Друштво математичара Србије

Математичка такмичења средњошколаца

1995/1996

Београд 1996

Друштво математичара Србије

Редактори:

Др Владимир Драговић и др Павле Младеновић

Обрада:

Др Владимир Драговић

Београд 1996.

Републичка комисија за такмичење из математике
за ученике средњих школа
шк. 1995/1996

1. Арсеновић др Милош, Математички факултет у Београду
2. Ацкета др Драган, Природноматематички факултет у Новом Саду
3. Блажић др Новица, Математички факултет у Београду
4. Вукмировић мр Јован, Математички факултет у Београду
5. Дорословачки др Раде, Факултет техничких наука у Новом Саду
6. Достанић др Милутин, Математички факултет у Београду
7. Драговић др Владимир, Математички институт- председник
8. Јанковић др Владимир, Математички факултет у Београду
9. Каделбург др Зоран, Математички факултет у Београду
10. Младеновић др Павле, Математички факултет у Београду
11. Огњановић Срђан, професор Математичке гимназије у Београду
12. Павловић Иван, професор гимназије Вук Караџић, Лозница
13. Петровић др Војислав, Природно-математички факултет у Новом Саду
14. Радновић Милена, професор Математичке гимназије у Београду
15. Тановић др Предраг, Математички институт САНУ
16. Тодоровић Раде, Математички факултет у Београду
17. Томић Иванка, професор гимназије у Ваљеву
18. Тошић др Ратко, Природно-математички факултет у Новом Саду
19. Црвенковић др Синиша, Природно-математички факултет у Новом Саду

НОВИ САД - град домаћин

На месту где Дунав, скрећући на југоисток, прави другу велику кривину на свом делу тока кроз Југославију, окружен са севера пространом бачком равницом, а са југа благим падинама Фрушке Горе, лежи Нови Сад - привредни, административни и културни центар Аутономне Покрајине Војводине.

Прва људска насеља на подручју данашњег Новог Сада потичу још из преисторије, док први писани документи датирају из 1694. године. Отприлике у то време леву обалу Дунава, тачно наспрам петроварадинског утврђења, насељавају српске избеглице. Пред незадрживим налетом Турака они напуштају своја вековна пребивалишта и ту, далеко на северу, оснивају нова. Угарска, којој је територија припадала, прихвата их понајвише из сопственог интереса. Тако насељен српски живаљ требало да је утврди важан војни објект - Петроварадинску тврђаву и формира чврсту баријеру која би зауставила или успорила даљу експанзију Турске на север.

Повољни природни услови и географски положај утицали су на брз развој пољопривреде, занатства и трговине. Насеље се развијало и расло. Указом аустријске царице Марије Терезије од 1748. године добија статус првог слободног града у јужној Угарској и име Неопланта, на српском Нови Сад.

Упоредо са привредним развијао се у културни живот. Са пуно пажње и бриге неговало се културно наслеђе и традиција. 1772. у Сремским Карловцима, а затим 1810. у Новом Саду отварају се прве српске гимназије. 1826. године основана је у Новом Саду Матица Српска, а 1861. Српско Народно Позориште. Летопис Матице Српске који непрекидно излази од 1824. представља најстарију активну научну публикацију у свету. Тако је Нови Сад постао прави расадник и чувар српске културе и с правом стекао ласкаво име Српска Атина које и данас носи.

Због изузетног положаја Нови Сад је био на удару многих освајача. Практично ниједан рат га није заобишао. Претрпео је многа разарања, било је пуно људских жртава. Још увек су свежа сећања на страдања, највећим делом српског и јеврејског становништва, током мађарске фашистичке окупације у 2. светском рату.

Данас је Нови Сад модеран мултинационални град са око 180.000 у ужем и преко 260.000 становника у ширем подручју. Сам центар града, улице Змај Јовина, Дунавска, Пашићева и околне, сачувао је свој стари изглед и сјај. Одмах преко Дунава је чувена Петроварадинска тврђава, некад војно упориште, а данас омиљено место грађана, стециште сликара и обавезна дестинација свих туристичких група.

Новосадски Универзитет један је од најмлађих али и један је од највећих и најзначајнијих у новој Југославији. Сви факултети, изузев Медицинског и Академије Уметности, лоцирани су на једном месту - Универзитетском Парку. Смештен на живописној левој обали Дунава надомак новосадског штранда, по лепоти у Европи чувеног речног купалишта, једини је такав Универзитет у земљи.

Нови Сад се пуно пута показао као добар организатор и домаћин најразличитијих спортских, културних и научних скупова. И овог пута жеља свих је, а посебно Новосадског Универзитета организатора овогодишњег такмичења, да се та традиција сачува и одржи.

Свим учесницима Републичког Такмичења из Математике желимо угодан боравак у граду и пуно успеха на такмичењу.

ОРГАНИЗАЦИОНИ ОДБОР

Општинско такмичење из математике 03.02.1996.

први разред

1.1. Ако су p и $p^2 + 2$ прости бројеви, доказати да је и $p^3 + 2$ прост број.

1.2. Наћи све парове целих бројева p и q за које истовремено важе неједнакости

$$p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166,$$
$$32p - q^2 > p^2 + 12q + 271.$$

1.3. Нека је A подскуп скупа $\{1, 4, 7, \ldots, 1996\}$ и нека A садржи тачно 335 елемената. Доказати да постоје два различита броја у скупу A, тако да је њихов збир једнак 2000.

1.4. Наћи све реалне бројеве x за које важи једнакост

$$||x| - 1| + ||x| + 2| = 3.$$

1.5. Два такмичара наизменично узимају куглице из две кутије. Када дође на ред, такмичар узима из једне од кутија произвољан број куглица (обавезно бар једну). Победник је онај такмичар који последњи узме куглицу. Како треба да игра први такмичар да би победио, ако у првој кутији има 19, а у другој 96 куглица ?

други разред

2.1. Да ли постоје природни бројеви m и n, који се записују истим цифрама, али у различитом редоследу, тако да је $m - n = 1995$? (Образложити одговор!)

2.2. Пољопривредник жели да електричном оградом дужине $100\ m$ огради са три стране земљиште, које се налази поред реке, тако да ограда заједно са делом обале као четвртом страном, чини правоугаоник. Колике треба да буду димензије тог правоугаоника, тако да површина ограђеног земљишта буде максимална ?

