25. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Источно Сарајево, 14. април 2018.

ЗАДАЦИ

ПРВИ РАЗРЕД

1. На шаховском турниру одиграно је укупно 100 партија. Два играча су напустила турнир. Сваки од њих је до напуштања турнира одиграо по 5 партија. Да ли су они играли међусобно прије напуштања турнира?

2. У троугао ABC са правим углом у тјемену C уписана је кружница која додирује његове странице AB, BC, CA редом у тачкама M, N, L. Нека је K тачка дужи BN таква да је $BK = CL$. Доказати да је $KL \perp MN$.

3. Нека за реалне бројеве a и b важи $|3a - 2b| \leq 1$ и $|2a - 3b| \leq 1$. Доказати да је $|a| \leq 1$ и $|b| \leq 1$.

4. Дато је n декадних цифара различитих од нуле, од којих неке могу бити једнаке. Од тих n цифара су формирани сви могући $n-$цифрени бројеви. Доказати да међу њима може бити највише један степен двојке.

(На примјер, међу 30 шестоцифрених бројева $224588, 224858, \ldots, 885422$ који се записују помоћу цифара 2, 2, 4, 5, 8, 8 само је број $524288 = 2^{19}$ степен двојке.)

ДРУГИ РАЗРЕД

1. За природан број n означимо са $d(n)$ највећи заједнички дјелилац природних бројева $n^2 + 1$ и $(n-1)^3 + 2$. Наћи све вриједности $d(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

2. У равни су дате кружнице k_1 и k_2. Нека су p и q њихове заједничке спољашње тангенте и нека је P додирна тачка тангенте p са кружницом k_1, а Q додирна тачка тангенте q са кружницом k_2. Доказати да дате кружнице одсијецају на правој PQ подударне тетиве.

3. Одредити све парове (p, q) реалних бројева тако да квадратни триноми $x^2 + px + q$ и $px^2 + qx + 1$ имају један заједнички реални коријен и да збир остала два њихова коријена буде $1/2$.

4. Јединична поља квадратне табле $n \times n$ се боје бијелом и црном бојом. Колико има различитих бојења те табле код којих се у сваком квадрату 2×2 унутар табле налази подједнак број бијелих и црних поља?

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је H ортоцентар оштроуглог троугла ABC и D, E, F редом подножја висина из његових тјемена A, B, C. Нека је P пресјечна тачка дужи DF и BE. Права која садржи тачку P и нормална је на BC сијече страницу AB у тачки Q. Нека је N пресјечна тачка дужи AD и EQ. Доказати да је тачка N средиште дужи AH.

2. Одредити све парове (p, q) простих бројева за које важи $p \mid 12q - 1$ и $q \mid 12p + 1$.

3. За које n се све странице и дијагонале датог правилног $n-$угла могу обојити са n боја (свака дуж једном бојом) тако да за било које три различите боје постоји троугао, са тјеменима у тјеменима датог $n-$угла, чије су странице обојене тим бојама?

4. Низ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ реалних бројева задовољава услове

$$a_0 = 0, \quad |a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \leq 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Доказати да важи

а) $\left| \dfrac{a_{k+1}}{k+1} - \dfrac{a_k}{k} \right| \leq \dfrac{1}{2}$ за свако $k \in \mathbb{N}$;

б) Ако је $a_n = 0$ за неки природан број n, онда је $|a_k| \leq \dfrac{k(n-k)}{2}$ за свако $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Дат је једнакокраки трапез са основицама AB и CD. Кружница k која садржи тачке D и C, други пут сијече страницу AD у тачки X, а дијагоналу BD у тачки Y. Тангента на кружницу k у тачки C сијече праву AB у тачки Z. Доказати да су тачке X, Y, Z колинеарне.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Низ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ реалних бројева задовољава услове

$$a_0 = 0, \quad |a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1}| \leq \frac{1}{k} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Доказати да важи

а) $\left|\dfrac{a_{k+1}}{k+1} - \dfrac{a_k}{k}\right| \leq \dfrac{1}{k+1}$ за свако $k \in \mathbb{N}$;

б) Ако је $a_n = 0$ за неки природан број n, онда је $|a_k| < k \ln \dfrac{n}{k}$ за свако $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. Нека је n број учесника турнира. $n-2$ играча који су завршили турнир одиграли су међусобно $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$ партија. Два играча који су напустили турнир одиграли су заједно 9 или 10 партија, у зависности од тога да ли су играли међусобно или нису. Дакле, добијамо двије једначине

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 9 = 100, \quad \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 10 = 100,$$

које су еквивалентне редом са $(n-2)(n-3) = 182$ и $(n-2)(n-3) = 180$, при чему нас интересују само њихова природна рјешења. Такво рјешење, $n = 16$, има само прва једначина, одакле слиједи да су играчи који су напустили турнир играли међусобно.

