РЕПУБЛИКА СРБИЈА
ПРВА КРАГУЈЕВАЧКА ГИМНАЗИЈА

41.
САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

БИЛТЕН

КРАГУЈЕВАЦ, 21.4.-22.4.2001.

ПОКРОВИТЕЉ ТАКМИЧЕЊА
СКУПШТИНА ГРАДА КРАГУЈЕВЦА

ДОМАЋИН ТАКМИЧЕЊА
ПРВА КРАГУЈЕВАЧКА ГИМНАЗИЈА

ОРГАНИЗАТОРИ
ПРВА КРАГУЈЕВАЧКА ГИМНАЗИЈА
ПМФ КРАГУЈЕВАЦ
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ-подружница Крагујевац

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР
- Проф. др **Драгић Банковић**
  декан ПМФ-а у Крагујевцу
- **Добрило Гачевић**,професор
  директор Прве крагујевачке гимназије
- **Слађана Радисављевић**,професор
  члан Извршног одбора Скупштине града Крагујевца
- Доц. др **Бранислав Поповић**
  председник подружнице Друштва математичара Србије
- **Мирослав Петронијевић**,професор
  помоћник директора Прве крагујевачке гимназије

РЕДАКЦИЈА
- Др **Раде Дорословачки**
- **Драгољуб Костић,** професор
- **Љиљана Стојановић,** професор
- **Љиљана Јелесијевић,** професор
- Мр **Небојша Икодиновић,** асистент ПМФ

УРЕДНИЦИ
- **Добрило Гачевић,** професор
- Доц. др **Бранислав Поповић**

КОМИСИЈЕ ЗА САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ

САВЕЗНА КОМИСИЈА

1. Др Радослав Димитријевић, ПМФ Ниш
2. Др Раде Дорословачки, ФТН Нови Сад
3. Ђорђе Кртинић, МФ Београд
4. Др Павле Младеновић, МФ Београд, председник комисије
5. Мр Милена Радновић, Математички институт САНУ
6. Др Ратко Тошић, ПМФ Нови Сад
7. Мирослав Тремл, ПМФ Бањалука
8. Мр Шуковић Горан, ПМФ Подгорица

ТАКМИЧАРСКА КОМИСИЈА

1. Др Радослав Димитријевић, ПМФ Ниш
2. Др Раде Дорословачки, ФТН Нови Сад
3. Ђорђе Кртинић, МФ Београд
4. Др Павле Младеновић, МФ Београд, председник комисије
5. Мр Милена Радновић, Математички институт САНУ
6. Др Ратко Тошић, ПМФ Нови Сад
7. Мирослав Тремл, ПМФ Бањалука
8. Мр Шуковић Горан, ПМФ Подгорица
9. Др Ђорђе Дугошија, МФ Београд
10. Мр Небојша Икодиновић, ПМФ Крагујевац
11. Др Зоран Каделбург, МФ Београд
12. Ђорђе Милићевић, МФ Београд
13. Мр Срђан Огњановић, Математичка гимназија

КРАГУЈЕВАЦ

Насеље Крагујевац настаје највероватније у првој половини 15. века. Његов први помен (село, трг Крагујевца) налази се у једној турској катастарској књизи - тапудефтеру из 1476. године. Крагујевац је у то време средиште нахије. За време аустријске владавине (1718-1739) Крагујевац је средиште аустријског дистрихта.

Значај Крагујевца нагло расте од 1818. године када га је кнез Милош Обреновић учинио престоницом нове српске државе. Он ће остати престоница све до 1841. године. У том времену у Крагујевцу су положене основе српске државности, просвете и културе. Такође, Крагујевац је седиште Државног савета и Општенародног суда. У Крагујевцу је 1833. године основана Гимназија, а 1834. године из Београда је у Крагујевац пренета штампарија ("Новине србске"). У Крагујевцу је 1835. године основан Књажевско-србски театар, а 1838. године прва виша школа, Лицеј и библиотека. Развојем војне индустрије (Тополивница, 1851), Крагујевац постаје први индустријски град у Србији, привредно средиште Србије и важно културнопросветно средиште у коме Светозар Марковић развија живу политичку и публицистичку активност (лист "Јавност"). У Крагујевцу се 1870. године отвара прва учитељска школа у Србији.

У почетку Првог светског рата, Крагујевац је седиште врховне команде, која је 1914. године руководила српском војском.

Од 19. - 21. октобра 1941. године немачки фашисти су починили у Крагујевцу један од најтежих масовних злочина на тлу Југославије у Другом светском рату. Стрељано је преко 7000 грађана, међу којима 300 ученика и преко 40 просветних радника.