2.3. Око једнакокраког троугла ABC $(AB=AC)$ описан је круг k. Права l садржи теме A и сече дуж BC у тачки D, а круг k у тачки E. Ако је $AB=c$ и $AE=m$ одредити дужину дужи AD.

2.4. Наћи све комплексне бројеве z за које важи

$$|z - 2 + i| = 5, \quad Re(z(1 + i)) = 2.$$

2.5. Доказати да за реалне бројеве a, b и c важи неједнакост $2(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^3b + b^3c + c^3a + ab^3 + bc^3 + ca^3$.

трећи разред

3.1. Ако су α, β, γ углови троугла, доказати да за сваки реалан број t важи неједнакост

$$\cos\alpha + t(\cos\beta + \cos\gamma) \leq 1 + \frac{t^2}{2}.$$

3.2. Шта је веће:

(а) $\sin(\cos 1)$ или $\sin 1$;

(б) $\sin(\cos \frac{1}{2})$ или $\sin \frac{1}{2}$?

3.3. Наћи све парове природних бројева x и y, тако да је $x! + 3 = y^2$.

3.4. Основа пирамиде је троугао са страницама

$a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Свака бочна страна пирамиде нагнута је под углом од 60^0 према равни основе. Израчунати површину пирамиде.

3.5. Нека је (x_0, y_0) решење система једначина

$$-x + ay = 2a,$$
$$ax - y = 3a - 5,$$

где је a реалан параметар. Колика је минимална вредност израза $x_0^2 + y_0^2$?

За које a се тај минимум достиже ?

четврти разред

4.1. Ако је n природан број, а α и β произвољни углови, доказати да важе неједнакости:

(а) $|\sin n\alpha| \le n|\sin \alpha|$,

(б) $|\cos n\beta - \cos n\alpha| \le n^2|\cos \beta - \cos \alpha|$.

4.2. Дата су три природна броја. Доказати да се међу њима могу изабрати бројеви a и b тако да је број $a^3b - ab^3$ дељив са 10.

4.3. Нека је $f(x) = \ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x>0$ и f^{-1} инверзна функција. Наћи вредност израза $f(x) + f^{-1}(-x)$.

4.4. Наћи полупречник основе и висину праве купе најмање запремине описане око сфере полупречника R.

4.5. Нека је (x_0, y_0) решење система једначина

$$-x + ay = 2a,$$
$$ax - y = 3a - 5,$$

где је a реалан параметар. Колика је минимална вредност израза $x_0^2 + y_0^2$?

За које a се тај минимум достиже ?

Окружно такмичење 17.02.1996.
први разред

1.1. Наћи све целе бројеве x и y, такве да је

$$2(x^2 + y^2) = 5(xy + 1).$$

1.2. Дужине страница троугла су три узастопна природна броја већа од 3. Доказати да се за 4 разликују дужине одсечака, на које висина дели средњу по величини страницу.

1.3. Наћи све природне бројеве n, за које се разломак $\frac{2n + 3}{5n + 7}$ може скратити.

1.4. Над страницама $\triangle ABC$ са спољашње стране конструишу се квадрати $BCDE$, $ACFG$ и $BAHK$. Затим се конструишу паралелограми $BKPE$ и $CDQF$. Доказати да је троугао PAQ једнакокрако-правоугли.

1.5. Ана, Биљана, Весна и Гордана су прелазиле реку кануом на следећи начин Било је три вожње са леве на десну обалу, при чему су сваки пут у кануу биле по две девојке, од којих је једна веслала. У обе вожње са десне обале на леву, у кануу је била само по једна девојка. Познато је да Ана може да весла само ако је сама у чамцу, а Биљана ако је сама или са Весном. Зна се и да је свака девојка веслала бар једном. Која од њих је веслала два пута?

други разред

2.1. (а) Доказати да за све природне бројеве n важи:

$$\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right).$$

(б) Одредити $n \in N$ за које је

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}} + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{101}+9\right).$$

2.2. Од свих правоуглих троуглова датог полупречника R описане кружнице, наћи странице оног са највећим полупречником уписане кружнице.

2.3. Наћи све вредности x, за које постоји бар једно a, $-1 \le a \le 2$, тако да важи неједнакост:

$$(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + (5+4a-a^2) < 0.$$

2.4. Када се природан број n подели са 3 добије се остатак 2, а када се подели са 37, остатак 22. Колики је остатак при дељењу тог броја са 111.

2.5. У круг је уписан n-тоугао, такав да су му сви углови подударни. Доказати да је тај n-тоугао правилан, ако је n непаран број.

трећи разред

3.1. Нека је O пресек дијагонала AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ и P_1, P_2, P_3, P_4 површине троуглова ABO, BCO, CDO и DAO. Ако је $P_1^2 + P_3^2 = P_2^2 + P_4^2$, доказати да је тачка O средиште бар једне од дијагонала.

3.2. Одредити све просте бројеве p за које је број $2p^4 - p^2 + 16$

потпун квадрат.

3.3. Дате су четири тачке у равни. Доказати да постоје четири права угла чија су темена дате тачке, тако да ти углови прекривају целу раван.

3.4. Пет ученика Ана, Бојан, Весна, Горан и Дејан радили су тест који се састојао од пет питања. На прва два питања били су понуђени одговори α , β и γ, а на последња три одговори ДА и НЕ. Ученици су на тих пет питања дали следеће одговоре:

	1	2	3	4	5
АНА	α	α	ДА	ДА	ДА
БОЈАН	β	β	ДА	НЕ	ДА
ВЕСНА	α	β	ДА	ДА	НЕ
ГОРАН	β	γ	ДА	ДА	НЕ
ДЕЈАН	γ	α	НЕ	ДА	ДА

Ако никоја два ученика нису имала једнак број тачних одговора, одредити који ученик је најбоље урадио тест.

3.5. Две подморнице, не померајући се, посматрају, истовремено, у току једног минута брод који се равномерно-праволинијски креће брзином од 30 km/h. Ако је прва подморница за то време окренула перископ за оштар угао α , а друга за оштар угао β , колико највеће растојање између подморница може да буде?