2. Нека је I центар уписане кружнице троугла ABC. Права IB је симетрала угла у тјемену B, а како је $BM = BN$, слиједи да је $IB \perp MN$.

Четвороугао $CLIN$ је квадрат (са страницом једнаком полупречнику уписане кружнице троугла ABC), па из услова $BK = CL$ слиједи да је $BK = IL$. Како су, осим тога, праве BK и IL паралелне (јер су обје нормалне на AC), то је $BKLI$ паралелограм. Одавде слиједи да је $KL \parallel IB$, тј. $KL \perp MN$.

3. Из датих услова добијамо редом да је

$$-1 \leq 3a - 2b \leq 1 \ \text{ и } \ -1 \leq 2a - 3b \leq 1,$$

$$\frac{3a-1}{2} \leq b \leq \frac{3a+1}{2} \ \text{ и } \ \frac{2a-1}{3} \leq b \leq \frac{2a+1}{3}, \tag{1}$$

одакле слиједи да је

$$\frac{3a-1}{2} \leq \frac{2a+1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{2a-1}{3} \leq \frac{3a+1}{2}\,.$$

Посљедње двије неједнакости су еквивалентне редом са неједнакостима $a \leq 1$ и $-1 \leq a$, па је $-1 \leq a \leq 1$, тј. $|a| \leq 1$.

Аналогно се доказује да је $-1 \leq b \leq 1$ (што такође слиједи и из друге неједнакости у (1), пошто је $-1 \leq a \leq 1$).

4. Претпоставимо супротно, да међу тим бројевима постоје два степена двојке 2^k и 2^l, $k > l$. Тада је број $2^k - 2^l = 2^l(2^{k-l} - 1)$, као разлика два броја записаних истим цифрама, дјељив са 9 (слиједи из чињенице да $9 \mid 10^i - 1$, за свако $i \in \mathbb{N}$). Дакле,

$$9 \mid 2^{k-l} - 1. \tag{1}$$

Са друге стране, како су оба броја 2^k и 2^l већи од 10^{n-1} и мањи од 10^n, то је $2^{k-l} = 2^k/2^l < 10$. Одавде добијамо да је $k - l \leq 3$, тј. $1 \leq k - l \leq 3$, што је у супротности са (1).

ДРУГИ РАЗРЕД

1. За дати природан број n писаћемо краће d умјесто $d(n)$. Из услова $d \mid n^2+1$ и $d \mid (n-1)^3 + 2$ добијамо редом

$$d \mid n(n^2+1) - ((n-1)^3 + 2) = 3n^2 - 2n - 1,$$

$$d \mid 3(n^2+1) - (3n^2 - 2n - 1) = 2n + 4,$$

$$d \mid (2n+4)^2 - 4(n^2+1) = 16n + 12,$$

$$d \mid 8(2n+4) - (16n+12) = 20.$$

Број $n^2 + 1$ не може бити дјељив са 4, па одавде добијамо $d \mid 10$, тј. $d \in \{1, 2, 5, 10\}$. Све ове вриједности $d = 1,\ 2,\ 5,\ 10$ се достижу, на примјер, редом за $n = 2,\ 1,\ 8,\ 3$.

2. Нека је M додирна тачка тангенте p са кружницом k_2, N додирна тачка тангенте q са кружницом k_1, и L, K пресјечне тачке праве PQ са кружницама k_1 и k_2, редом. Користећи теорему о потенцији тачке у односу на кружницу добијамо да је

$$PK \cdot PQ = PM^2, \quad QL \cdot QP = QN^2.$$

Како је $PM = QN$, одавде слиједи да је $PK \cdot PQ = QL \cdot QP$, тј. $PK = QL$. Имамо сљедећа два случаја.