Крагујевац је данас средиште Шумадијског округа коме припада 7 општина са преко 200 000 становника и представља политички, привредни, културно-просветни и здравствени центар овог дела Србије. Један је од шест високошколских центара у Србији. Захваљујући богатству природно -географских ресурса, развијености привредног капацитета, саобраћајне и комуналне структуре као град младих и студената, Крагујевац је окренут ка будућности и просперитету.

ДОМАЋИН ТАКМИЧЕЊА
ПРВА КРАГУЈЕВАЧКА ГИМНАЗИЈА

Прва крагујевачка гимназија је најстарија гимназија у Србији. Основана је 1833. год. Када је прва генерација ученика завршила гимназију основан је Лицеј као виша школа, да би гимназијалци могли да наставе шклoвање. Касније се оснива висока школа из које настаје Београдски универзитет. Дакле, Прва крагујевачка гимназија представља клицу образовног система у Србији. У овој школи је у току њене дуге традиције стицао знање велики број познатих људи у науци и уметности. Велики број политичара, државника и војсковођа су били ђаци или професори Прве крагујевачке гимназије. Утоку свог постојања школа је делила судбину народа Србије. Велики број ђака и професора стрељано је 21. октобра 1941. године. Стрељање је извршила Немачка окупациона војска. Тај дан се сваке године обележава манифестацијом "Велики школски час" у Шумарицама код споменика стрељаним ђацима. Том догађају је посвећен велики број песама, поема,прозних дела, сећања,а најпознатија је песма "Крвава бајка" чији је аутор Десанка Максимовић. 21. октобар је Дан школе Прве крагујевачке гимназије.

Од 1887. године школа је смештена у зграду у којој се и сада налази. Пројекат је урађен у Бечу, а изградња је трајала од 1884. до 1888.год. Столарија је још увек из тог периода, а изграђена је у једној бечкој столарској радионици. Зграда је под заштитом државе као културно историјски споменик.

Школа сада има око 1480 ученика и око 100 професора. Највише ученика је природно-математичког смера, затим друштвено-језичког смера и мањи број талентованиих ученика за математику, који уче по програму Математичке гимназије у Београду. Од живих страних језика у школи је организована настава из енглеског, француског, немачког и руског језика.

Уколико бисмо успели да покријемо финансијске трошкове, радо би сарађивали са гимназијама у којима се настава изводи на неком од наведених језика.

Наши ученици учествују на такмичењима у знању из свих наставних предмета и ту постижу веома добре резултате. Велики број ученика осваја награде на републичком и савезном нивоу, а неки су учествовали у екипама које су представљале нашу земљу на интернационалним такмичењима.

Већина наших ђака су успешни студенти на домаћим факултетима, а неки и на страним где студирају захваљујући стипендијама које су добили.

Планови ове гимназије су да сталним подизањем стручних квалитета професора и њихове мотивације унапреди квалитет наставе и својим ђацима омогући образовно - васпитни процес на високом нивоу. Циљ нам је да сарађујући са другим гимназијама у земљи и иностранству, размењујући искуства доведемо васпитно образовни процес до оптималног нивоа у коме би ученици могли да реализују своје могућности и да се мотивишу за даље школовање.

Поносећи се својом традицијом, обавеза ове школе је да углед који је стицала преко генерација својих ђака и професора, чува и подиже, школујући будуће интелектуалце.

У школској 2001/2002. години у први разред уписаћемо 180 ученика природно-математичког смера, 90 ученика друштвено-језичког смера и 20 ученика у одељење талентованих ученика за математику.

У мају и јуну организујемо бесплатне припреме за полагање пријемног испита, за ученике који конкуришу за одељење талентованих ученика за математику.

Природно-математички факултет

Оснивање и развој

На основу усвојеног Плана развоја високог школства у Србији и Плана развоја високог школства у Крагујевцу, Природно-математички факултет Универзитета у Београду донео је 16. октобра 1972. године Одлуку о оснивању Одељења у Крагујевцу.

Одељење у Крагујевцу Природно-математичког факултета у Београду је почело са радом 23. октобра школске 1972 / 73. године. При одељењу у Крагујевцу су почеле да раде три студијске групе - Група за математику, Група за физику и Група за биологију, а наредне 1973 / 74. школске године почела је да ради и студијска Група за хемију - све општих смерова.

Марта 1976. године радни људи Одељења у Крагујевцу Природно-математичког факултета у Београду су покренули поступак за издвајање из Природно-математичког факултета у Београду и осамостаљење у посебан Природно-математички факултет у Крагујевцу. Природно-математички факултет у Београду је дао сагласност за издвајање и осамостаљење Одељења. Пошто су били испуњени сви услови за формирање самосталног Факултета, Скупштина СР Србије је дала сагласност за осамостаљење Одељења у Крагујевцу и донела Одлуку о оснивању самосталног Природно-математичког факултета у Крагујевцу. Исте године, Факултет је постао члан Универзитета у Крагујевцу.