четврти разред

4.1. Дат је полином $P(x) = x^2 - \alpha$, где је α реалан број. Одредити све полиноме облика $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, где су a, b и c реални бројеви, тако да за сваки реалан број x важи $P(Q(x)) = Q(P(x))$.

4.2. Дата је права p: $y = -x + 1$ и две тачке A(-1, 5) и B(0,4). Одредити тачку P на правој p за коју је збир дужина дужи $|AP| + |PB|$ минималан.

4.3. Дате су четири некомпланарне тачке. Колико има равни које су једнако удаљене од те четири тачке?

4.4. Дат је низ чији су чланови различити цели бројеви. Доказати да се из тог низа може издвојити монотон подниз.

4.5. Дат је низ бројева $a_0 = 9$, $a_{k+1} = 3a_k^4 + 4a_k^3$, за $k \geq 0$. Доказати да се број a_{10} у декадном запису завршава са више од 1000 деветки.

Републичко такмичење
Нови Сад -- 16.март 1996.

први разред

1.1. За врхове два стуба висина 11 и 15 метара, који су на растојању од 9 м, закачен је канап дужине 15 м. На канап је окачен тежак тег и пуштен је да клизи, све док се тег не нађе у најнижој тачки. На којој висини ће се налазити тада тег?

1.2. Ако су a, b, c, и d позитивни реални бројеви такви да је

$\frac{5a+b}{5c+d} = \frac{6a+b}{6c+d}$ и $\frac{7a+b}{7c+d} = 8$, онда, израчунати $\frac{9a+b}{9c+d}$.

1.3. Нека је n природан број и d делитељ $2n^2$. Да ли $n^2 + d$ може бити потпун квадрат?

1.4. Али-Баба се налази у пећини у којој има злата и дијаманата. Килограм злата кошта 20 динара, а килограм дијаманата кошта 60 динара. На располагању му се налази један ковчег. Пун ковчег злата тежи $200\ kg$, а пун ковчег дијаманата тежи $40\ kg$. Тежина празног ковчега је занемарљива. Али-Баба може да понесе $100\ kg$. Колико злата и колико дијаманата треба да понесе Али-Баба да би највише профитирао ?

други разред

2.1. Имамо $n+1$ тег укупне тежине $2n$, и теразије са два уравнотежена таса. Тежина сваког од тегова изражава се природним бројем. Тегови се један по један стављају на тас: прво најтежи (или, ако их има више, један од најтежих), затим најтежи од преосталих и тако даље. При томе се сваки следећи тег ставља на онај тас на коме је укупна тежина тегова у том тренутку мања; ако су теразије у равнотежи онда на произвољну страну. Доказати да ће након стављања свих тегова на тасове на описани начин, теразије бити у равнотежи.

2.2. У скупу природних бројева решити једначину

$$7^x - 3\ 2^y = 1.$$

2.3. Кружница K додирује у тачкама A и C краке угла са врхом B. Тачка D лежи на K и $CD \parallel AB$. Дуж BD сече K у тачки E. Доказати да је $CE = \frac{1}{2}DE$.

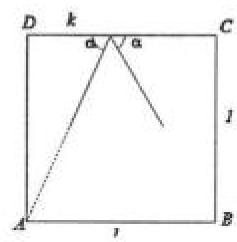
2.4. Круг K_1 полупречника 1 изнутра додирује круг K_2 полупречника 2. Описати геометријско место тачака у којима се нађе одређена тачка М са круга K_1 приликом котрљања круга K_1 по кругу K_2.

трећи разред

3.1. Наћи све реалне вредности α за које важи: ако су a, b, c странице троугла, онда је

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \alpha(ab + ac + bc).$$

3.2. Нека је билијарски сто квадрат чија је страница дужине 1. Ако је кугла упућена као на слици, где је $k = \sqrt{2} - 1$, наћи тачку на ивици билијар стола у којој ће кугла да се одбије 100. пут.



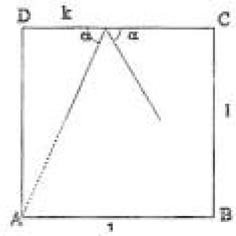
3.3. За које n постоји конвексан n-тоугао чија је једна страница 1, а дијагонале су му целобројне ?

3.4. Нека је $ABCD$ произвољан тетраедар и L_1, L_2, L_3 лопте чији су пречници AB, AC, AD, редом. Доказати да је тетраедар $ABCD$ садржан у унији $L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

четврти разред

4.1. На столу се налази 1996 жетона. Два играча узимају наизменично. Првим потезом први играч узима колико хоће, али не све. У сваком следећем потезу сваки играч може узети само број који је делилац броја жетона које је узео противник у претходном потезу. Како треба да игра први играч да би победио?

4.2. Нека је билијарски сто квадрат чија је страница дужине 1. Ако је кугла упућена као на слици, где је $k = \sqrt{2} - 1$, наћи тачку на ивици билијар стола у којој ће кугла да се одбије 100. пут.



4.3. Наћи све функције $f\colon N \to N \cup \{0\}$ такве да задовољавају следеће услове:

1) $f(mn) = f(m) + f(n)$ за свако $m, n \in N$;
2) $f(10m + 3) = 0$ за свако $m \in N$;
3) $f(10) = 0$.

4.4. Нека је $ABCD$ произвољан тетраедар и L_1, L_2, L_3 лопте чији су пречници AB, AC, AD, редом. Доказати да је тетраедар $ABCD$ садржан у унији $L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

Решења задатака са општинског такмичења

први разред

1.1. p може бити само 3, јер је иначе p^2+2 дељив са три. Тада је $p^3+2=29$, што је заиста прост број.

1.2. Систем је еквивалентан систему

$$(p-9)^2+(q+10)^2<15,$$
$$(p-16)^2+(q+6)^2<21.$$

Дакле $|p-9|<\sqrt{15}$, $|p-16|<\sqrt{21}$, то јест $p=12$. Слично се добија $q=-8$. Резултат: (12, -8).

