23. РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА РЕПУБЛИКЕ СРПСКЕ

Бања Лука, 9. април 2016.

ЗАДАЦИ

ПРВИ РАЗРЕД

1. Студент је за 5 година студија положио 31 испит, при чему је сваке године (почев од друге) положио више испита него претходне године. У петој години он је положио три пута више испита него у првој години. Колико је испита он положио у четвртој години студија?

2. Нека су a, b, c позитивни бројеви такви да је $ab+bc+ca=1$. Доказати да је

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

3. Нека је ABC оштроугли троугао ($AC < BC$) са полупречником описане кружнице R. Нека је D подножне висине из тачке A на BC. Означимо са T тачку на правој AD, такву да је $AT = 2R$, при чему је тачка D између тачака A и T, а са S средиште лука BC кружнице описане око троугла ABC, који не садржи тачку A. Доказати да је $\angle AST = 90°$.

4. Да ли постоји пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ бројева $1, 2, 3, \ldots, n$ тако да за свако $k = 2, 3, \ldots, n$ важи $k \mid a_{k-1} + a_k$, ако је

(a) $n = 10$,

(b) $n = 11$?

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом у тјемену C. Нека је BK симетрала унутрашњег угла у тјемену B ($K \in AC$). Круг описан око троугла AKB сијече страницу BC у тачки L. Доказати да је $CB + CL = AB$.

2. Нека су x, y, z ненегативни бројеви такви да је $x + y + z = 1$. Доказати да важи неједнакост

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2(xy + yz + zx) \geq \frac{3}{4}\,.$$

Када у овој неједнакости важи знак једнакости?

3. У таблицу димензија 7×7 уписани су реални бројеви, тако да је производ бројева у било ком квадрату димензија 3×3, једнак производу бројева у било ком квадрату 4×4. Да ли је могуће да производ свих бројева у таблици буде једнак 2016?

4. Ако су m и n природни бројеви за које важи

$$7m^2 + 7m + 2 = n^2,$$

доказати да је број $n+1$ једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x^2) + f(xy) = f(f(x+y)).$$

2. За округлим столом сједи 2016 људи, од којих је сваки или *истинољубив*, ако увијек говори истину, или *лажов*, ако увијек лаже. Сваком од њих је дата по једна картица на којој је написан један природан број. Бројеви написани на картицама су различити. Након што су погледали своје бројеве и бројеве својих сусједа (по једног са лијеве и десне стране), сваки од ових људи је рекао: ,,Мој број је већи од оба броја мојих сусједа". Послије тога k људи је рекло: ,,Мој број је мањи од оба броја мојих сусједа". Наћи највећу могућу вриједност броја k.

3. Ако су m и n природни бројеви за које важи

$$7m^2 + 7m + 8 = n^2,$$

доказати да је број $\dfrac{n}{5} + 1$ једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

4. Нека је H ортоцентар оштоуглог троугла ABC. Права која садржи тачку A и нормална је на AC и права која садржи тачку B и нормална је на BC, сијеку се у тачки D. Круг са центром у тачки C, који садржи тачку H, сијече круг описан око троугла ABC у тачкама E и F. Доказати да је $DE = DF = AB$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(x+y)f(y) = f(x + xf(y)).$$

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Нека је ABC оштроугли троугао, AD симетрала угла $\angle BAC$ ($D \in BC$), и E и F ортогоналне пројекције тачке D на AB и AC, редом. Нека је $CE \cap BF = \{K\}$ и нека BF сијече круг описан око троугла AEK у тачки L ($L \neq K$). Доказати да је $BF \perp DL$.

РЈЕШЕЊА

ПРВИ РАЗРЕД

1. *Одговор:* 8. Нека је прве године студент положио x испита. Тада је у другој години положио бар $x+1$ испит, у трећој бар $x+2$ испита и у четвртој години бар $x+3$ испита. У петој години он је положио $3x$ испита, тако да је у четвртој положио највише $3x-1$, у трећој највише $3x-2$ и у другој години највише $3x-3$ испита. Тада је по услову задатка

$$x+x+1+x+2+x+3+3x \leq 31 \leq x+3x-3+3x-2+3x-1+3x,$$

$$7x+6 \leq 31 \leq 13x-6.$$

Како је x цио број из неједнакости $7x+6 \leq 31$ добијамо да је $x \leq 3$, а из неједнакости $31 \leq 13x-6$ да је $x \geq 3$. Дакле, $x=3$ па је студент у четвртој години могао да положи од $x+3=6$ до $3x-1=8$ испита.