Последњих година формиране су нове организационе јединице, као што су Ботаничка башта, мултидисциплинарн Центар за заштиту животне средине и Центар за перманентно образовање. Организоване су и нове студије из Екологије и Информатике.

На факултету су поред основних студија организоване специјалистичке, магистарске и докторске студије на свим Институтима. До данас је на Природно-математичком факултету дипломирало 1232 студента, а тренутно студира око 1200 студената. На Факултету је одбрањено 40 специјалистичких радова, преко 40 магистарских теза и око 50 докторских дисертација.

Природно-математички факултет данас представља највећу савремено опремљену образовно-научну установу у централној Србији која са успехом образује стручњаке из области природних наука, математике и информатике. Факултет је својим резултатима и радом дао велики допринос развоју не само региона Шумадије и Поморавља, већ Србије у целини. Велики кадровски потенцијал (60 доктора наука и 40 магистара), савремено опремљене лабораторије и учионице представљају основу за будући успешан рад Факултета.

СПИСАК УЧЕСНИКА САВЕЗНОГ ТАКМИЧЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

Екипа Републике Србије

1.	Пејчев Александар	Мат. гимназија	Београд
2.	Радовановић Марко	Мат. гимназија	Београд
3.	Новаковић Милан	Мат. гимназија	Београд
4.	Витомир Жарко	Мат. гимназија	Београд
5.	Шиник Јована	Мат. гимназија	Београд
6.	Новаковић Марко	Мат. гимназија	Београд
7.	Тарабић Радомир	Мат. гимназија	Београд
8.	Кроковић Дејан	Мат. гимназија	Београд
9.	Јовановска Ана	Мат. гимназија	Београд
10.	Алтман Ирида	Мат. гимназија	Београд
11.	Марковић Александар	Мат. гимназија	Београд
12.	Цветковић Милан	Гимназија	Крушевац
13.	Петровић Александар	Г. Ст.Вељковић-Зеле	Лесковац
14.	Живановић Дарко	Гимназија В. Караџић	Лозница
15.	Поробић Даница	Гимназија Ј.Ј. Змај	Нови Сад

Екипа Републике Српске

1.	Туран Белма	Гимназија	Бањалука
2.	Топаловић Борко	СШЦ	Бањалука
3.	Млађеновић Александар		Србиње
4.	Станковић Станислава	СШЦ	Србиње

Екипа Републике Црне Горе

1.	Јанковић Жана	Мат. гимназија	Подгорица
2.	Брајовић Даница	Мат. гимназија	Подгорица

ДРУГИ РАЗРЕД

Екипа Републике Србије

1.	Милановић Јелена	Математичка гимназија	Београд
2.	Бранковић Александар	Математичка гимназија	Београд
3.	Милинковић Кристина	Математичка гимназија	Београд
4.	Зељковић Илија	Математичка гимназија	Београд
5.	Пенева Марина	Математичка гимназија	Београд
6.	Милетић Миња	Математичка гимназија	Београд
7.	Перић Зоран	Математичка гимназија	Београд
8	Вранић Марија	Математичка гимназија	Београд
9	Савић Маријана	Математичка гимназија	Београд
10	Маринковић Марина	Математичка гимназија	Београд
11.	Јовићевић Јелена	Математичка гимназија	Београд
12.	Радоњић Милош	Прва крагујевачка гимназија	Краг.
13.	Вујић Никола	Прва крагујевачка гимназија	Краг.
14.	Илић Александар	Гимназија С. Марковић	Ниш
15.	Обреновић Никола	Гимназија J.J. Змај	Нови Сад
16.	Крстић Лазар	Гимназија Б. Станковић	Ниш

Екипа Републике Црне Горе

1.	Огњановић Ивана	Математичка гимназија	Подгорица
2.	Јанковић Јелена	Математичка гимназија	Подгорица

Екипа Републике Српске

1.	Јанковић Миланка	Гимназија	Добој

Трећи разред

Екипа Републике Србије

1.	Кнежевић Вељко	Гим.М.Добрашиновић	Бијело Поље
2.	Лукић Миливоје	Математичка гимназија	Београд
3.	Јоргвановић Милош	Математичка гимназија	Београд
4.	Стојковић Душан	Математичка гимназија	Београд
5.	Костић Тијана	Математичка гимназија	Београд
6.	Пенев Ирина	Математичка гимназија	Београд
7.	Радоњић Милан	Прва краг. гимназија	Крагујевац
8.	Николић Александар	Г. Ст.Вељковић-Зеле	Лесковац
9.	Тодоровић Никола	Гимназија С. Марковић	Ниш
10.	Петковић Марко	Гимназија С. Марковић	Ниш
11.	Кулунџија Дејан	Гимназија С. Марковић	Ниш
12.	Ракић Драган	Гимназија С. Марковић	Ниш
13.	Булајић Владан	Гимназија С. Марковић	Ниш
14.	Морача Ненад	Гимназија Ј.Ј. Змај	Нови Сад
15.	Петров Татјана	Гимназија	Зрењанин