1.3. Сваки од 335 бројева из A припада једном од 334 скупа: $\{1\}$, $\{1000\}$, $\{4,\ 1996\}$, $\{7,\ 1993\}$, $\{10,\ 1990\}$, ... , $\{997,\ 1003\}$. У једном од тих скупова ће бити два елемента из A. Њихов збир је 2000. (Не могу бити два броја из скупа $\{1\}$ или $\{1000\}$)

1.4. *1. начин.* У случају $x\geq 0$ разликујемо две могућности: прва је $x=1+t$, $t>0$, и тада се наша једнакост своди на $2t=0$, што нема решења. Друга могућност је $x=1-t$, $1\geq t\geq 0$. Тада је задата једнакост еквивалентна са 3=3. У овом случају решење је $0\leq x\leq 1$. Слично се разматра случај $x<0$. Коначно решење је $-1\leq x\leq 1$.
2. начин. $|x|$ је ненегативан број за који је $||x|+2|\leq 3$. Значи $0\leq |x|\leq -2+3=1$. Лако се види да је дата једнакост тачна за свако x за које $0\leq |x|\leq 1$. Решење је $-1\leq x\leq 1$.

1.5. Из друге кутије узме 77 куглица. Затим узима увек исти број куглица као други такмичар, само из супротне кутије.

други разред

2.1. Не постоје. Бројеви m и n дају исти остатак при дељењу са 9, а 1995 није дељив са 9.

2.2. Означимо са BC страницу правоугаоника наспрамну са реком. Ако је $BC = x$, онда је $AB = CD = 50 - \frac{x}{2}$. Површина правоугаоника је $P(x) = x(50 - \frac{x}{2}) = \frac{1}{2}x(100 - x)$. Максимум се достиже за $x = 50$. Дакле $AB = 25\ m = CD$, $BC = 50\ m$.

2.3. Троугао ABE је сличан троуглу ADB, па је $\frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AD|}{|AB|}$. Значи $|AD| = \frac{c^2}{m}$.

2.4. Прва једначина је еквивалентна са $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$, а друга $x - y = 2$, где је $z = x + iy$, $x, y \in R$. Заменом из друге једначине у прву имамо $y^2 + (y + 1)^2 = 25$. Решења су $(5, 3)$ и $(-2, -4)$, односно $z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = -2 - 4i$.

2.5.
$$a^3b + ab^3 = ab(a^2 + b^2) \le \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} =$$
$$= \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4}{2} \le a^4 + b^4.$$

Сабирајући неједнакости

$a^3b + ab^3 \le a^4 + b^4$, $a^3c + ac^3 \le a^4 + c^4$, $b^3c + bc^3 \le b^4 + c^4$

добијамо тражену неједнакост.

трећи разред

3.1. Дата неједнакост је еквивалентна са

$$\frac{t^2}{2} - t(\cos\beta + \cos\gamma) + 1 - \cos\alpha \ge 0.$$

Докажимо да је дискриминанта квадратног тринома мања или једнака од нуле.

$$(\cos\beta + \cos\gamma)^2 - 2(1 - \cos\alpha) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\cos^2\beta + 2\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma - 2\cos(\beta+\gamma) \le 2 \Leftrightarrow$$
$$\cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\sin\gamma\sin\beta \le 2 \Leftrightarrow 2 - (\sin\beta + \sin\gamma)^2 \le 2.$$

3.2. (а) $0 < \cos 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$. Синус је растућа функција на $[0, \frac{\pi}{2}]$, па је $\sin 1 > \sin(\cos 1)$.

(б) $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} < \cos\frac{1}{2}$, јер је косинус опадајућа функција на интервалу $[0, \frac{\pi}{2}]$. Значи $\sin(\cos\frac{1}{2}) > \sin\frac{1}{2}$.

3.3. *1. начин.* Квадрат природног броја се може завршавати једном од цифара 0, 1, 4, 5, 6 и 9. $x! + 3$ се завршава цифром 3, ако је $x \ge 5$. Решење су парови (1, 2), (3, 3).
2. начин. За $x \ge 6$ број $x! + 3$ је облика $9k + 3$, па не може бити квадрат природног броја. Анализом случајева $1 \le x \le 5$ добијамо тражена решења.

3.4. Означимо са S врх пирамиде $SABC$, а са $A_1B_1C_1$ подножја апотема на BC, AC и AB, и са O подножје висине пирамиде. Троуглова SOA_1, SOB_1 и SOC_1 су подударни, јер су стране нагнуте према основи под истим углом. Дакле O је центар уписане кружнице у троугао ABC, и све апотеме су једнаке

$$P = B + \frac{a+b+c}{2}h.$$
$$B = 84\ ,\quad r = \frac{B}{s} = 4\ ,\quad h = r\cos\frac{\pi}{3} = 8\ .$$
$$P = 84 + 21\ 8 = 252\,.$$

3.5. За $a \ne \pm 1$ систем има јединствено решење

$$x = \frac{3a}{a+1}, \quad y = \frac{2a+5}{a+1}.$$

За $a = -1$ систем нема решења, а за $a = 1$ решења су $(x, y) \in \{(\alpha, \alpha + 2) \mid \alpha \in R\}$. У случају $a = 1$, минимална вредност израза $x^2 + y^2 = \alpha^2 + (\alpha + 2)^2$ износи 2. За $a \neq \pm 1$ важи $\dfrac{9a^2 + (2a+5)^2}{(a+1)^2} > 2$. Минимална вредност је 2 и достиже се за $a = 1$.

четврти разред

4.1. (а) Докажимо индукцијом. $|\sin \alpha| \le |\sin \alpha|$. Значи тврђење је тачно за $n = 1$. Претпоставимо да је $|\sin n\alpha| \le n|\sin \alpha|$.

$$|\sin(n+1)\alpha| = |\sin n\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha| \le |\sin n\alpha| + |\sin \alpha| \le$$
$$\le n|\sin \alpha| + |\sin \alpha| = (n+1)|\sin \alpha|.$$

(б)
$$|\cos n\beta - \cos n\alpha| = |2 \sin \frac{n(\alpha+\beta)}{2} \sin \frac{n(\beta-\alpha)}{2}| \le$$
$$\le n^2 |2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \sin(\frac{\beta-\alpha}{2})| = n^2 |\cos \beta - \cos \alpha|.$$

4.2. $a^3b - b^3a = ab(a-b)(a+b)$. Ако је бар један од бројева a и b паран онда је и $a^3b - b^3a$ паран, а ако су оба непарна онда $a+b$ паран. Ако би неки од задатих бројева био дељив са 5, рецимо a, онда би и $a^3b - b^3a$ био дељив са 5. У случају да ниједан од задатих бројева није дељив са 5, они имају неке од остатака 1, 2, 3, 4 при дељењу са 5. Ако нека два броја имају исти остатак при дељењу са 5, онда је њихова разлика дељива са 5. Ако сва три имају различите остатке, имамо 4 могућности $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$. У сваком случају имамо два броја чији је збир дељив са 5.