Ако тачка K лежи на дужи PL, тада тачка L лежи на дужи QK, па је

$$PL = PK + KL = QL + KL = QK.$$

Ако тачка L лежи на дужи PK, тада тачка K лежи на дужи QL, па је

$$PL = PK - KL = QL - KL = QK.$$

Дакле, у оба случаја је $PL = QK$, што је и требало доказати.

3. *Одговор:* $(p,q) = (-2,1)$ и $(p,q) = (1/2,-3/2)$.

Прво рјешење. Нека је x_0 заједнички коријен датих тринома. Тада је x_0 коријен и полинома

$$x(x^2+px+q) - (px^2+qx+1) = x^3 - 1,$$

па како је x_0 реалан број, то је $x_0 = 1$. Даље, из било којег од датих тринома добијамо да је $1+p+q=0$, тј. $q = -p-1$.

Нека су x_1 и x_2 преостали коријени првог и другог тринома, редом. Тада је

$$x^2+px+q = (x-1)(x-x_1), \quad px^2+qx+1 = p(x-1)(x-x_2),$$

одакле изједначавањем слободних чланова добијамо да је $x_1 = q = -p-1$ и $x_2 = 1/p$. Сада из датог услова $x_1 + x_2 = 1/2$ добијамо једначину

$$-p-1+\frac{1}{p} = \frac{1}{2}\,,$$

која је еквивалентна са квадратном једначином $2p^2+3p-2=0$. Рјешења ове једначине су $p_1 = -2$ и $p_2 = 1/2$, па су тражени парови $(p,q) = (-2,1)$ и $(p,q) = (1/2,-3/2)$.

Оба ова пара задовољавају услове задатка, јер је

$$x^2-2x+1 = (x-1)(x-1), \quad -2x^2+x+1 = -2(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

$$x^2+\frac{1}{2}\,x-\frac{3}{2} = (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right), \quad \frac{1}{2}\,x^2-\frac{3}{2}\,x+1 = \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

Друго рјешење. Нека је x_0 заједнички коријен, а x_1 и x_2 преостали коријени првог и другог тринома, редом. Из датих услова добијамо да је

$$x^2+px+q = (x-x_0)(x-x_1), \quad px^2+qx+1 = p(x-x_0)(x-x_2),$$

одакле на основу Вијетових формула добијамо

$$x_0 + x_1 = -p, \tag{1}$$

$$x_0x_1 = q, \tag{2}$$

$$x_0 + x_2 = -\frac{q}{p}, \tag{3}$$

$$x_0x_2 = -\frac{1}{p}\,. \tag{4}$$

Множењем једнакости (1) и (4) добијамо

$$(x_0 + x_1)x_0x_2 = -1, \tag{5}$$

а из једнакости (1), (2) и (3) је

$$(x_0 + x_1)(x_0 + x_2) = x_0x_1. \tag{6}$$

Из (5) добијамо да је

$$(x_0 + x_1)x_2 = -\frac{1}{x_0}\,, \tag{7}$$

а из (6) слиједи да је $(x_0 + x_1) + x_2 = x_0x_1 - (x_0 + x_1)x_0$, тј.

$$(x_0 + x_1)x_2 = -x_0^2. \tag{8}$$

Из (7) и (8) добијамо једначину $-\dfrac{1}{x_0} = -x_0^2$, тј. $x_0^3 = 1$. Како је $x_0 \in \mathbb{R}$, слиједи да је $x_0 = 1$.

Замјеном $x_0 = 1$ и $x_2 = \dfrac{1}{2} - x_1$ у (7) добијамо квадратну једначину

$$(1 + x_1)\left(\frac{1}{2} - x_1\right) = -1, \quad \text{тј.} \quad 2x_1^2 + x_1 - 3 = 0.$$

Рјешења ове једначине су $x_1 = 1$ и $x_1 = -3/2$, па како је $x_2 = \dfrac{1}{2} - x_1$ добијамо сљедеће двије тројке (x_0, x_1, x_2) коријена датих тринома:

$$(x_0, x_1, x_2) = \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{и} \quad (x_0, x_1, x_2) = \left(1, -\frac{3}{2}, 2\right).$$

Даље, из (1) и (2) слиједи да је $(p, q) = (-2, 1)$ или $(p, q) = (1/2, -3/2)$. Оба ова пара задовољавају услове задатка, што се провјерава као у првом рјешењу.