Екипа Републике Српске

1.	Косић Дино	Гимназија	Бањалука

Четврти разред

Екипа Републике Срби је

1.	Поповић Милош	Математичка гимназија	Београд
2.	Месарош Карола	Математичка гимназија	Београд
3.	Симчевић Татјана	Математичка гимназија	Београд
4.	Лазић Владимир	Математичка гимназија	Београд
5.	Радић Томислав	Математичка гимназија	Београд
6.	Суботић Александар	Математичка гимназија	Београд
7.	Суботић Владимир	Математичка гимназија	Београд
8.	Кирићански Милан	Математичка гимназија	Београд
9.	Вацић Александар	Гимназија	Пирот
10.	Ђурчић Александар	Гимназија	Пожаревац

Екипа Републике Црна Гора

1.	Марковић Марјан	Математичка гимназија	Подгорица

Екипа Републике Српске

1.	Дладичић Владимир	СШЦ	Србиње
2.	Авдаловић Мирослав	СШЦ	Србиње

41. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 21.04.2001.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ конвексни четвороуглови у равни, такви да је $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ и $DA = D_1A_1$. Ако су дијагонале AC и BD нормалне, доказати да су нормалне и дијагонале A_1C_1 и B_1D_1.

2. Дато је 5 дужи, тако да су сваке три странице једног троугла. Доказати да међу њима постоје три дужи које су странице оштроуглог троугла.

3. Нека су $p_1, p_2, \dots, p_n$, где је $n \geqslant 3$, првих n простих бројева. Доказати да је

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} < \frac{1}{2}.$$

4. На гомили се налази n жетона. Два играча играју игру у којој наизменично повлаче потезе. У сваком потезу играч узима 5, 7 или 11 жетона са гомиле. Губи играч који не може да повуче потез. Који играч, први или други, има победничку стратегију ако је
(а) $n = 2001$; (б) $n = 5000$?

41. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 21.04.2001.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека је $S = \{x^2 + 2y^2 : x, y \in Z\}$, где је Z скуп целих бројева. Ако је a број за који важи $3a \in S$, доказати да је $a \in S$.

2. Темена квадрата $ABCD$ странице $\frac{25}{4}$ припадају сфери. Међусобно паралелне праве које садрже тачке A, B, C, D секу сферу још у тачкама A_1, B_1, C_1, D_1, респективно. Ако је $AA_1 = 2$, $BB_1 = 10$, $CC_1 = 6$, одредити дужину дужи DD_1.

3. Одредити све природне бројеве n за које постоји бојење свих тачака простора тако да важи сваки од следећих услова:
(а) Свака тачка је обојена тачно једном бојом.
(б) Употребљено је n боја.
(в) Свака права обојена је са највише две боје.

4. Нека је S скуп свих n-торки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реалних бројева, таквих да је најмањи од бројева

$$x_1, \quad \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \ldots, \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

једнак 0, а највећи од њих једнак 1. Одредити:

$$\max_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S} \left(\max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (x_i - x_j) \right)$$

и

$$\min_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S} \left(\max_{1 \leqslant i, j \leqslant n} (x_i - x_j) \right)$$

41. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 21.04.2001.

ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Наћи сва решења једначине $x^y + y = y^x + x$ у скупу природних бројева.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2001}$ позитивни бројеви такви да је

$$x_i^2 \geqslant x_1^2 + \frac{x_2^2}{2^3} + \frac{x_3^2}{3^3} + \cdots + \frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3}, \quad 2 \leqslant i \leqslant 2001.$$

Доказати да је

$$\sum_{i=2}^{2001} \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}} > 1.999.$$

3. Нека је k природан број и N_k број низова дужине 2001 чији су сви чланови елементи скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 2k+1\}$, а непаран број чланова сваког низа једнак је 0. Одредити највећи степен двојке који дели N_k.