4.3. $$f : R_+ \to R_+, \; f^{-1} : R_+ \to R_+.$$

$$f^{-1}(x) = \ln\frac{1+e^x}{1-e^x}; \quad f(x) + f^{-1}(-x) = \ln\frac{e^x-1}{e^x+1}\,\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \ln 1 = 0.$$

4.4. Означимо са S врх купе. Пресек купе и једне од равни, које садрже S и нормалне су на основу купе, је троугао SAB. Нека је O центар уписаног круга у троуглу SAB и D тачка додира уписаног круга на SA. Права SO садржи висину ST троугла SAB (јер је $SA = SB$). $AT = r$, $ST = H$, $OD = OT = R$, где r и H означавају полупречник основе и висину купе. Троугао STA је сличан троуглу SOD. Одатле имамо:

$$\frac{r}{R} = \frac{H}{\sqrt{H(H-2R}}, \text{ односно } r^2 = \frac{R^2H}{H-2R}, \text{ па је}$$

$$V = \frac{\pi}{3}r^2H = \frac{\pi}{3}R^2\frac{H^2}{H-2R} \text{ и } V'(H) = \frac{\pi}{3}R^2\frac{H(H-4R)}{(H-2R)^2}.$$

Дакле за $2R < H < 4R$ је $V'(H) < 0$, а за $H > 4R$ је $V'(H) > 0$. Значи функција $V(H)$ достиже минимум за $H = 4R$. Тада је $r = R\sqrt{2}$.

4.5. Види пети задатак за трећи разред.

Решења задатака са окружног такмичења

први разред

1.1. Једначина се може написати у облику $(x-2y)(2x-y) = 5$. Посматрајемо случајеве:
$a)$ $x-2y = 5,\ 2x-y = 1$; $b)$ $x-2y = 1,\ 2x-y = 5$;
в) $x-2y = -5,\ 2x-y = -1$; г) $x-2y = -1,\ 2x-y = -5$.
Решења су (-1, -3), (3, 1), (1, 3), (-3, -1).

1.2. Означим дужине одсечака AD и DB са x и y. Ако је h дужина висине CD, на основу Питагорине теореме је

$x^2 = (n - 1)^2 - h^2$ и $y^2 = (n + 1)^2 - h^2$. Тада је $y^2 - x^2 = (n + 1)^2 - (n - 1)^2 = 4n$. Како је $x + y = n$, добијамо да је $y - x = 4$.

1.3. Бројеви $2n + 3$ и $5n + 7$ су узајамно прости. Заиста:

$$5(2n + 3) - 2(5n + 7) = 1.$$

1.4. $\triangle FCQ \cong \triangle ACB \cong \triangle PBK \Rightarrow \triangle APB \cong \triangle AQC \Rightarrow AP = AQ$ и $\angle APB = \angle QAC$.

$$\angle QAP = \angle QAC + \angle CAB + \angle BAP = \angle APB + \angle BAP + \angle BAC =$$
$$= 180^0 - \angle ABP + \angle BAC = 180^0 - (90^0 + \angle KBP) + \angle BAC = 90^0$$

(јер је $\angle KBP = \angle BAC$).

1.5. Девојка која је веслала 2 пута, није веслала два пута са леве на десну обалу (јер би тада веслала и трећи пут, са десне на леву обалу). Стога су Ана и девојка која је веслала два пута веслале са десне на леву обалу. Биљана, Весна и Гордана су веслале са леве на десну обалу. Весна је била у чамцу када је Биљана веслала. Значи да је Весна два пута прелазила на десну обалу, па је морала и један пут да пређе са десне на леву обалу. Одговор: Весна је два пута веслала.

други разред

2.1. (а) Лева и десна страна су позитивне. Квадрирањем добијамо тражени идентитет.

(б) Применом доказаног под (а) имамо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k + \sqrt{k^2 - 1}}} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k + 1} + \sqrt{k - 1}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k + 1} - \sqrt{k - 1}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{n + 1} + \sqrt{n} - 1).$$

Овај израз је једнак $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{101} + 9)$ за $n = 100$.

2.2. $r = \dfrac{a + b - c}{2}$, $c = 2R = const$. Дакле r је максимално када збир $a + b$ достигне максималну вредност.

$$a + b = \sqrt{(a + b)^2} \le \sqrt{2(a^2 + b^2)} = c\sqrt{2}.$$

Једнакост се достиже за $a = b = R\sqrt{2}$. $c = 2R$.

2.3. $f(a) = a^2 + a(x^3 + 2x^2 - 4) - (2x^3 + x^2 - 6x + 5) > 0$, бар једно $a \in [-1,2]$ ако $f(-1) > 0$ или $f(2) > 0$. Последњи услов је еквивалентан са $(x + 2)(x - 1)x < 0$ или $(x + 3)(x - 1) > 0$. Резултат : $x \in (-\infty,-2) \cup (0,1) \cup (1,\infty)$.

2.4. $n = 3k + 2$ и $n = 37l + 22 \Rightarrow 3k = 36l + 21 + l - 1 \Rightarrow l = 3m + 1$. $n = 37(3m + 1) + 22 = 111m + 59$. Остатак је 59.

2.5. Нека су AB, BC и CD три узастопне странице тог n-тоугла и O центар круга. и
$\triangle AOB \cong \triangle COB$ $(AO = BO = CO = DO$
и $\angle ABO = \angle CBA - \angle CBO = \angle BCD - \angle BCO)$.
Значи $AB = CD$, т. ј. сваке две странице које имају заједничку суседну су једнаке. Како је n-непаран број имамо да су све странице једнаке.

