23. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

B I L T E N

Sarajevo, 21. – 22.04.2018. godine

Domaćin takmičenja: Udruženje matematičara Kantona Sarajevo i Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu

Organizator takmičenja: Udruga matematičara Ruđera Boškovića Mostar, Društvo matematičara Republike Srpske i Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

Mjesto održavanja takmičenja: Odsjek za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, Zmaja od Bosne 33, Sarajevo

Datum održavanja takmičenja: 21. i 22. aprila 2018. godine

Centralna takmičarska komisija:
1. prof. dr. Vidan Govedarica, Društvo matematičara Republike Srpske
2. Dina Kamber Hamzić, MA, Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
3. Niko Sušac, prof. mat., Udruga matematičara Ruđera Boškovića Mostar

Komisija za izbor zadataka:
1. Admir Beširević, BA, Udruženje matematičara Kantona Sarajevo
2. mr. Marko Ćitić, Društvo matematičara Republike Srpske
3. Momčilo Vujović, prof. mat., Udruga matematičara Ruđera Boškovića Mostar

Komisija za pregledanje radova:
1. Admir Beširević, BA, Odsjek za matematiku PMF-a Sarajevo
2. mr. Marko Ćitić, Katedra za matematiku Univerziteta u Istočnom Sarajevu
3. Harun Hindija, MA, Odsjek za matematiku PMF-a Sarajevo
4. Ana Jelić, prof. mat., Gimnazija Fra. Dominika Mandića, Široki Brijeg
5. Vedrana Madžarević, prof. mat., KŠC „Sv. Franjo“, Opća gimnazija Tuzla
6. Jelena Radović, MA, Katedra za matematiku Univerziteta u Istočnom Sarajevu
7. Momčilo Vujović, prof. mat., Kiseljak

**Slika na naslovnoj stranici: IMO logo*

Riječ domaćina

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo je ove godine domaćin Dvadeset i treće matematičke olimpijade Bosne i Hercegovine, koja predstavlja najprestižnije i najznačajnije takmičenje iz matematike učenika srednjih škola u Bosni i Hercegovini. I ove godine će takmičari rješavati šest zadataka u dva takmičarska dana. Šest najboljih među njima će početkom maja našu državu predstavljati na 35. balkanskoj matematičkoj olimpijadi u Beogradu, Srbija, te u julu ove godine na 59. međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u Cluj-Napoca, Rumunija. Narednih četvero najbolje plasiranih (od čega dvije djevojčice i dva dječaka) će učestvovati na petom po redu Mediteranskom omladinskom matematičkom takmičenju u Rimu, Italija, koje se održava krajem jula.

Svim takmičarima želimo da pamte ovo takmičenje ne samo po svom ličnom uspjehu, nego i po lijepom druženju sa svojim vršnjacima, a njihovim profesorima-pratiocima želimo da ovo takmičenje da podstrek za dalji kvalitetan rad na razvijanju matematičkog talenta kod učenika.

Udruženje matematičara Kantona Sarajevo

OSNOVNE PROPOZICIJE ZA TAKMIČARE

Pravo učešća imaju učenici srednjih škola koji su plasman ostvarili na takmičenjima iz matematike na nivou entiteta i distrikta u Bosni i Hercegovini u 2018. godini, a koja su organizirala Društvo matematičara Republike Srpske (15 učenika), Udruga matematičara Ruđera Boškovića Mostar (10 učenika), Odjeljenje za obrazovanje Brčko Distrikta (2 učenika) i Udruženje matematičara Kantona Sarajevo (20 učenika).

Pravo učešća imaju i učenici po osnovu rezultata ostvarenih na takmičenjima višeg ranga u 2017. i/ili 2018. godini (učešće na IMO – međunarodna matematička olimpijada, EGMO – Evropska matematička olimpijada za djevojke, BMO – balkanska matematička olimpijada, MYMC – mediteransko omladinsko matematičko takmičenje ili osvojena medalja na JBMO – juniorskoj balkanskoj matematičkoj olimpijadi), a koji iz objektivnih razloga nisu izborili plasman na ovogodišnjim takmičenjima (konačnu odluku o učešću ovih učenika donosi takmičarska komisija).