4. Претпоставимо да су поља прве врсте дате табле обојена наизмјенично бијелом и црном бојом (двије могућности). Тада су и поља друге врсте обојена наизмјенично бијелом и црном бојом, при чему опет постоје двије могућности (прво поље у врсти може бити бијело или црно). То важи и за сваку сљедећу врсту, па у овом случају имамо 2^n различитих бојења.

Претпоставимо сада да су нека два сусједна поља у првој врсти обојена истом бојом. По услову задатка, тада је бојење поља у другој врсти једнозначно одређено, и из истих разлога у свакој сљедећој. Прва врста се може обојити на 2^n-2 начина тако да бар два сусједна поља буду обојена истом бојом.

Дакле, број тражених бојења је $2^n+2^n-2=2^{n+1}-2$.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Нека је $\angle ABC=\beta$ и $\angle ACB=\gamma$. Како је $\angle AFH=\angle AEH=90^\circ$ то је четвороугао $AFHE$ тетиван. Даље, због $DA \parallel PQ$ закључујемо да је $\angle FQP=\angle FAH=\angle FEH=\angle FEP$, одакле слиједи да је и четвороугао $QFPE$ тетиван. Како је $\angle AFC=\angle ADC=90^\circ$ то је четвороугао $AFDC$ тетиван па је $\angle QFP=\angle AFD=180^\circ-\angle ACD=180^\circ-\gamma$, одакле слиједи да је $\angle QEP=\gamma$. Одавде закључујемо да је $\angle EAN=90^\circ-\gamma=\angle AEP=\angle QEP=\angle AEN$, па је троугао ANE једнакокрак. Одавде слиједи да је N центар описаног круга правоуглог троугла AHE, па је $NA=NH$.

2. *Одговор:* $(p,q)=(7,17)$ и $(p,q)=(131,11)$.

Прво рјешење. Нека за просте бројеве p и q важи $p \mid 12q-1$ и $q \mid 12p+1$. Тада је $p\neq q$ и $p \mid 12p-12q+1$ и $q \mid 12p-12q+1$, одакле слиједи $pq \mid 12p-12q+1$, па постоји цио број n тако да важи

$$12p-12q+1=npq. \tag{1}$$

Из ове једнакости слиједи да је сваки од бројева n, p, q узајамно прост са 12. Због тога је $p\geq 5$ и $q\geq 5$. Имамо сљедећа два случаја.

1° $p>q$. Из (1) слиједи да је n природан број који је узајамно прост са 12. Покажимо да је $n=1$. У супротном је $n\geq 5$ па је

$$npq-12p+12q\geq 5pq-12p+12q>4p(q-3)+12q>1,$$

што је у контрадикцији са (1). Дакле, $n=1$ па добијамо редом

$$pq-12p+12q=1,$$

$$p(q-12)+12(q-12)=-143,$$

$$(q-12)(p+12)=-11\cdot 13,$$

$$(p+12)(12-q) = 11 \cdot 13.$$

Како је $p+12 \geq 17$, одавде слиједи да је $p+12 = 143$ и $12-q = 1$, тј. $(p,q) = (131, 11)$.

2° $p < q$. Из (1) слиједи да је n негативан цио број. Нека је $m = -n$. Тада је m природан број који је узајамно прост са 12 за који важи $mpq + 12p - 12q = -1$. Покажимо да је $m = 1$. У супротном је $m \geq 5$ па је

$$mpq + 12p - 12q \geq 5pq - 12q + 12p > 4q(p-3) + 12p > -1.$$

Контрадикција. Дакле, $m = 1$ па добијамо редом

$$pq + 12p - 12q = -1,$$

$$p(q+12) - 12(q+12) = -145,$$

$$(p-12)(q+12) = -5 \cdot 29,$$

$$(12-p)(q+12) = 5 \cdot 29.$$

Како је $0 < 12-p < 12$ имамо два случаја

$$12-p = 1,\ q+12 = 145 \quad \text{или} \quad 12-p = 5,\ q+12 = 29.$$

У првом случају је $q = 133$, што није прост број ($133 = 7 \cdot 19$), а у другом случају добијамо још једно рјешење $(p,q) = (7, 17)$.

