$, $2x+3y+2z=3$, чија су решења $(x,y,z) = (5t, 1-4t, t)$.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека је x_0 цео корен дате једначине. Како из једначине имамо $q = {x_0}^3(p-x_0)$, да би q био прост број мора да буде $x_0 = 1$ или $x_0 = -1$.
1° $x_0 = 1$: тада је $q = p-1$, тј. прости бројеви p и q су различите парности, па је $p = 3$ и $q = 2$.
2° $x_0 = -1$: тада је $q = -p-1$, што је немогуће. Дакле, $p = 3$, $q = 2$.

2. Ако у релацији $\cos n(x+3\pi)\cdot\sin\dfrac{5}{n}(x+3\pi) = \cos nx\cdot\sin\dfrac{5}{n}x$ заменимо $x = 0$, добијамо $\sin\dfrac{15\pi}{n} = 0$, одакле је $n \in \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm15\}$. Непосредном провером се закључује да за све ове вредности функција f има период 3π.

3. Сабирањем свих ових једначина добија се $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2 = 1+3+\ldots+2n-1 = n^2$, па је $x_1+x_2+\ldots+x_n = \pm n$. Стога имамо два решења: $(\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \frac{5}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n})$ и $(-\frac{1}{n}, -\frac{3}{n}, -\frac{5}{n}, \ldots, -\frac{2n-1}{n})$.

4. Треба да буде $f'(x) = 2^x\ln 2\big(2^{2x} + a\cdot 2^x + (1-a)\big) > 0$. Нека је $2^x = t$. Неједнакост $(*)$ $t^2 + at + 1 - a > 0$ треба да важи за све $t > 0$. Ако је дискриминанта $D = a^2 - 4(1-a)$ негативна, тј. за $-2(1+\sqrt{2}) < a < 2(\sqrt{2}-1)$ неједнакост важи за све $t \in \mathbb{R}$.

Нека је $D \geqslant 0$. $(*)$ важи за све $t > 0$ ако су ова корена одговарајуће једначине $t_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 4} \leqslant 0$. Ово важи за $2(\sqrt{2} - 1) \leqslant a \leqslant 1$. Дакле, функција је растућа за све вредности x ако и само ако важи $-2(1 + \sqrt{2}) \leqslant a \leqslant 1$.

5. Дата неједнакост је еквивалентна неједнакости $(n+1)^n > n!$, која је последица очигледних неједнакости: $n + 1 > 1$, $n + 1 > 2$, $n + 1 > 3$, $\ldots$, $n + 1 > n$.

САДРЖАЈ