Takmičari/ke moraju biti državljani/ke Bosne i Hercegovine ili imati odobren boravak u Bosni i Hercegovini, biti mlađi od 20 godina starosti na dan 01.07.2018. godine, te pohađati redovno osnovno ili srednje obrazovanje na dan ili nakon 01.12.2017. godine.

Ove propozicije su u skladu sa članom 2.2 Općih pravila za učešće na IMO (zvanična stranica IMO https://www.imo-official.org/documents/RegulationsIMO.pdf).

PROGRAM 23. MATEMATIČKE OLIMPIJADE BOSNE I HERCEGOVINE

Subota, 21.04.2018. godine
08:00 – 09:30 Sastanak takmičarske komisije i izbor zadataka za I dan takmičenja
09:00 – 09:30 Dolazak i registracija takmičara (PMF Sarajevo)
09:30 – 10:00 Svečano otvaranje takmičenja (Amfiteatar „Mladen Dežalić“)
10:00 – 14:30 Izrada zadataka za I dan takmičenja (učionice 419/IV i 428/IV)
od 14:30 Pregledanje i ocjenjivanje radova

Nedjelja, 22.04.2018. godine
08:00 – 09:00 Sastanak takmičarske komisije i izbor zadataka za II dan takmičenja
09:00 – 13:30 Izrada zadataka za II dan takmičenja (učionice 419/IV i 428/IV)
od 13:30 Pregledanje i ocjenjivanje radova
oko 17:30 Nezvanični rezultati takmičenja (Odsjek za matematiku, IV sprat)
oko 18:30 Zvanični rezultati takmičenja i proglašenje pobjednika (Amfiteatar „Mladen Dežalić“)

SPISAK TAKMIČARA

1. Марко Јојић, први разред, Гимназија Бања Лука,
2. Сергеј Крчмар, први разред, Гимназија Бања Лука,
3. Алекса Турнић, први разред, Гимназија „Јован Дучић“, Требиње,
4. Алекса Сибиновић, први разред, ЕТШ „Никола Тесла“, Бања Лука,
5. Теодор Видаковић, први разред, Техничка школа „М. Пупин“, Бијељина,
6. Дејан Станковић, други разред, СШЦ Фоча,
7. Милица Пухало, други разред, Гимназија „Филип Вишњић“, Бијељина,
8. Душан Гарић, трећи разред, Гимназија „Јован Дучић“, Добој,
9. Дамјан Станковић, трећи разред, СШЦ Фоча,
10. Невена Радешић, трећи разред, СШЦ „Јован Дучић“, Теслић, (ЕГМО 18),
11. Дејан Пејић, трећи разред, Гимназија „Филип Вишњић“, Бијељина,
12. Драган Марковић, трећи разред, Гимназија „Филип Вишњић“, Бијељина,
13. Тијана Бабић, четврти разред, Гимназија Бања Лука, (ЕГМО 18),
14. Стефан Јурошевић, четврти разред, СШЦ „Милорад Влачић“, Власеница,
15. Јана Јанковић, четврти разред, Гимназија „Филип Вишњић“, Бијељина,
16. Amra Maglajčetović, prvi razred, SŠ Pere Zečevića Odžak,
17. Jelena Čolak, drugi razred, Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg,
18. Marija Matijević, treći razred, Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg,
19. Ivan Martinović, četvrti razred, Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg,
20. Iva Marić, treći razred, Gimnazija fra Grge Martića Mostar,
21. Ana Stojkić, treći razred, Gimnazija fra Grge Martića Mostar,
22. Ana Marija Vego, četvrti razred, Gimnazija fra Grge Martića Mostar,
23. Tin Mišić, treći razred, KŠC „Sv. Franjo“ Tuzla,
24. Gabrijela Galić, treći razred, Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg,
25. Boris Stanković, deveti razred, OŠ Safvet beg Bašagić Visoko, (JBMO 17),
26. Aldin Saračević, prvi razred, Međunarodna srednja škola Tuzla,
27. Faik Tahirović, drugi razred, Druga gimnazija Sarajevo
28. Lamija Biogradlija, drugi razred, Međunarodna srednja škola Zenica,
29. Boris Velašević, treći razred, Međunarodna srednja škola Sarajevo,
30. Benjamin Ramhorst, treći razred, Druga gimnazija Sarajevo,
31. Tarik Raljević, treći razred, Koledž ujedinjenog svijeta Mostar,
32. Hana Muslić, treći razred, Prva gimnazija Zenica,
33. Tarik Džaka, treći razred, Međunarodna srednja škola Sarajevo,
34. Nejla Subašić, treći razred, Druga gimnazija Sarajevo,
35. Lejla Skelić, treći razred, Međunarodna srednja škola Sarajevo,
36. Ivan Martinović, treći razred, Koledž ujedinjenog svijeta Mostar,
37. Adnan Šabanović, četvrti razred, Druga gimnazija Sarajevo,
38. Amar Kurić, četvrti razred, Međunarodna srednja škola Sarajevo,
39. Muamer Parić, četvrti razred, Druga gimnazija Sarajevo,
40. Milica Đokić, četvrti razred, Međunarodna srednja škola Sarajevo,
41. Elma Nuhanović, četvrti razred, Sarajevo koledž,
42. Dino Melunović, četvrti razred, Sarajevo koledž,
43. Sandro Paradžik, četvrti razred, Druga gimnazija Sarajevo,
44. Imran Kovač, četvrti razred, Međunarodna srednja škola Zenica.

23. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 21.04.2018. godine

PRVI DAN

Jezik: Bosanski

1. U oštrouglom trouglu ABC $(AB < AC)$ neka su D, E i F podnožja visina iz vrhova A, B i C, redom. Neka su P i Q tačke na pravoj EF takve da je $DP \perp EF$ i $BQ = CQ$. Dokazati da je $\angle ADP = \angle PBQ$.

2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$, k i M prirodni brojevi za koje vrijedi:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \;\; \text{i} \;\; a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$

Ako je $M > 1$, dokazati da izraz $M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$ nije jednak nuli ni za jedan pozitivan realan broj x.

3. Odrediti sve parove prirodnih brojeva a i b za koje se u vrhove pravilnog $(a+b)-$tougla može postaviti a jedinica i b nula tako da je brojeve koji su postavljeni u vrhovima tog mnogougla moguće zarotirati za neki ugao i da nakon rotacije u odnosu na početni položaj jedna susjedna jedinica i nula zamijene mjesta, a u svim ostalim vrhovima ostanu isti brojevi kao u početnom položaju.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

23. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 21.04.2018. godine

PRVI DAN

Jezik: Hrvatski

1. U šiljastokutnom trokutu ABC ($|AB| < |AC|$) neka su D, E i F nožišta visina iz vrhova A, B i C, redom. Neka su P i Q točke na pravcu EF tako da je $DP \perp EF$ i $|BQ| = |CQ|$. Dokazati da je $\angle ADP = \angle PBQ$.

2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$, k i M prirodni brojevi za koje vrijedi:
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{i} \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$
Ako je $M > 1$, dokazati da izraz $M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$ nije jednak nuli ni za jedan pozitivan realan broj x.

3. Odrediti sve parove prirodnih brojeva a i b za koje se u vrhove pravilnog $(a+b)-$terokuta može postaviti a jedinica i b nula tako da je brojeve koji su postavljeni u vrhovima tog mnogokuta moguće zarotirati za neki kut i da nakon rotacije u odnosu na početni položaj jedna susjedna jedinica i nula zamijene mjesta, a u svim ostalim vrhovima ostanu isti brojevi kao u početnom položaju.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

23. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 21.04.2018. године

ПРВИ ДАН

Језик: Српски

1. У оштроуглом троуглу ABC $(AB < AC)$ нека су D, E и F подножја висина из врхова A, B и C, редом. Нека су P и Q тачке на правој EF такве да је $DP \perp EF$ и $BQ = CQ$. Доказати да је $\angle ADP = \angle PBQ$.

2. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$, k и M природни бројеви за које вриједи:
$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{и} \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$
Ако је $M > 1$, доказати да израз $M\left(x+1\right)^k - \left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)\cdots\left(x+a_n\right)$ није једнак нули ни за један позитиван реалан број x.