4. Паралелограм $ABCD$ је основа пирамиде $SABCD$. Равни троуглова ASC и BSD су међусобно нормалне. Наћи површину стране ASD, ако су површине страна ASB, BSC и CSD редом једнаке x, y и z.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека је

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b},\overrightarrow{CD}=\vec{c},\overrightarrow{DA}=\vec{d},\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}_1,\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}_1,\overrightarrow{C_1D_1}=\vec{c}_1,\overrightarrow{D_1A_1}=\vec{d}_1.$$

Тада је

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{a}_1+\vec{b}_1+\vec{c}_1+\vec{d}_1=0$$

па је

$$d^2=(-\vec{d})^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=a^2+b^2+c^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}=$$
$$=a^2-b^2+c^2+2(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})\Rightarrow\overrightarrow{AC}*\overrightarrow{BD}=(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}+\vec{c})=$$
$$=\frac{1}{2}(d^2+b^2-a^2-c^2).$$

Како је аналогно и

$$\overrightarrow{A_1C_1}*\overrightarrow{B_1D_1}=\left(\vec{a}_1+\vec{b}_1\right)*\left(\vec{b}_1+\vec{c}_1\right)=\frac{1}{2}\left(d_1^2+b_1^2-a_1^2-c_1^2\right),$$

то је

$$\overrightarrow{AC}*\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A_1C_1}*\overrightarrow{B_1D_1}$$

због услова задатка. Како је $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ тј. $\overrightarrow{AC}*\overrightarrow{BD}=0$, то је и $\overrightarrow{A_1C_1}*\overrightarrow{B_1D_1}=0$ тј. $A_1C_1\perp B_1D_1$.

2.Нека за дате дужи

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

важи

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$$

што очито не утиче на општост. Познат је став да за странице

$$a \ge b \ge c$$

неоштроуглог троугла важи

$$a^2 \ge b^2 + c^2$$

Да постоји оштроугли троугао чије страницње су из скупа

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

доказаћемо контрадикцију. Претпоставимо да такав оштроугли троугао не постоји. Тада на основу поменутог става и претпоставке следи

$$a_5^2 \ge a_4^2 + a_3^2 \ge 2a_3^2 + a_2^2 \ge 3a_2^2 + 2a_1^2 = a_1^2 + 2a_2^2 + a_1^2 + a_1^2 \ge$$
$$a_2^2 + 2a_2a_1 + a_1^2 + a_1^2 = (a_1 + a_2)^2 + a_1^2 > (a_1 + a_2)^2 \Rightarrow a_5 > a_1 + a_2$$

контрадикција.

3. Како је $p_1=2$ и $p_k \ge 2k-1$, то важи:

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n} \le \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} < \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{5^2-1} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2-1} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-2) \cdot 2n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{(2n-2)} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4n} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}\right)$$

Израз у загради је позитиван јер је $2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\geq 2\cdot 3\cdot(2n-1)=12n-6>4n$

$$\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\ldots+\frac{1}{p_n^2}+\frac{1}{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n}\prec\frac{1}{2}$$

($8n>6\Rightarrow n>6/8$, што је тачно), па важи:
што је и требало доказати.

4. Очигледно је да играч који је на потезу губи ако је број жетона на гомили једнак 0,1,2,3 или 4. Такође се лако проверава да играч који је на потезу добија , ако на гомили има 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 или 15 жетона, јер у овим случајевима увек може да одигра потез тако да на гомили остане 0, 1, 2, 3, или 4 жетона.

- Нека се на гомили налази $16*l+k$ жетона где је $l\in N$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$.

После одиграног потеза (било ког могућег) на гомили остаје известан број жетона , тако да је остатак при дељењу тог броја са 16 у скупу $\{5, 6, \ldots, 15\}$.

- Нека се на гомили налази $16*l+k$ жетона , где је $l\in N$, $k\in\{5,..,15\}$

Тада играч који је на потезу може одиграти потез (узети 5, 7 или 11 жетона), тако да број преосталих жетона при дељењу са 16 даје остатак 0,1, 2, 3 или 4.

Из предходне анализе следи: ако је $n=16*l+k$, $l>=0$, $k\in\{5,..,15\}$ онда први играч има победничку стратегију.

Ако је $n=16*l+k$, $l>=0$, $k\in\{0,1,2,3,4\}$ онда други играч има победничку стратегију.

(а) 2001=125*16+1 - други има победничку стратегију
(б) 5000=312*16+8 - први има победничку стратегију

II

1.Нека је

$$3a = x^2 + 2y^2.$$

Тада је

$$a = \frac{3a}{3} = \frac{x^2 + 2y^2}{3} = \left(\frac{x+2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x-2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x+y}{3}\right)^2.$$

Уколико $3 | x$, тада $3 | y$, па су бројеви

$$\frac{x+2y}{3} \wedge \frac{x-y}{3}$$

цели, тј. $a \in S$. Ако $3 \nmid x$, тада $3 \nmid y$, па су могуће следеће могућности:

(1) $x \equiv y \pmod 3$: Тада су бројеви

$$\frac{x+2y}{3} \wedge \frac{x-y}{3}$$

цели, тј. $a \in S$.