Друго рјешење. Нека за просте бројеве p и q важи $p \mid 12q-1$ и $q \mid 12p+1$. Тада је $p \neq q$ и постоје природни бројеви x и y тако да важи $12q - 1 = px$ и $12p + 1 = qy$. Из ове двије једнакости слиједи да је сваки од бројева x, y узајамно прост са 12. Опет имамо сљедећа два случаја.

1° $p > q$. Тада је $px = 12q - 1 < 12q < 12p$. Дакле $px < 12p$, па је $x < 12$. Како је x узајамно прост са 12, слиједи да је $x \in \{1, 5, 7, 11\}$, па имамо сљедећа четири случаја.

1) $x = 1$. Тада је $p = 12q - 1$ па је

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)+1}{q} = 144 - \frac{11}{q}.$$

Како је y цио број и q прост број, одавде слиједи да је $q = 11$ и $p = 131$. Дакле, пар простих бројева $(p,q) = (131, 11)$ је једно рјешење.

2) $x = 5$. Тада је $p = (12q-1)/5$ па имамо

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)/5+1}{q} = \frac{144q-7}{5q} = 29 - \frac{q+7}{5q}.$$

Како је $q \geq 5$, то је $0 < q + 7 < 5q$, па у овом случају немамо рјешења.

3) $x = 7$. Тада је $p = (12q-1)/7$ па имамо

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)/7+1}{q} = \frac{144q-5}{7q} = 20 + \frac{4q-5}{7q}\,.$$

Како је $q \geq 5$, то је $0 < 4q-5 < 7q$, па у овом случају немамо рјешења.

4) $x = 11$. Тада је $p = (12q-1)/11$ па имамо

$$y = \frac{12p+1}{q} = \frac{12(12q-1)/11+1}{q} = \frac{144q-1}{11q} = 13 - \frac{q-1}{11q}\,.$$

Како је $q \geq 5$, то је $0 < q-1 < 11q$, па ни у овом случају немамо рјешења.

2° $p < q$. Тада је $qy = 12p+1 < 12q$. Дакле $qy < 12q$, па је $y < 12$. Како је y узајамно прост са 12, слиједи да је $y \in \{1,5,7,11\}$, па имамо сљедећа четири случаја.

1) $y = 1$. Тада је $q = 12p+1$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)-1}{p} = \frac{144p+11}{p} = 144 + \frac{11}{p}\,.$$

Како је x цио број и p прост број, одавде слиједи да је $p = 11$ и $q = 133$. Како је $133 = 7 \cdot 19$ сложен број, у овом случају немамо рјешења.

2) $y = 5$. Тада је $q = (12p+1)/5$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)/5-1}{p} = \frac{144p+7}{5p} = 29 - \frac{p-7}{5p}\,.$$

Како је $|p-7| < 5p$ ово је цио број само за $p = 7$. Даље из $q = (12p+1)/5$ добијамо да је $q = 17$. Дакле, пар $(p,q) = (7,17)$ је једно рјешење.

3) $y = 7$. Тада је $q = (12p+1)/7$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)/7-1}{p} = \frac{144p+5}{7p} = 20 + \frac{4p+5}{7p}\,.$$

Како је $0 < 4p+5 < 7p$, у овом случају немамо рјешење.

4) $y = 11$. Тада је $q = (12p+1)/11$ па имамо

$$x = \frac{12q-1}{p} = \frac{12(12p+1)/11-1}{p} = \frac{144p+1}{11p} = 13 + \frac{p+1}{11p}\,.$$

Како је $0 < p+1 < 11p$, ни у овом случају немамо рјешење.

3. *Одговор:* Ако је n непаран, $n \geq 3$.

Нека је $n = 2k$ паран број, $k \geq 2$. Претпоставимо да такво бојење постоји. Посматрајмо дужи неке фиксиране боје, на примјер, црвене. Укупан број троуглова чија је једна страница црвена није мањи од броја парова преосталих $2k-1$ боја, којих има $\binom{2k-1}{2} = (2k-1)(k-1)$. Пошто је свака црвена дуж страница $2k-2$ троуглова, одавде слиједи да црвених дужи има бар k. Исто важи и за дужи било које друге боје, па укупан број дужи није мањи од $2k \cdot k = 2k^2$. Међутим, број свих страница и дијагонала $2k-$угла је $\binom{2k}{2} = k(2k-1) < 2k^2$. Контрадикција.