трећи разред

3.1. Нека је $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, $DO = d$ и $\alpha = \angle AOB$.

$$P_1 = \frac{ab\sin\alpha}{2},\ P_2 = \frac{bc\sin\alpha}{2},\ P_3 = \frac{cd\sin\alpha}{2},\ P_4 = \frac{ad\sin\alpha}{2}.$$

$$P_1^2 + P_3^2 = P_2^2 + P_4^2 \Rightarrow a^2b^2 + c^2d^2 = c^2b^2 + a^2d^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)(b^2 - d^2) = 0 \Leftrightarrow a = c \vee b = d.$$

3.2. $p = 3$ јесте решење. Иначе, дати израз има остатак 2 при дељењу са 3, па није потпун квадрат.

3.3. Нека је p права таква да се две задате тачке A и B налазе са једне њене стране, а друге две задате тачке C и D са друге стране. Довољно је показати да постоје прави углови са теменима у A и B који прекривају ону полураван одређену правом p у којој се налазе C и D. Нека су Aa_1 и Bb_1 полуправе нормалне на p које секу ту праву. Нека су Aa_2 и Bb_2 полуправе паралелне са p које секу праве b_1 и a_1. a_1Aa_2 и b_1Bb_2 су тражени углови.

3.4. 1) Нека неки ученик има свих 5 тачних одговора. Свака 2 ученика имају једну ДА-НЕ питалицу исту, па ако неко има свих 5 тачних одговора, тада ће сваки од осталих имати бар један тачан одговор. Како сви имају различит број тачних то је укупн број тачних одговора $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Како је максималан број тачних одговора $2(\alpha$ или $\beta) + 2(\alpha$ или $\beta) + 4$ (ДА) $+ 4$ (ДА) $+ 3$ (ДА) $= 15$ то само А н и н и одговори могу бити сви тачни, али онда Бојан и Горан имају 2 тачна , а Весна и Дејан по 3.
2) Ако нико нема свих 5 тачних одговора, то је укупан број тачних одговора $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Ни Ана, ни Весна, ни Горан не могу имати све погрешне јер би тада тачни одговори на 3. и 4. питање били НЕ (3/ НЕ, 4/ НЕ). Максималан број тачних одговора би био $2(\alpha$ или $\beta) + 2(\alpha$ или $\gamma) + 1$ (НЕ) $+ 1$ (НЕ) $+ 3$ (ДА) $= 9 < 10$. Ако би Бојан имао све нетачне одговоре, имали би : (3 / НЕ, 4 / ДА, 5 / НЕ). Весна , Горан и Дејан би имали бар по 2 тачна , а Ана би имала само један тачан одговор (4 /ДА) . Тачни одговори би били $(1 / \gamma, 2 / \gamma)$ и максималан број тачних одговора би био $1 + 1 + 1 + 4 + 2 = 9 < 10$. Стога Дејан има све погрешне одговоре . Значи, тачни су одговори (3 / ДА, 4 / НЕ, 5 / НЕ). Дакле, Бојан, Весна и Горан имају бар по 2 тачна одговора. Из тога следи да Ана има само један тачан одговор (3/ ДА), што значи да је $(1 / \beta)$. Како укупно има 10 тачних одговора, мора бити $(2 / \gamma)$. Тада је најбољи

Горан са 4 тачна одговора.

3.5. Означимо са PQ дуж коју је прешао брод за назначени минут, и нека је S њено средиште. Подморнице A и B се налазе на луковима k_1 и k_2 из којих се PQ види под углом α односно β. Лако се покаже да је растојање AB веће у случају када се k_1 и k_2 налазе са разних страна праве PQ. Нека су O_1 и O_2 центри кругова, чијим кружницама припадају k_1 и k_2 и нека је A_0 пресек праве SO_1 са k_1 и B_0 пресек праве SO_2 са k_2.

$$|AB| \le |AS| + |SB| \le |AO_1| + |O_1S| + |SO_2| + |O_2B| =$$
$$= |A_0S| + |SB_0| = |A_0B_0| =$$
$$= ctg\frac{\alpha}{2}\ |PS| + ctg\frac{\beta}{2}\ |PS| = (ctg\frac{\alpha}{2} + ctg\frac{\beta}{2})250\ m$$

четврти разред

4.1.
$$P(Q(x)) = x^6 + 2ax^5 + (a^2 + 2b)x^4 + (2c + 2ab)x^3 +$$
$$+ (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2 - \alpha.$$
$$Q(P(x)) = x^6 + (a - 3\alpha)x^4 + (3\alpha^2 - 2a\alpha + b)x^2 +$$
$$+ c - \alpha^3 - \alpha b.$$

Упоређујући коефицијенте уз непарне степене добијамо $a = 0,\ c = 0$. Сада имамо систем:

$2b = -3\alpha,\ \ b^2 - b = 3\alpha^2,\ \ \alpha b = \alpha - \alpha^3$. За $\alpha = 0$ добијамо решење $b = 0$. Иначе за $\alpha = 2$ решење је $b = -3$.

4.2. Означима са B' тачку симетричну тачки B у односу на праву p. Њене координате су (-3, 1) (јер права p сече y- осу у тачки (0, 1) под углом од $\frac{\pi}{4}$). Тражена тачка P је пресек праве p са правом одређеном тачкама AB'. То је права $y = 2x + 7$. Тачка P има координате (-2, 3).

4.3. Све 4 тачке не могу бити са исте стране такве равни, јер би иначе биле компланарне. Тако разликујемо два случаја. У првом се три тачке налазе са једне стране равни, а четврта са друге стране. Таквих равни има четири. У другом случају се по две тачке налазе са разних страна равни. Избор пара тачака тада једнозначно одређује раван. Она представља симетралу заједничке нормале мимолазних правих одређених одговарајућим паровима тачака. У овом случају имамо три равни. Укупно, дакле, седам.

4.4. Низ (a_n) садржи бесконачно много позитивних или бесконачно много негативних чланова. Претпоставимо да важи први случај. Први члан подниза нека буде први позитиван члан низа. Сваки следећи члан подниза бирамо тако да буде први члан низа већи од претходно изабраног члана подниза (такав сигурно постоји, јер има бесконачно много позитивних, различитих чланова низа (a_n)). Тако добијамо растући подниз . У случају да има бесконачно различитих негативних чланова низа (a_n) може се аналогно конструисати опадајући подниз.