Ако је у четвртој години положио 6 или 7 испита, онда је укупан број положених испита највише $9+7+6+5+3=30$, што је мање од 31. Дакле, студент је у четвртој години положио 8 испита, при чему је по годинама студија полагао редом 3, 4, 6, 8, 9 испита.

2. Примијетимо да је

$$a+\frac{1}{a}=a+\frac{ab+bc+ca}{a}=a+b+c+\frac{bc}{a}.$$

Одавде је, на основу неједнакости измађу аритметичке и геометријске средине

$$a+\frac{1}{a} \geq b+c+2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2,$$

па је $\sqrt{a+\frac{1}{a}} \geq \sqrt{b}+\sqrt{c}$. Аналогно је $\sqrt{b+\frac{1}{b}} \geq \sqrt{c}+\sqrt{a}$ и $\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}$. Сабирањем ове три неједнакости добијамо да је

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

3. Нека је $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$. Означимо са O центар круга описаног око троугла ABC. Пошто је $AC < AB$, то је $\beta < \gamma$. Нека је E тачка која је дијаметрално супротна тачки A. Јасно је да је $\angle AOB = 2\gamma$ и

$$\angle EAS = \angle BAS - \angle BAO = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ.$$

Такође је

$$\angle SAT = \angle SAC - \angle DAC = \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \angle ACD) = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ,$$

па је $\angle EAS = \angle SAT$. Како је $AE = AT = 2R$ слиједи да је $\triangle AST \cong \triangle ASE$, па је $\angle ASE = \angle AST$. Пошто је $\angle ASE = 90^\circ$ слиједи да је $\angle AST = 90^\circ$.

4. (a) *Одговор: Не постоји.* Претпоставимо супротно. Тада

$$2 \mid a_1 + a_2, \quad 4 \mid a_3 + a_4, \quad 6 \mid a_5 + a_6, \quad 8 \mid a_7 + a_8, \quad 10 \mid a_9 + a_{10},$$

па су бројеви $a_1 + a_2$ $a_3 + a_4$, $a_5 + a_6$, $a_7 + a_8$ и $a_9 + a_{10}$ парни. Због тога је паран и њихов збир

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55.$$

Контрадикција.

(b) *Одговор: Постоји.* Исписујемо такав низ a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_{11}$, редом од посљедњег члана a_{11} до првог члана a_1. Распоредимо наизмјенично бројеве $4, 3, 2, 1$ и $7, 6, 5$ здесна налијево: $1, 5, 2, 6, 3, 7, 4$ тако да они представљају посљедњих 7 чланова низа. Тада ће важити

$$a_{k-1} + a_{k-2} = k, \quad k = 6, 7, \ldots, 11.$$

Даље овом низу дописујемо слијева преостала четири члана $8, 9, 10, 11$, сљедећим реослиједом $9, 11, 10, 8$. Добијамо тражени низ

$$8, 10, 11, 9, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4.$$

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека је N тачка на полуправој BC, таква да је $CN = CL$, при чему се тачка C налази између тачака N и L. Тада је $CB + CL = NB$ па је потребно доказати да је $AB = NB$. Како је

$$\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle ALB = \angle ALC$$

и $\triangle ACL \cong \triangle ACN$, слиједи да је

$$\angle ANC = \angle ALC = \angle CKB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B\,.$$

Из троугла ABN је

$$\angle BAN = 180^\circ - \angle B - \angle ANB = 180^\circ - \angle B - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle B) =$$

$$= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B = \angle ANB.$$

Одавде добијамо да је $AB = NB$.

2. Како је

$$2(xy+yz+zx) = x(y+z)+y(z+x)+z(x+y) = x(1-x)+y(1-y)+z(1-z) =$$

$$= x+y+z-x^2-y^2-z^2 = 1-x^2-y^2-z^2,$$

треба доказати да је

$$x^3+y^3+z^3+1-x^2-y^2-z^2 \geq \frac{3}{4}\,,$$

$$x^3+y^3+z^3-x^2-y^2-z^2+\frac{1}{4} \geq 0,$$

$$x^3+y^3+z^3-x^2-y^2-z^2+\frac{1}{4}(x+y+z) \geq 0.$$

Посљедња неједнакост важи јер је еквивалентна редом са

$$x^3-x^2+\frac{1}{4}x+y^3-y^2+\frac{1}{4}y+z^3-z^2+\frac{1}{4}z \geq 0,$$

$$x(x-\frac{1}{2})^2+y(y-\frac{1}{2})^2+z(z-\frac{1}{2})^2 \geq 0.$$

Једнакост важи ако су сви сабирци на лијевој страни посљедње неједнакости једнаки нули, тј. уз услов $x+y+z=1$, ако је

$$(x,y,z) \in \{(1/2,1/2,0),(1/2,0,1/2),(0,1/2,1/2)\}.$$

3. *Одговор: Могуће је.* Нека су a и b реални бројеви за које важи $ab = 1$. Посматрајмо сљедећу таблицу

a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a
b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1
a	b	a	b	a	b	a

Очигледно је да је производ бројева у сваком квадрату димењија 3×3 и 4×4 једнак 1. Како је производ свих бројева у таблици једнак a, могуће је да производ бројева у таблици буде било који реалан број, различит од нуле, па и 2016.

