Изборно такмичење за Европску женску математичку олимпијаду(Босна и Херцеговина)

Сарајево, 10. 2. 2018. године

1.

a) Доказати да постоји 5 ненегативних реалних бројева чија је сума једнака 1 таквих да како год распоредили ових 5 бројева око круга, постоје два сусједна броја чији производ није мањи од $\frac{1}{9}$.

b) Доказати да је било којих 5 ненегативних реалних бројева чија је сума једнака 1 могуће распоредити око круга тако да производ свака два сусједна броја није већи од $\frac{1}{9}$.

2. Доказати да за све парове природних бројева (m, n) већих од 2 постоји природан број k и бројеви $a_0, a_1, \ldots, a_k$ који су већи од 2 такви да је $a_0 = m, a_k = n$ и за све $i = 0,1, \ldots, k-1$ вриједи

$$\mathrm{a_i} + \mathrm{a_{i+1}} | \mathrm{a_i a_{i+1}} + 1.$$

3. Нека је O центар описаног круга оштроуглог троугла ABC и нека су O_1 и O_2 центри описаних кругова троуглова OAB и OAC, редом. Кругови описани око троуглова OAB и OAC сијеку BC у тачкама $D(D \neq B)$ и $E(E \neq C)$, редом. Симетрала странице BC сијече AC у тачки $F(F \neq A)$. Доказати да се центар описаног круга троугла ADE налази на AC ако и само ако тачка F припада правој O_1O_2.

4. Дат је природан број n. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (не нужно различити) природни бројеви чија је сума $2S$ (S је природан број). Природан број k се зове сепаратор, ако се може изабрати k различитих индекса $i_1, i_2, \ldots, i_k$ из скупа $\{1,2, \ldots, n\}$ таквих да је $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} = S$. Колики је максимални број сепаратора (у зависности од n)?

Вријеме за израду задатака је 240 минута.

Сваки задатак вриједи 7 бодова.

С Р Е Ћ Н О !

Izborno takmičenje za Evropsku žensku matematičku olimpijadu učenika Bosne i Hercegovine

Sarajevo, 10. 2. 2018. godine

1.

a) Dokazati da postoji 5 nenegativnih realnih brojeva čija je suma jednaka 1 takvih da kako god rasporedili ovih 5 brojeva na krugu, postoje dva susjedna čiji proizvod nije manji od $\frac{1}{9}$.

b) Dokazati da je bilo kojih 5 nenegativnih realnih brojeva čija je suma jednaka 1 moguće rasporediti na krug tako da proizvod svaka dva susjedna nije veći od $\frac{1}{9}$.

Rješenje:

a) Posmatrajmo brojeve $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0$. Kako god ih rasporedili na krug, dva koja su jednaka $\frac{1}{3}$ će biti susjedni. Proizvod ta dva će biti najmanje $\frac{1}{9}$, što je trebalo dokazati.

b) Neka su to brojevi x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 i neka vrijedi $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5$. Postavimo te brojeve u smjeru kazaljke na satu redoslijedom x_1, x_5, x_2, x_3, x_4. Pošto vrijedi $x_1 x_5 \leq x_1 x_4$, $x_2 x_5 \leq x_2 x_3$ i $x_3 x_4 \leq x_2 x_3$, Dovoljno je dokazati da vrijedi $x_1 x_4 \leq \frac{1}{9}$ i $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$.

Dokažimo prvo $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$. Ukoliko je $x_1 \leq \frac{1}{3}$, tada je $x_2 \leq \frac{1}{3}$ i $x_3 \leq \frac{1}{3}$ pa očigledno vrijedi $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$. Ako je $x_1 > \frac{1}{3}$, tada je $x_2 + x_3 < \frac{2}{3}$ pa vrijedi $\sqrt{x_2 x_3} \leq \frac{x_2 + x_3}{2} < \frac{1}{3}$, odnosno $x_2 x_3 \leq \frac{1}{9}$.