4.5. Претпоставимо да се a_k завршава са l деветки. Докажимо да се онда a_{k-1} завршава са бар $2l$ деветки:

$$a_k = a10^l - 1;$$

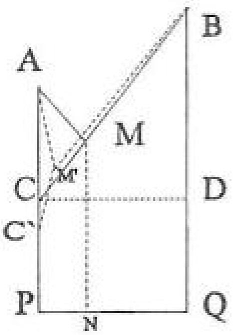
$$\begin{aligned} a_{k-1} &= 3(a10^l - 1)^4 + 4(a10^l - 1)^3 = \\ &= (a10^l - 1)^3(3a10^l - 3 + 4) = \\ &= (a^3 10^{3l} - 3a^2 10^{2l} + 3a10^l - 1)(3a10^l + 1) = \\ &= (3a10^l + 1)(a^3 10^l - 3a^2)10^{2l} + 9a^2 10^{2l} - 1 = \\ &= b10^{2l} - 1. \end{aligned}$$

Како се a_0 завршава са једном деветком, a_{10} се завршава са бар $2^{10} = 1024$ деветки.

Решење задатака са републичког такмичења

први разред

1.1. Тег ће се спустити до најмање могуће висине. Нека су тачке A, B, P, Q означене као на слици. Нека је C тачка на AP таква да је $BC = 15m$. Симетрала дужи AC сече дуж BC у тачки M која је тачка равнотежног положаја тега.



Докажимо то.
Нека је M' тачка на којој се зауставио тег. Нека је M' нижа од тачке M, и нека је C' тачка на AP, различита од A, таква да је $AM' = M'C'$. Тада је

$$AM' + M'B = C'M' + M'B \geq$$
$$\geq C'B > CB = 15\ m$$

(јер је C' нижа од C).

Дакле M је тражени положај, а тражена висина се лако рачуна: $BD = 12,\ \ CP = 3 \ \Rightarrow\ MN = 7.$

1.2.

$$\frac{5a+b}{5c+d} = \frac{6a+b}{6c+d} \Rightarrow \frac{6c+d}{5c+d} = \frac{6a+b}{5a+b} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{5c+d} = \frac{a}{5a+b} \Rightarrow \frac{5c+d}{c} = \frac{5a+b}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a} = k \Rightarrow d = kc,\ \ b = ka \Rightarrow$$

$$\frac{7a+ka}{7c+kc} = 8 \Rightarrow \frac{a}{c} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9a+b}{9c+d} = \frac{9a+ka}{9c+kc} = \frac{a}{c} = 8.$$

Дакле $\dfrac{9a+b}{9c+d} = 8.$

1.3. Не. Нека је $2n^2 = dk$.

$$k^2(n^2 + d) = k^2n^2 + k^2d = k^2n^2 + k2n^2 =$$
$$= n^2(k^2 + 2k) = n^2[(k + 1)^2 - 1].$$

Израз $[(k + 1)^2 - 1]$ није квадрат ни за једно k.

1.4. Нека је Али-Баба понео x kg дијаманата и y kg злата. Јасно је да су x и y ненегативни реални бројеви. Из ограничености простора у ковчегу следи да је $\frac{x}{40} + \frac{y}{200} \le 1$. Како Али-Баба не може да понесе терет тежи од 100 kg, то је $x + y \le 100$. Одавде добијамо да је $y \le 200 - 5x$, $y \le 100 - x$. Следи да је
$y \le 100 - x$, $0 \le x \le 25$; $y \le 200 - 5x$, $25 \le x \le 40$.
Али-Бабин профит износи

$$60x + 20y \le 2000 + 40x, \quad 0 \le x \le 25;$$
$$60x + 20y \le 4000 - 40x, \quad 25 \le x \le 40.$$

Следи да ће Али-Бабин профит бити највећи ако понесе 25 kg дијаманата и 75 kg злата, и у том случају ће износити 3000 динара.

други разред

2.1. (1) Нека је m тежина најтежег од тегова, а l број тегова тежине 1. Нека су тежине осталих $n - l$ тегова
$x_1, x_2, \dots, x_{n-l}$. Биће
$2n = m + l + x_1 + \dots + x_{n-l} \ge m + l + 2(n - l) = 2n + m - l$,
т. ј. $l \ge m$.

(2) Лако се види да је највећа могућа разлика у тежини леве и десне стране m.

(3) Посматрајмо теразије након постављања на тасове свих тегова тежине веће од 1. Нека је s тежина на левом, а d тежина на десном тасу, $r = |s - d|$, $u = s + d$. Пошто је

$u + l = 2n$ то су u и l, а тиме и r и l исте парности, и $0 \leq r \leq m \leq l$.

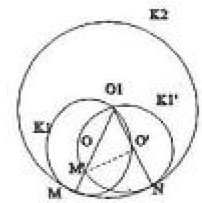
(4) Након стављања r тегова тежине 1 на лакшу страну теразија, теразије ће се уравнотежити. Преосталих $l - r$ (паран број) тегова тежине 1 распоређених на прописани начин неће пореметити равнотежу.

2.2. $(7 - 1)(7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 7 + 1) = 6 \, 2^{y-1}$. Следи
$7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 7 + 1 = 2^{y-1}$.
Ако је $y = 1$, онда је $x = 1$ једно решење.
Нека је $y > 1$. Тада је x парно и
$(7 + 1)(7^{x-2} + 7^{x-4} + \ldots + 7^2 + 1) = 2^{y-1}$,
т. ј. $7^{x-2} + 7^{x-4} + \ldots + 7^2 + 1 = 2^{y-4}$. За $y = 4$ добијамо $x = 2$ још једно решење.
За $y > 4$ x мора бити дељиво са 4. Тада
$(7^2 + 1)(7^{x-4} + 7^{x-8} + \ldots + 7^2 + 1) = 2^{y-4}$. Лева страна је дељива са 5, а десна није. Решења су $x = 1$, $y = 1$ и $x = 2$, $y = 4$.