Нека је $n = 2k+1$ непаран број. Обојимо странице правилног $2k+1-$угла редом са тих $2k+1$ боја (сваком бојом по једну страницу). Како је свака дијагонала тог $2k+1-$угла паралелна тачно са једном његовом страницом, обојимо сваку његову дијагоналу управо оном бојом којом је обојена њој паралелна страница. Покажимо да ово бојење задовољава задате услове. Укупан број троуглова са тјеменима у тјеменима тог $2k+1-$угла је $\binom{2k+1}{3}$, а исто толико има и избора три различите боје из скупа од $2k+1$ боја. Претпоставимо супротно, да постоје неке три (различите) боје за које не постоји троугао чије су странице обојене тим бојама. На основу претходног, тада би морао постојати неки троугао чије су бар двије странице обојене истом бојом. Али, како су сваке двије странице које су обојене истом бојом међусобно паралелне, ово је немогуће.

4. Прво рјешење (*сабирањем одговарајућих неједнакости*).

а) Множењем неједнакости

$$-1 \leq a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} \leq 1$$

са i, и сабирајући добијене неједнакости за $i = 1, 2, \ldots, k$ добијамо редом

$$-\sum_{i=1}^{k} i \leq \sum_{i=1}^{k} i(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{k} i\,,$$

$$-\frac{k(k+1)}{2} \leq \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)a_i - 2\sum_{i=1}^{k} ia_i + \sum_{i=2}^{k+1}(i-1)a_i \leq \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

$$-\frac{k(k+1)}{2} \leq a_0 + 2a_1 - 2a_1 - 2ka_k + (k-1)a_k + ka_{k+1} +$$

$$+\sum_{i=2}^{k-1}(i+1-2i+i-1)a_i \leq \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

$$(1) \qquad -\frac{k(k+1)}{2} \leq ka_{k+1} - (k+1)a_k + \leq \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

одакле дијељењем са $k(k+1)$ добијамо да важи

$$\left|\frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k}\right| \leq \frac{1}{2}\,.$$

б) Нека су k и n природни бројеви, $k < n$. Сабирањем $n-k$ неједнакости

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{a_{i+1}}{i+1} - \frac{a_i}{i} \leq \frac{1}{2}\,, \qquad i = k,\, k+1,\, \ldots,\, n-1,$$

добијамо да је

$$-\frac{n-k}{2} \leq \frac{a_n}{n} - \frac{a_k}{k} \leq \frac{n-k}{2}\,.$$

Ако је $a_n = 0$, одавде слиједи да је

$$-\frac{n-k}{2} \leq -\frac{a_k}{k} \leq \frac{n-k}{2}\,, \quad \text{тј.} \quad -\frac{k(n-k)}{2} \leq a_k \leq \frac{k(n-k)}{2}\,,$$

што је и требало доказати.

Друго рјешење (*математичком индукцијом*).

а) Докажимо математичком индукцијом еквивалентну неједнакост

$$(2) \qquad -\frac{k+1}{2} \leq a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \leq \frac{k+1}{2} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

За $k = 1$ ова неједнакост важи јер је еквивалентна са $-1 \leq -2a_1 + a_2 \leq 1$. Претпоставимо да она важи за $k-1$ $(k \geq 2)$, тј. да је

$$-\frac{k}{2} \leq a_k - \frac{k}{k-1}a_{k-1} \leq \frac{k}{2}\,.$$

Пошто је $-1 \leq a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \leq 1$, слиједи да је

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \geq 2a_k - a_{k-1} - 1 - \frac{k+1}{k}a_k = \frac{k-1}{k}a_k - a_{k-1} - 1 =$$
$$= \frac{k-1}{k}\left(a_k - \frac{k}{k-1}a_{k-1}\right) - 1 \geq \frac{k-1}{k} \cdot \left(-\frac{k}{2}\right) - 1 = -\frac{k+1}{2}\,;$$

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \leq 2a_k - a_{k-1} + 1 - \frac{k+1}{k}a_k = \frac{k-1}{k}a_k - a_{k-1} + 1 =$$
$$= \frac{k-1}{k}\left(a_k - \frac{k}{k-1}a_{k-1}\right) + 1 \leq \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k}{2} + 1 = \frac{k+1}{2}\,.$$

Дакле

$$-\frac{k+1}{2} \leq a_{k+1} - \frac{k+1}{k}a_k \leq \frac{k+1}{2}\,,$$

тј. важи неједнакост (2).