4. Претпоставимо да за природне бројеве m и n важи $7m^2 + 7m + 2 = n^2$. Множењем ове једнакости са 4 добијамо редом

$$7(4m^2+4m+1)+1 = 4n^2, \quad 7(2m+1)^2 = 4n^2-1, \quad 7(2m+1)^2 = (2n-1)(2n+1).$$

Како су бројеви $2n-1$ и $2n+1$ узајамно прости, одавде слиједи да имамо сљедећа два случаја.

1° $2n-1 = a^2$, $2n+1 = 7b^2$, за неке цијеле (непарне) бројеве a и b. Одузимањем ове двије једнакости добијамо да је $7b^2 - a^2 = 2$, одакле слиједи да је $a^2 \equiv 5 \pmod 7$. Контрадикција.

2° $2n+1 = a^2$, $2n-1 = 7b^2$, за неке непарне бројеве a и b. Из $2n+1 = (2k+1)^2$ слиједи да је $n = 2k^2 + 2k$, па је $n+1 = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$, што је и требало доказати.

Примједба. Најмањи парови (m, n) природних бројева за које важи $7m^2 + 7m + 2 = n^2$ су $(m_1, n_1) = (1, 4)$ и $(m_2, n_2) = (382, 1012)$. При томе је

$$n_1 + 1 = 5 = 1^2 + 2^2 \text{ и } n_2 + 1 = 1013 = 22^2 + 23^2.$$

ТРЕЋИ РАЗРЕД

1. Ако уврстимо $x = 0$ и $y = a$ добијамо да је $2f(0) = f(f(a))$ за све $a \in \mathbb{R}$, па је

$$2f(0) = f(f(x+y)) = f(x^2) + f(xy).$$

Уврштавајући овдје $x = 1$ добијамо да је

$$2f(0) = f(1) + f(y), \quad \text{тј.} \quad f(y) = 2f(0) - f(1)$$

па је f константна функција, тј. $f(x) = C$. Даље, уврштавањем у полазну једначину добијамо да је $C = 0$, тј. $f(x) \equiv 0$ је једино рјешење.

2. Уочимо човјека који је добио картицу са највећим бројем и човјека који је добио картицу са најмањим бројем. Након прве изјаве уочавамо да је први истинољубив, а други лажов, па они не могу бити међу ових k људи (јер је немогуће да је друга изјава истинољубивог тачна, а лажова нетачна). Дакле, $k \leq 2014$. Вриједност $k = 2014$ се може постићи, на примјер у случају када су људима подијељене картице са бројевима $1, 2, 3, \ldots, 2016$ у смјеру кретања казаљке на сату, при чему је картица са бројем 2016 дата истинољубивом, а остале лажовима.

3. Претпоставимо да за природне бројеве m и n важи $7m^2+7m+8=n^2$. Множењем ове једнакости са 4 добијамо редом

$$7(4m^2+4m+1)+25=4n^2,\quad 7(2m+1)^2=4n^2-25,\quad 7(2m+1)^2=(2n-5)(2n+5).$$

Нека је $(2n-5,2n+5)=d$. Имамо сљедећа два случаја.

1° $d=1$. Имамо двије могућности:

1) $2n-5=7a^2$, $2n+5=b^2$, за неке цијеле (непарне) бројеве a и b. Одузимањем добијамо да је $b^2-7a^2=10$, одакле слиједи да је $b^2\equiv 3 \pmod 7$. Контрадикција.

2) $2n-5=a^2$, $2n+5=7b^2$, за неке непарне бројеве a и b. Одузимањем добијамо да је $7b^2-a^2=10$. Како је $a^2\equiv 1 \pmod 8$ и $b^2\equiv 1 \pmod 8$, слиједи да је $7b^2-a^2\equiv 6 \pmod 8$, па не може бити $7b^2-a^2=10$. Контрадикција.

2° $d=5$. Опет имамо двије могућности:

1) $2n-5=5a^2$, $2n+5=5\cdot 7b^2$, за неке цијеле (непарне, узајамно просте) бројеве a и b. Одузимањем добијамо да је $5(7b^2-a^2)=10$, тј. $7b^2-a^2=2$, одакле слиједи да је $a^2\equiv 5 \pmod 7$. Контрадикција.