3. Одредити све парове природних бројева a и b за које се у врхове правилног $(a+b)$ −тоугла може поставити a јединица и b нула тако да је бројеве који су постављени у врховима тог многоугла могуће заротирати за неки угао и да након ротације у односу на почетни положај једна сусједна јединица и нула замијене мјеста, а у свим осталим врховима остану исти бројеви као у почетном положају.

Вријеме за израду задатака: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

23. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 22.04.2018. godine

DRUGI DAN

Jezik: Bosanski

4. Svi kvadratići ploče 1000×1000 su obojeni crno ili bijelo. Poznato je da postoje kvadrat 10×10 čiji su svi kvadratići crni i kvadrat 10×10 čiji su svi kvadratići bijeli. Za svaki kvadrat K dimenzije 10×10 definišimo njegovu *moć* $m(K)$ kao apsolutnu vrijednost razlike broja crnih i bijelih polja u kvadratu K. Neka je T kvadrat 10×10 koji ima najmanju moć među svim kvadratima dimenzije 10×10 na datoj ploči. Odrediti najveću moguću vrijednost za $m(T)$.

5. Neka je p prost broj i neka je $M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$. Igrači A i B igraju igru, pri čemu igrač A igra prvi. Oni naizmjenično biraju broj i iz skupa $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ koji nije ranije odabran, te umjesto a_i upišu neku cifru (moguće i nulu). Cilj igrača A je da nakon završetka igre broj M bude djeljiv sa p. Dokazati da on ima pobjedničku strategiju.

6. Neka je O centar opisane kružnice oštrouglog raznostraničnog trougla ABC. Prava OA siječe visine trougla ABC, povučene iz vrhova B i C, u tačkama P i Q, redom. Ako je H ortocentar trougla ABC, dokazati da centar opisane kružnice trougla PQH leži na težišnici trougla ABC povučenoj iz vrha A.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

23. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 22.04.2018. godine

DRUGI DAN

Jezik: Hrvatski

4. Svi kvadratići ploče 1000×1000 su obojeni crno ili bijelo. Poznato je da postoje kvadrat 10×10 čiji su svi kvadratići crni i kvadrat 10×10 čiji su svi kvadratići bijeli. Za svaki kvadrat K dimenzije 10×10 definirajmo njegovu *moć* $m(K)$ kao apsolutnu vrijednost razlike broja crnih i bijelih polja u kvadratu K. Neka je T kvadrat 10×10 koji ima najmanju moć među svim kvadratima dimenzije 10×10 na danoj ploči. Odrediti najveću moguću vrijednost za $m(T)$.

5. Neka je p prost broj i neka je $M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$. Igrači A i B igraju igru, pri čemu igrač A igra prvi. Oni izmjenično biraju broj i iz skupa $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ koji nije ranije odabran, te umjesto a_i upišu neku cifru (moguće i nulu). Cilj igrača A je da nakon završetka igre broj M bude djeljiv sa p. Dokazati da on ima pobjedničku strategiju.

6. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog raznostraničnog trokuta ABC. Pravac OA siječe visine trokuta ABC, povučene iz vrhova B i C, u točkama P i Q, redom. Ako je H ortocentar trokuta ABC, dokazati da središte trokutu PQH opisane kružnice leži na težišnici trokuta ABC povučenoj iz vrha A.

Vrijeme za izradu zadataka: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

23. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 22.04.2018. године

ДРУГИ ДАН

Језик: Српски

4. Сви квадратићи табле 1000×1000 су обојени црно или бијело. Познато је да постоје квадрат 10×10 чији су сви квадратићи црни и квадрат 10×10 чији су сви квадратићи бијели. За сваки квадрат K димензије 10×10 дефинишимо његову *моћ* $m(K)$ као апсолутну вриједност разлике броја црних и бијелих поља у квадрату K. Нека је T квадрат 10×10 који има најмању моћ међу свим квадратима димензије 10×10 у датој табли. Одредити највећу могућу вриједност за $m(T)$.

5. Нека је p прост број и нека је $M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$. Играчи A и B играју игру, при чему играч A игра први. Они наизмјенично бирају број i из скупа $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ који није раније одабран, те умјесто a_i упишу неку цифру (могуће и нулу). Циљ играча A је да након завршетка игре број M буде дјељив са p. Доказати да он има побједничку стратегију.