(2)$x \not\equiv y \pmod 3$: Тада су бројеви

$$\frac{x-2y}{3} \wedge \frac{x+y}{3}$$

цели, тј. $a \in S$.

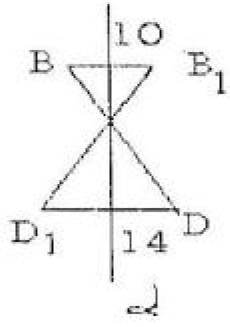
2. α - раван која садржи центар сфере, $\alpha \perp AA_1 \Rightarrow \alpha$ полови BB_1, CC_1, $DD_1 \Rightarrow A_1B_1C_1D_1$ квадрат симетричан квадрату $ABCD$ у односу на раван α. Нека је $DD_1=2x$, x - растојање до равни α. l- права нормална на раван α, пројекција свих тачака на l. Нека је $\pi(B)=5$, тада $\pi(B_1)=-5$, $\pi(A)=-\pi(A_1)=\pm1$, $\pi(R)=-\pi(R_1)=\pm3$, $\pi(D)=-\pi(D_1)=\pm x$. Центар квадрата S: $\pi(S)=1/2(\pi(A)+\pi(C))=1/2(\pi(B)+\pi(D)) \Rightarrow$

$$\frac{\pm1\pm3}{2} = \frac{5\pm\pi(D)}{2} \Rightarrow$$

	π(A)	π(B)	π(C)	π(D)
1.	1	5	3	-1
2.	-1	5	-3	-7
3.	1	5	-3	-9
4.	-1	5	+3	-3

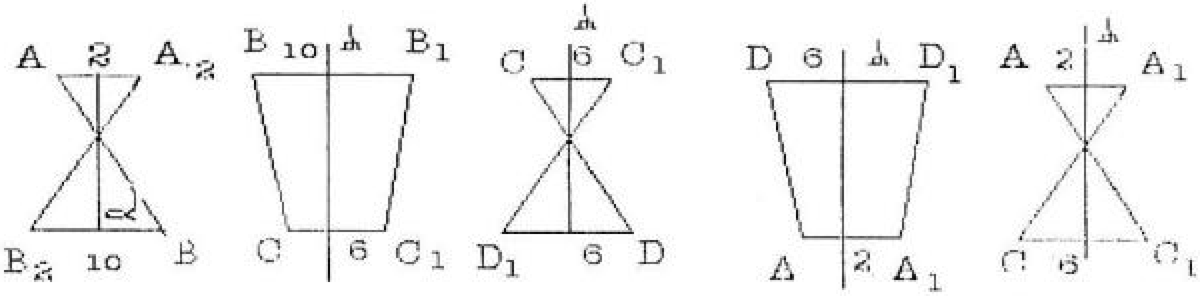
случајеви 2, 3, 4 су немогући $BD+B_1D_1=25/4+25/4=25/2<DD_1=14$, што није могуће

Случај 2:



Случај 3: Исто као 2, само је $DD_2=18$

Случај 4:



$M_1N_1P_1Q$ - средине дужи AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 $\Rightarrow$ MNPQ паралелограм у равни α (пројекција квадрата ABCD на равни α).

$$MN = PQ = \sqrt{(\frac{25}{4})^2 - 6^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad NP = MQ = \sqrt{(\frac{25}{4})^2 - 2^2} = \frac{\sqrt{561}}{4}$$

$$MP = \sqrt{(\frac{25\sqrt{2}}{4})^2 - 4^2} = \frac{\sqrt{986}}{4}$$

међутим, MP>MN+NP па не важи правило троугла. Остаје само случај 1. Тада је $DD_1=2|\pi(D)|=2$

3.Уочимо раван α, праву а која припада α и тачку А која припада а. Ако тачку А обојимо првом бојом, све тачке праве а сем А другом бојом, све тачке равни α сем тачака праве а трећом бојом, а све остале тачке простора четвртом бојом, добијамо тражено бојење за n=4. Значи да тражено бојење постоји за $n\in\{1,2,3,4\}$.
Докажимо да такво бојење не постоји за n=5 (а тиме наравно и за $n\geq5$). Прво ћемо показати да постоје 4 разнобојне компланарне тачке. Ако не постоје, уочимо 5 разнобојних тачака простора, тако да никоје 4 нису компланарне. Уочимо раван која није паралелна ни са једном правам која садржи по 2 од уочених тачака. По претпоставци, у тој равни нема две боје(нпр. 4. и 5.). Међутим, на правој која спаја тачке обојене тим бојама не смемо имати другу боју, па долазимо до контрадикције. Сада, уочимо 4 тачке једне равни обојене различитим бојама. Барем 2 праве одређене паровима тих тачака се секу. Нека су то праве које спајају тачке обојене 1. и 2.,односно 3. и 4. бојом. Због припадања првој прави, пресечна тачка мора бити обојена 1. или 2. бојом, а због припадања другој прави 3. или 4. бојом. Долазимо до контрадикције. Овим је задатак решен.