2.3. Нека права CE сече AB у R. Докажимо $\triangle CRB \sim \triangle BRE$. Заиста, $\angle BCR = \angle BDC = \angle EBR$ и $\angle BRE$ је заједнички. Из сличности имамо $\frac{BR}{ER} = \frac{RC}{RB} \Rightarrow BR^2 = RE \; RC$. Из потенције тачке R на кружницу K имамо $RA^2 = RE \; RC$. Следи $BR^2 = RA^2$, т. ј. R је средина дужи AB.
$\triangle CRB \sim \triangle DCE$ $(\angle CRB = \angle DCE; \angle RCB = \angle CDE)$, па је

је $\frac{BR}{EC} = \frac{BC}{ED} \Leftrightarrow \frac{BR}{BC} = \frac{EC}{ED} \Rightarrow \frac{EC}{ED} = \frac{1}{2}$.

2.4. Тражено геометријско место тачака је пречник круга K_2 који садржи M. Нека се круг K_1 у једном моменту поклопио са кругом K_1', а тачка M са $M' \in K_1'$. Из односа полупречника кругова K_1 и K_2 следи да је $2\angle NO_1M = \angle NO'M'$. Ако је M'' тачка пресека праве MO_1 и круга K_1', из односа централног и периферијског угла у K_1', имамо $M'' = M'$. Обрнуто, за произвољну тачку M'' на пречнику MO_1 круга K_2, лако се конструише бар један круг K_1', у који кад пређе K_1, тачка M пређе у M''. Ако је $M = O_1$ решење је пречник ортогоналан на O_1O.



трећи разред

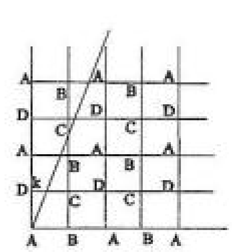
3.1. У троуглу важи

$$a + b - c > 0,\ a - b + c > 0,\ - a + b + c > 0.$$

$$(a + b - c)(a - b + c) + (a + b - c)(- a + b + c) + \\ + (a - b + c)(-a + b + c) = \\ = 2(ab + ac + bc) - (a^2 + b^2 + c^2) > 0,$$

т. ј. тражена неједнакост важи за $\alpha \geq 2$. Узмимо $a = b = 1$ (мира бити $0 < c < 2$). Добијамо неједнакост $c^2 - 2\alpha c - \alpha + 2 \leq 0$, која за $\alpha < 2$ неће важити узмемо ли довољно мало c.

3.2. Ставимо билијар сто у Декартов координатни систем тако да је $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$. Свакој целобројној координати доделимо



A, B, C, D као на слици:

$$A(2m,\ 2n),\ B(2m+1,\ 2n),$$
$$C(2m+1,\ 2n+1),\ D(2m,\ 2n+1)$$

Пут кугле можемо сматрати праволинијским. Треба да одредимо, где права $y = x/k$ стоти пут пресеца неку координатну линију, почев од тачке $A(0, 0)$.Имамо две могућности: стоти пресецање је са хоризонталном координатном линијом или стоти пресецање је са вертикалном координатном линијом. У првом случају је: $Y + [kY] = 100$, а у другом $X + [X/k] = 100$, где су Y и X природни бројеви. Могућ је само један од ова два случаја, јер права $y = x/k$ не пролази ни кроз једну целобројну координату (k је ирационалан). Проверимо да ли постоји таква $Y \in N$ за које важи једначина

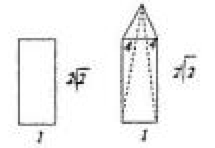
$Y + [kY] = 100$.

$100 \le (k+1)Y < 101$; $k + 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow 5000 \le Y^2 < 5100{,}5$.

Како је $71^2 = 5041$, следи да је испуњен први случај за $Y = 71$. То значи да је координата 100 пресечне тачке $(k\,71, 71)$, односно приближно ((29, 11), 71). Како је $C(29,\ 71)$, $D(30,\ 71)$, то значи да се кугла 100 пут одбија од ивице CD у тачки P

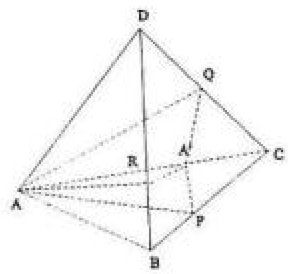
$$P \in CD \quad , \quad CP = (\sqrt{2} - 1)71 - 29 .$$

3.3. У случају $n = 4$; $n = 5$ види слику.



Случај $n \ge 6$: Нека је AB страница дужине 1 и нека су P, Q темена која нису суседна са A, B. У троугловима PAB, QAB из неједнакости троугла следи: $|PA - PB| < 1$, $|QA - QB| < 1$. Како су дијагонале целобројне, важи $PA = PB$, $QA = QB$. То је супротно претпоставци да је многоугао конвексан.

3.4. Нека је A' подножије нормале из A на раван $BCD : AA' \perp BCD$. Означимо са P, Q, R подножија нормала из A' на BC, CD, BD тим редом. На основу теореме о три нормале, тада је: $AP \perp BC$, $AR \perp BD$, $AQ \perp CD$. Дакле $ABPA'R \subset L_1$, $ACQA'P \subset L_2$, $ADRA'Q \subset L_3$.



четврти разред

4.1. Први узме 4 жетона. Затим игра симетрично.

4.2. Види решење задатка 2. за трећи разред.

4.3. $f(10) = 0 = f(5) + f(2) \Rightarrow f(2) = f(5) = 0$. Сваки природни број n се може представити у облику $n = 2^k 5^l b$, где су $k,\ l \geq 0,\ (b,\ 10) = 1$. Тада је $b = 10m \pm 1$ или $10m \pm 3$ па је $b^2 = 10m_1 \pm 1 \Rightarrow b^4 = 10m_2 + 1$. Стога је број $3b^4$ завршава цифром 3 па је $f(3b^4) = 0, \Rightarrow f(3) = f(b) = 0 \Rightarrow f(n) = kf(2) + lf(5) + f(b) = 0$.

4.4. Види решење задатка 4. за трећи разред.

Распоред такмичења из математике за школску 1996/97. годину

Општинско такмичење	....	02.02.1997.
Окружно такмичење	....	16.02.1997.
Републичко такмичење	....	15.03.1997.
Савезно такмичење	....	12.04.1997.

Садржај