2) $2n-5=5\cdot 7a^2$, $2n+5=5b^2$, за неке непарне природне бројеве a и b. Из $2n+5=5(2k+1)^2$ слиједи да је $n=10k^2+10k$, па је

$$\frac{n}{5}+1=2k^2+2k+1=k^2+(k+1)^2,$$

што је и требало доказати.

Примједба 1. Најмањи парови (m,n) природних бројева за које важи $7m^2+7m+8=n^2$ су $(m_1,n_1)=(7,20)$ и $(m_2,n_2)=(1912,5060)$. При томе је

$$\frac{n_1}{5}+1=5=1^2+2^2 \quad\text{и}\quad \frac{n_2}{5}+1=1013=22^2+23^2.$$

Примједба 2. Овај задатак се може свести на задатак 4 за други разред на сљедећи начин. Гледајући остатке при дијељењу са 5 добијамо да $7m^2+7m+8\equiv 0 \pmod 5$ ако је $m\equiv 2 \pmod 5$, а у свим осталим случајевима је $7m^2+7m+8\equiv 2 \pmod 5$ или $7m^2+7m+8\equiv 3 \pmod 5$. Дакле, из $7m^2+7m+8=n^2$ слиједи да је $m=5a+2$, $a\in\mathbb{N}$. Замјеном $m=5a+2$ у ову једначину добијамо да је $7(5a+2)^2+7(5a+2)+8=n^2$, одакле је након сређивања $25(7a^2+7a+2)=n^2$. Слиједи да је $n=5b$, $b\in\mathbb{N}$, тј. $7a^2+7a+8=b^2$.

4. Како је троугао ABC оштроугли, тачка H се налази у унутрашњости овог троугла. То значи да се тачке E и F налазе на краћим луковима AC и BC, редом. Нека је H' осносиметрична тачка тачки H у односу на праву AC.

Познато је да H' припада кружници описаној око троугла ABC. Како је $CH = CH'$, слиједи да се тачка H' налази на кружници са центром у тачки C полупречника CH, па је $H' = E$. Како је $EH \perp AC$ и $BH \perp AC$, слиједи да су тачке B, H и E колинеарне. Како је $AD \perp AC$, слиједи да је $BE \parallel AD$.

Такође, како је $\angle CAD + \angle CBD = 90° + 90° = 180°$, слиједи да се тачка D налази на кружници описаној око троугла ABC. Сада имамо да је четвороугао $EADB$ тетиван. Како је $BE \parallel AD$ слиједи да је $\angle BEA + \angle EAD = 180°$. Из тетивности четвороугла $EADB$ слиједи да је $\angle EBD + \angle EAD = 180°$, па је $\angle BEA = \angle EBD = 180°$, тј. $BA = ED$. Аналогно се показује да је $BA = DF$.

ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Стављајући $x = y = 0$ добијамо да је $f(0)^2 = f(0)$ па је $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. Стављајући $x = 0$ добијамо да је $f(y)^2 = f(0)$.

Ако је $f(0) = 0$, слиједи да је $f(y) = 0$ за све $y \in \mathbb{R}$.

Ако је $f(0) = 1$, слиједи да је $f(y) = 1$ или $f(y) = -1$. Ако би било $f(y) = -1$, стављајући $x = -a$, $y = a$ добијамо да је $f(0) \cdot f(a) = f(0)$, што је немогуће.

Дакле, једина рјешења су $f(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 1$, што се лако провјерава.

2. Исти као задатак 2 за трећи разред.

3. Исти као задатак 3 за трећи разред.

4. Нека је $\{H\} = AK \cap BC$. По Чевиној теореми је $\dfrac{AE}{BE} \cdot \dfrac{BH}{HC} \cdot \dfrac{CF}{AF} = 1$. Али, како је AD симетрала угла α, имамо $AE = AF$ па је $\dfrac{BH}{HC} \cdot \dfrac{CF}{BE} = 1$. Даље је, $CF = \dfrac{DF}{\operatorname{tg}\gamma}$ и $BE = \dfrac{DE}{\operatorname{tg}\beta}$, па како је $DF = DE$ имамо да је $\dfrac{CF}{BE} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$. Због тога је и $\dfrac{BH}{HC} = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$ па је H подножје висине из тјемена A на страницу BC.

Сада је $\angle EAK = 90° - \beta$, одакле је $\angle ELB = 90° - \beta$, па како је и $\angle EDB = 90° - \beta$ слиједи да је четвороугао $BELD$ тативан, одакле је $\angle DLB = \angle DEB = 90°$, па је $BF \perp DL$.

Задатке припремили: Видан Говедарица и Марко Ћитић.