б) На основу неједнакости (2) је

$$ka_{k+1} - \frac{k(k+1)}{2} \le (k+1)a_k \le ka_{k+1} + \frac{k(k+1)}{2}\,,$$

$$\text{(3)} \qquad \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{2} \le a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{2}\,, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Нека је $a_n = 0$. Из (3) за $k = n-1$ добијамо да је

$$\text{(4)} \qquad -\frac{n-1}{2} \le a_{n-1} \le \frac{n-1}{2}\,.$$

Неједнакост

$$\text{(5)} \qquad -\frac{k(n-k)}{2} \le a_k \le \frac{k(n-k)}{2}\,, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots n-1,$$

доказујемо математичком индукцијом по $k = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1$. Из (4) слиједи да ово тврђење важи за $k = n-1$. Претпоставимо да оно важи за $k+1$ $(k+1 \le n-1)$, тј. да је

$$-\frac{(k+1)(n-k-1)}{2} \le a_{k+1} \le \frac{(k+1)(n-k-1)}{2}\,.$$

Тада на основу (3) добијамо да је

$$a_k \ge \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{2} \ge -\frac{k}{k+1} \cdot \frac{(k+1)(n-k-1)}{2} - \frac{k}{2} = -\frac{k(n-k)}{2}\,,$$

$$a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{2} \le \frac{k}{k+1} \cdot \frac{(k+1)(n-k-1)}{2} + \frac{k}{2} = \frac{k(n-k)}{2}\,,$$

чиме је неједнакост (5) доказана.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. На основу једнакости угла између тангенте и тетиве и периферијског угла над истим луком имамо да је $\angle ABD = \angle YDC = \angle YCZ$. Како је $\angle YCZ + \angle YBZ = 180^\circ$, слиједи да је четвороугао $CYBZ$ тетиван. Даље је $\angle CYZ = \angle CBZ = \angle XDC = 180^\circ - \angle CYX$, одакле слиједи да је четвороугао $XBCY$ уписан у кружницу k, па је $\angle CYZ + \angle CYX = 180^\circ$, што значи да су тачке X, Y, Z колинеарне.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Прво рјешење (*сабирањем одговарајућих неједнакости*).

а) Множењем неједнакости

$$-\frac{1}{i} \le a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1} \le \frac{1}{i}$$

са i, и сабирајући добијене неједнакости за $i = 1, 2, \ldots, k$ добијамо редом

$$-k \le \sum_{i=1}^{k} i(a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}) \le k,$$

$$-k \le \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)a_i - 2\sum_{i=1}^{k} ia_i + \sum_{i=2}^{k+1}(i-1)a_i \le k,$$

$$-k \le a_0 + 2a_1 - 2a_1 - 2ka_k + (k-1)a_k + ka_{k+1} +$$
$$+ \sum_{i=2}^{k-1}(i + 1 - 2i + i - 1)a_i \le k,$$

$$-k \le ka_{k+1} - (k+1)a_k + \le k, \tag{1}$$

одакле дијељењем са $k(k+1)$ добијамо да важи

$$\left| \frac{a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_k}{k} \right| \le \frac{1}{k+1}\,.$$

б) Нека су k и n природни бројеви, $k < n$. Сабирањем $n-k$ неједнакости

$$-\frac{1}{i+1} \le \frac{a_{i+1}}{i+1} - \frac{a_i}{i} \le \frac{1}{i+1}\,, \quad i = k,\, k+1,\, \ldots,\, n-1,$$

добијамо да је

$$-\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \le \frac{a_n}{n} - \frac{a_k}{k} \le \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\,.$$

Ако је $a_n = 0$, одавде слиједи да је

$$|a_k| \le k\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

па је довољно још доказати да произвољне природне бројеве k и n, $k < n$, важи

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{k}\,. \tag{2}$$

На основу познате неједнакости

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{i+1} < \ln(i+1) - \ln i \quad (i \in \mathbb{N})$$

добијамо да је

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{n} < (\ln(k+1) - \ln k) + (\ln(k+2) - \ln(k+1)) +$$

$$+ \cdots + (\ln n - \ln(n-1)) = \ln n - \ln k = \ln \frac{n}{k},$$

тј. важи (2).