Sada dokažimo $x_1 x_4 \leq \frac{1}{9}$. Pretpostavimo suprotno, $x_1 x_4 > \frac{1}{9}$. Tada je i $x_1 x_2 \geq x_1 x_3 \geq x_1 x_4 > \frac{1}{9}$, pa vrijedi $x_1(x_2 + x_3 + x_4) > \frac{1}{3}$.

Sada iz AG nejednakosti $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} \geq \sqrt{x_1(x_2 + x_3 + x_4)} > \sqrt{\frac{1}{3}}$ iz čega slijedi

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > \sqrt{\frac{4}{3}} > 1$, kontradikcija.

2. Dokazati da za sve parove prirodnih brojeva (m, n) većih od 2 postoji prirodan broj k i brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_k$ koji su veći od 2 takvi da je $a_0 = m, a_k = n$ i za sve $i = 0,1, \ldots, k-1$ vrijedi

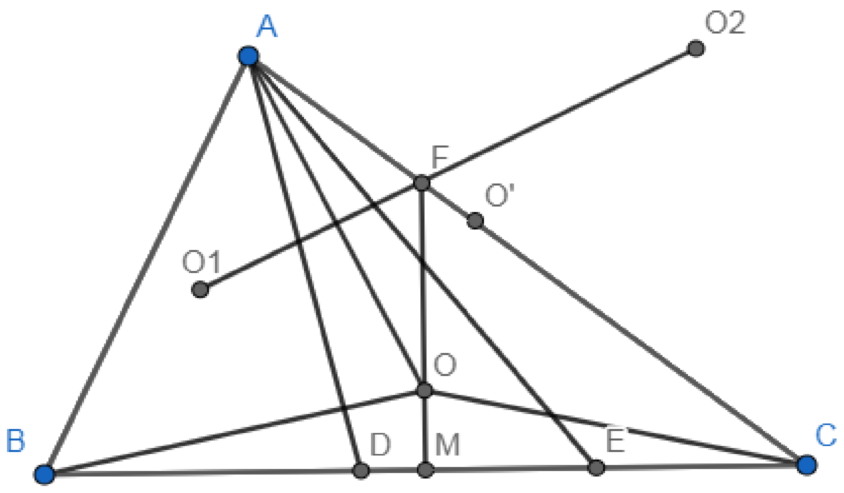
$$a_i + a_{i+1} | a_i a_{i+1} + 1.$$

Rješenje:

Ukoliko za brojeve m i n vrijedi uslov zadatka kažemo da su m i n povezani.
Primijetimo da vrijedi $2k-1+2k+1 \mid (2k-1)(2k+1)+1$, pa koristeći ovo za $k = 2,3, \ldots$. dobijamo da su svaka dva neparna prirodna broja veća od 2 povezana.
Sada je dovoljno dokazati za svaki paran broj $2a$ veći od 2 postoji neparan prirodan broj $2b-1$ veći od 2 takav da vrijedi $2a+2b-1 \mid 2a(2b-1)+1 = 4ab-2a+1$ (1). Pošto $2a+2b-1 \mid 2a(2a+2b-1) = 4a^2+4ab-2a$, dobijamo da je (1) ekvivalentno sa $2a+2b-1 \mid 4a^2-1$. Primijetimo da za $b = 2a^2 - a > 2$ ovo vrijedi, pa je svaki paran broj $2a$ povezan sa jednim neparnim brojem $(2(2a^2-a)-1)$ iz čega slijedi da su svi prirodni brojevi veći od 2 povezani, što je trebalo dokazati.

3. Neka je O centar opisanog kruga oštrouglog trougla ABC i neka su O_1 i O_2 centri opisanih krugova trouglova OAB i OAC, redom. Krugovi opisani oko trouglova OAB i OAC sijeku BC u tačkama $D(D \neq B)$ i $E(E \neq C)$, redom. Simetrala stranice BC siječe stranicu AC u tački $F(F \neq A)$. Dokazati da se centar opisanog kruga trougla ADE nalazi na AC ako i samo ako tačka F pripada pravoj O_1O_2.