4.Из услова задатка добијамо: $(\forall k\in\{2,..,n\})$

$0\leq x_1+..+x_k\leq k, 0\leq x_1+...+x_{k-1}\leq k-1,$
одакле добијамо

$1-k\leq x_k\leq k,$

па је за $r\neq m$,

$x_r-x_m\leq r-(1-m)=r+m-1\leq n+(n-1)-1=2n-2.$

Следи, тражени максимум је $\leq$ од 2n-2, а како се достиже за n -торку [1,1,...,1, -(n-2), n], то је тражени максимум 2n-2.
Нека је

$$x_1+...+x_j=j, x_1+...+x_k=0$$

а)Ако је j<к, тада

$$x_{j+1} + \ldots + x_k = -j.$$

Барем један од

$$x_{j+1},\ldots,x_k \text{ je} \leq \frac{-j}{k-j}$$

(иначе

$$x_{j+1} + \ldots + x_k \rangle \frac{-j}{k-j}(k-j) = -j),$$

а како је

$$\frac{-j}{k-j} \leq -\frac{1}{n-1},$$

барем један је

$$\leq -\frac{1}{n-1}.$$

Такође, барем један од $x_1,\ldots,x_n$ је ≥ 1 (иначе највећи од

$$x_1,\ldots,\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

није 1).Следи, тражени минимум је већи од

$$1-\left(\frac{-1}{n-1}\right) = \frac{n}{n-1}.$$

б) Ако је к<j, тада

$$x_{k+1} + \ldots + x_j = j,$$

па као у а). међу

$x_{k+1},\dots,x_j$

постоји број

$$\geq \frac{j}{j-k} \geq \frac{n}{n-1},$$

а међу

$x_1,\dots,x_n$

постоји број ≤ 0 (иначе најмањи од

$$x_1,\dots,\frac{x_1+\dots+x_n}{n}$$

није 0).Следи, тражени минимум је $\geq$ од

$$\frac{n}{n-1}-0=\frac{n}{n-1}.$$

За n-торку

$$\left[0,\frac{n}{n-1},\dots,\frac{n}{n-1}\right]$$

он се и достиже.

1.Лако се уочавају решења (1,n), (n,1), (n,n),где је n произвољан природан број. Нека је x<y, тј. y=x+t, где је t природан број.Тада једначина постаје :

$$x^{x+t}+x+t=(x+t)^x+x$$

па је

$$x^t+\frac{t}{x^x}=(1+\frac{t}{x})^x\langle 3^t$$

одакле је x<3. Следи да је x=2, па добијамо:

$$2^t=(1+\frac{t}{2})^2-\frac{t}{4}.$$

Последња једначина има решења t=0 и t=1, док се за $t\geq 2$ лако показује да је

$$2^t\rangle 1+\frac{3t}{4}+\frac{t^2}{4}.$$

За t=0 налазимо x=y=2, а за t=1:x=2,y=3.

2.Из

$$x_i^2\geq x_1^2+\frac{x_2^2}{2^3}+\ldots+\frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3}$$

имамо

$$\left(x_i^2\right)*(1^3+2^3+\ldots+(i-1)^3)\geq$$

$$(1^3+2^3+\ldots+(i-1)^3)*(\frac{x_1^2}{1^3}+\frac{x_2^2}{2^3}+\ldots+\frac{x_{i-1}^2}{(x-1)^3})$$

Коши-Шварцова неједнакост за векторе:

$$\left(1^{\frac{3}{2}},2^{\frac{3}{2}},\ldots,(i-1)^{\frac{3}{2}}\right)\wedge\left(\frac{x_1}{1^{\frac{3}{2}}},\frac{x_2}{2^{\frac{3}{2}}},\ldots,x_{i-1}*(i-1)^{\frac{-3}{2}}\right)$$

нам даје

$$\left(1^3+2^3+\ldots+(i-1)^3\right)*\left(\frac{x_1^2}{1^3}+\frac{x_2^2}{2^3}+\ldots+\frac{x_{i-1}^3}{(i-1)^3}\right)\geq$$

$$(x_1+x_2+\ldots+x_{i-1})^2$$

Из претходне две формуле имамо

$$(\sum_{j=1}^{i-1} j^3=(\frac{(i-1)*i}{2})^2):$$

$$x_i^2*\left(\frac{(i-1)*i}{2}\right)^2\geq(x_1+\ldots+x_{i-1})^2,$$

односно

$$\frac{x_i}{x+\ldots+x_{i-1}}\geq\frac{2}{(i-1)*i}$$

Према томе важи оцена

$$\sum_{i=2}^{2001}\frac{x_i}{x_1+\ldots+x_{i-1}}\geq\sum_{i=2}^{2001}\frac{2}{(i-1)*i}=2*(1-\frac{1}{2001})=$$

$$=2-\frac{2}{2001}\rangle 2-\frac{2}{2000}=1{,}999$$

3.Нека је x_n број низова дужине н чији су сви чланови елементи скупа (1,2,3,...,2к+1), а непаран број њих је једнак нули. Тада је x_1 и