Примједба. Неједнакост (3) слиједи, на примјер, из чињенице да је низ (x_i) са општим чланом $x_i = \left(\frac{i+1}{i}\right)^{i+1}$ опадајући и да конвергира ка e. Наиме, одавде слиједи да је $e < x_i$, одакле логаритмовањем добијамо да важи (3).

Друго рјешење (*математичком индукцијом*).

а) Докажимо математичком индукцијом еквивалентну неједнакост

$$\text{(4)} \qquad -1 \le a_{k+1} - \frac{k+1}{k} a_k \le 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

За $k = 1$ ова неједнакост важи јер је еквивалентна са $-1 \le -2a_1 + a_2 \le 1$. Претпоставимо да она важи за неко $k-1$ $(k \ge 2)$, тј. да је

$$-1 \le a_k - \frac{k}{k-1} a_{k-1} \le 1.$$

Пошто је $-\dfrac{1}{k} \le a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \le \dfrac{1}{k}$, слиједи да је

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k} a_k \ge 2a_k - a_{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{k+1}{k} a_k = \frac{k-1}{k} a_k - a_{k-1} - \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{k-1}{k} \left(a_k - \frac{k}{k-1} a_{k-1} \right) - \frac{1}{k} \ge \frac{k-1}{k} \cdot (-1) - \frac{1}{k} = -1;$$

$$a_{k+1} - \frac{k+1}{k} a_k \le 2a_k - a_{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{k+1}{k} a_k = \frac{k-1}{k} a_k - a_{k-1} + \frac{1}{k} =$$

$$= \frac{k-1}{k} \left(a_k - \frac{k}{k-1} a_{k-1} \right) + \frac{1}{k} \le \frac{k-1}{k} \cdot 1 + \frac{1}{k} = 1,$$

чиме је неједнакост (4) доказана.

б) На основу неједнакости (1) је

$$ka_{k+1} - k \le (k+1)a_k \le ka_{k+1} + k,$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{k+1} \le a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{k+1}\,, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Нека је $a_n = 0$. Из (4) за $k = n-1$ добијамо да је

$$\text{(6)} \qquad -\frac{n-1}{n} \le a_{n-1} \le \frac{n-1}{n}\,.$$

Неједнакост

$$\text{(7)} \qquad -k \ln \frac{n}{k} < a_k < k \ln \frac{n}{k}\,, \quad k = 1,\, 2, \ldots, n-1,$$

доказујемо математичком индукцијом по $k = n-1,\, n-2,\, \ldots,\, 1$. Из (6) слиједи да ово тврђење важи за $k = n-1$, пошто је

$$|a_{n-1}| \le \frac{n-1}{n} < (n-1) \ln \frac{n}{n-1}.$$

Претпоставимо да оно важи за $k+1$ $(k+1 \le n-1)$, тј. да је

$$-(k+1) \ln \frac{n}{k+1} < a_{k+1} < (k+1) \ln \frac{n}{k+1}\,.$$

Тада на основу (5) добијамо да је

$$a_k \le \frac{k}{k+1}a_{k+1} + \frac{k}{k+1} \le \frac{k}{k+1} \cdot (k+1) \ln \frac{n}{k+1} + \frac{k}{k+1} =$$

$$= k\left(\ln \frac{n}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) < k \ln \frac{n}{k}\,;$$

$$a_k \ge \frac{k}{k+1}a_{k+1} - \frac{k}{k+1} \ge -\frac{k}{k+1} \cdot (k+1) \ln \frac{n}{k+1} - \frac{k}{k+1} =$$

$$= -k\left(\ln \frac{n}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) > -k \ln \frac{n}{k}\,,$$

чиме је неједнакост (7) доказана.

(Овдје смо два пута примијенили неједнакост $\ln \dfrac{n}{k+1} + \dfrac{1}{k+1} < \ln \dfrac{n}{k}$, која је еквивалентна са $\dfrac{1}{k+1} < \ln (k+1) - \ln k$, и важи на основу неједнакости (3).)

Задатке припремили: Видан Говедарица и Марко Ћитић.