Rješenje:



Neka je M sredina BC i O' centar opisane kružnice trougla ADE. Tada je

$$\angle O'AE = \frac{1}{2}\big(180^\circ - (360^\circ - 2\angle ADE)\big) = \angle ADE - 90^\circ = 90^\circ - \angle ADB =$$
$$= 90^\circ - \angle AOB = 90^\circ - 2\angle ACB.$$

Odatle imamo

$$\angle CAE = \angle OAC - \angle OAE = (90^\circ - \angle ABC) - \angle OCB =$$
$$= (90^\circ - \angle ABC) - (90^\circ - \angle BAC) = \angle BAC - \angle ABC.$$

Dakle, $O' \in AC$ ako i samo ako $90^\circ - 2\angle ACB = \angle BAC - \angle ABC$. Primijetimo da

$$F \in O_1O_2 \Leftrightarrow AF = OF \Leftrightarrow \angle OAF = \angle AOF$$
$$\Leftrightarrow 90^\circ - \angle ABC = \angle AOC + \angle COM - 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow 90^\circ - \angle ABC = 2\angle ABC + \angle BAC - 180^\circ$$
$$\Leftrightarrow 180^\circ - \angle BAC - 3\angle ABC = 90^\circ$$
$$\Leftrightarrow \angle BAC - \angle ABC + 2\angle ACB = 90.$$

Dakle, imamo da $O' \in AC$ ako i samo ako $F \in O_1O_2$.

4. Dat je prirodan broj n. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ne nužno različiti) prirodni brojevi čija je suma $2S$ (S je prirodan broj). Prirodan broj k se zove separator ako se može izabrati k različitih indeksa $i_1, i_2, \ldots, i_k$ iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ takvih da je $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} = S$. Koliki je maksimalan broj separatora (u zavisnosti od n)?

Rješenje:

Primijetimo da ako je broj k separator, onda je i broj $n-k$ separator. Također, primijetimo da ako je broj 1 separator, onda nijedan drugi broj osim $n-1$ ne može biti separator. Dakle, broj separatora je sigurno manji ili jednak od $\max\{n-3,2\}$ ($n-3$ je maksimum za slučaj kad 1 nije separator, a 2 je maksimum ako 1 jeste separator). Označimo sa x_n traženi maksimum. Očigledno je $x_1 = 0, x_2 = 1$ (npr. brojevi 1,1), $x_3 = 2$ $(npr. 1,2,3), x_4 = 2$ $(1,2,3,6)$. Dokažimo da je za $n \geq 5$ $x_n = n - 3$. Već smo dokazali da je $x_n \leq n-3$ $(2 \leq n-3\ za\ n \geq 5)$.

Za $n = 2k$ možemo uzeti brojeve

$$1,1,1,1,2,2,4,4,8,8,\ldots,2^{k-2},2^{k-2}.$$

Tada je $1+1+1+1+2+2+4+4+\cdots+2^{k-2}+2^{k-2} = 2^k$, pa je $S = 2^{k-1}$ što se može zapisati kao $2^{k-2}+2^{k-2} = 2^{k-2}+2^{k-3}+2^{k-3} = \cdots = 2^{k-2}+2^{k-3}+\cdots+2+1+1$.

Također, za $n = 2k+1$ uzmimo brojeve

$$1,1,2,2,2,4,4,\ldots,2^{k-1},2^{k-1}.$$

Tada je zbir brojeva $2S$ jednak 2^{k+1}, tj. $S = 2^k$, što se može zapisati kao $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-2} = \cdots = 2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2+1+1$.

Napomena: Primjeri iz rješenja (i neki slični primjeri) se mogu pronaći pokušavajući brojeve pronaći induktivno sa korakom 2. Naime, ako smo već za n našli brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ za koje su separatori $2,3,\ldots,n-2$, tada za $n+2$ ovim brojevima dodajemo dva jednaka broja $a_{n+1} = a_{n+2}$. Na ovaj način se sigurno svi brojevi od 3 do $n-1$ biti separatori (u prethodne podjele na zbirove sa jednakom sumom dodamo po jedan novi broj u oba zbira). Da bi broj 2 bio separator, dovoljno je uzeti da je $a_{n+1} = a_{n+2} = S$, gdje je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2S$, jer onda možemo uzeti samo brojeve a_{n+1} i a_{n+2}.