

## Dodatno takmičenje za izbor 6. člana ekipe BiH za BMO i IMO 2018

Sarajevo, 23.4.2018.

1. Naći sve funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da za sve realne brojeve  $x, y$  vrijedi
$$(x - 2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x)).$$
2. Neka je  $M$  skup svih prirodnih brojeva  $k$  za koje postoji prirodan broj  $n$  takav da je  $k$  ostatak dijeljenja broja  $3^n$  pri dijeljenju sa  $n$ . Dokazati da je  $M$  beskonačan skup.
3. Tačke  $M$  i  $N$  su sredine osnovica  $AB$  i  $CD$  trapeza u kojem je  $AD = BC = c$ . Simetrale uglova  $\sphericalangle CAD$  i  $\sphericalangle ACB$  sijeku pravu  $MN$  u tačkama  $P$  i  $Q$  redom. Ako su  $K$  i  $L$  podnožja normala iz tačkama  $P$  i  $Q$  na pravu  $AC$ , dokazati da tačke  $K, L, M, N$  pripadaju jednoj kružnici te odrediti poluprečnik te kružnice.
4. Neka je  $n \geq 3$  prirodan broj. Naći broj rasporeda  $a_1, a_2, \dots, a_n$  brojeva  $1, 2, \dots, n$  na krug tako da vrijedi
  - a)  $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_n - a_1| = 2n - 2;$
  - b)  $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_n - a_1| = 4n - 3.$

**Vrijeme za rad je 270 minuta!**  
**Svaki zadatak vrijedi 7 bodova!**