$x_n=(2k+1)x_{n-1}+(2k+2)^{n-1}-x_{n-1}=2k*x_{n-1}+(2k+2)^{n-1}$ за $n\geq 2$.

Користећи рекурентну везу добијамо

$x_n=2k*x_{n-1}+(2k+2)^{n-1}=(2k)^2x_{n-2}+2k*(2k+2)^{n-2}+(2k+2)^{n-1}$

$=(2k)^3x_{n-3}+(2k)^2(2k+2)^{n-3}+2k(2k+2)^{n-2}+(2k+2)^{n-1}$

$=\ldots$

$=(2k)^{n-1}x_1+(2k)^{n-2}(2k+2)+\ldots+(2k)^2(2k+2)^{n-3}+2k(2k+2)^{n-2}+(2k+2)^{n-1}$

Како је $x_1=1$, то следи

$$x_n = \frac{(2k+2)^n - (2k)^n}{(2k+2) - 2k} = \frac{1}{2}\left[(2k+2)^n - (2k)^n\right] = 2^{n-1}\left[(k+1)^n - k^n\right]$$

Број $(k+1)^n - k^n$, па следи да је 2^{n-1} највећи степен двојке који дели x_n. За $n=2001$, тражени највећи степен двојке је 2^{2000}

4.Поставимо координатни систем тако да је координатни почетак O у пресеку дијагонала AC и BD, z-оса је права OS, x-оса је ортогонална на z-осу и припада равни троугла ASC, а y-оса нормална на z-осу у равни BSO; x и y осе су нормалне, јер су равни ASC и BSD нормалне. Тада важи:

$$S(O,O,h), A(a,o,c), B(o,b,d), C(-a,o,-c), D(o,-b-d)$$

$$SA^2 = a^2 + (h-c)^2, SB^2 = b^2 + (h-d)^2, SC^2 =$$

$$c^2 + (h+c)^2, SD^2 = b^2 + (h+d)^2$$

$$AB^2 = CD^2 = a^2 + b^2 + (c-d)^2; AD^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + (c+d)^2$$

Применом Хероновог обрасца добијамо:

$$P_{SAB}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2(h-d)^2 + b^2(h-c)^2$$

$$P_{SCD}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2(h+d)^2 + b^2(h+c)^2$$

$$P_{SAD}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2(h+d)^2 + b^2(h-c)^2$$

$$P_{SBC}^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2(h-d)^2 + b^2(h+c)^2$$

$$P_{SAB}^2 + P_{SCD}^2 = P_{SAD}^2 + P_{SBC}^2 \Rightarrow P_{SAD}^2 = P_{SAB}^2 + P_{SCD}^2 - P_{SBC}^2 =$$

$$= x^2 + z^2 - y^2,$$

$$P_{SAD} = \sqrt{x^2 + z^2 - y^2}$$

Р Е З У Л Т А Т И

ПРВИ РАЗРЕД

1. Новаковић Милан, друга награда
2. Радовановић Марко, трећа награда
3. Краковић Дејан, похвала
4. Пејчев Александар, похвала
5. Живановић Дарко, похвала
6. Новаковић Марко, похвала

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Милановић Јелена, друга награда
2. Јовићевић Јелена, трећа награда
3. Бранковић Александар, похвала
4. Вранић Марија, похвала
5. Радоњић Милош, похвала
6. Пенева Марина, похвала
7. Миленковић Кристина, похвала
8. Маринковић Марина, похвала

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Лукић Миливоје, прва награда
2. Радоњић Милан, друга награда
3. Петковић Марко, трећа награда
4. Костић Тијана, похвала
5. Костић Дино, похвала
6. Пенев Ирена, похвала
7. Јоргвановић Милош, похвала

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Лазић Владимир,трећа награда
2. Симчевић Татјана, трећа награда
3. Месарош Карола, трећа награда
4. Кирћански Милан, трећа награда
5. Суботић Александар, похвала
6. Суботић Владимир, похвала

ПРВА КРАГУЈЕВАЧКА ГИМНАЗИЈА

ПРВА КРАГУЈЕВАЧКА ГИМНАЗИЈА
Даничићева 1, 34000 Крагујевац
тел: (034) 335 - 506