6. Нека је O центар описаног круга оштроуглог разностраничног троугла ABC. Права OA сијече висине троугла ABC, повучене из тјемена B и C, у тачкама P и Q, редом. Ако је H ортоцентар троугла ABC, доказати да центар описаног круга троугла PQH лежи на тежишној линији троугла ABC повученој из тјемена A.

Вријеме за израду задатака: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

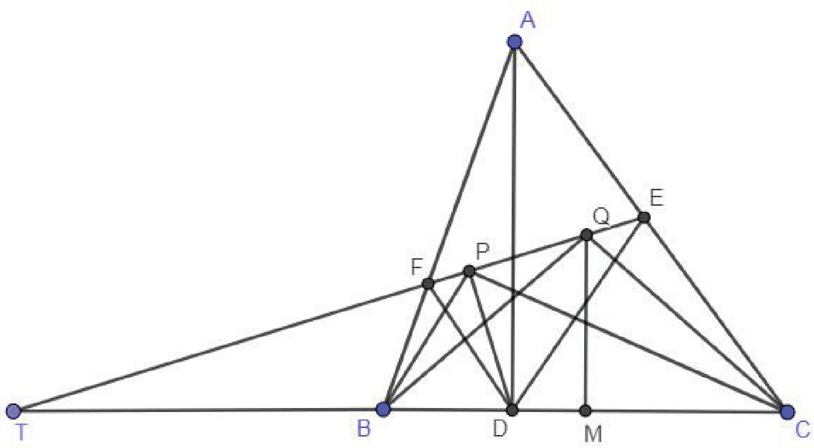
23. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 21.04.2018. godine

PRVI DAN - RJEŠENJA ZADATAKA

1. У оштроуглом троуглу ABC ($AB < AC$) нека су D, E и F подножја висина из врхова A, B и C, редом. Нека су P и Q тачке на правој EF такве да је $DP \perp EF$ и $BQ = CQ$. Доказати да је $\angle ADP = \angle PBQ$.

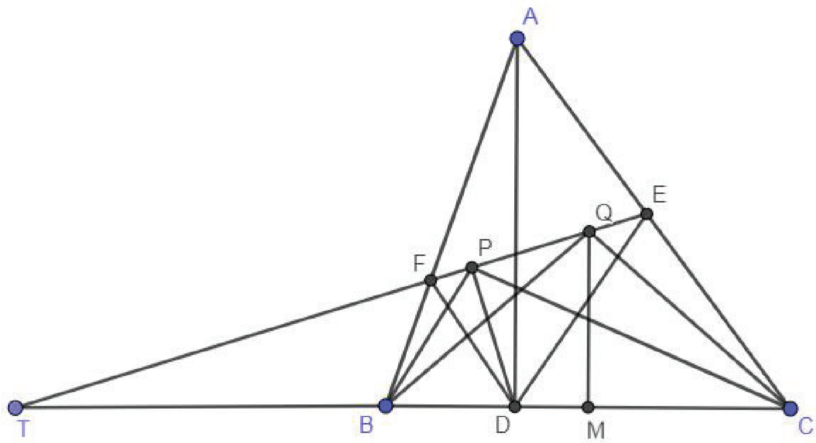
   Рјешење: Нека је M средина странице BC, а T пресјек правих BC и EF. Четвероугао $BCEF$ је тетивни (јер је $\angle BFC = \angle BEC = 90°$). Такођер, четвероугао $FDME$ је тетивни јер ове тачке припадају Ојлеровој кружници троугла ABC. Коначно, због $\angle QMD = \angle DPQ = 90°$ је и четвероугао $PDMQ$ тетивни. Из потенције тачке T у односу на ове кружнице вриједи $TB \cdot TC = TF \cdot TE = TD \cdot TM = TP \cdot TQ$, одакле слиједи да је четвероугао $BCQP$ тетивни.



   Примијетимо да је $\angle PBQ + \angle QBC = \angle PBC = \angle PTB + \angle TPB$, одакле због $\angle QBC = \angle QCB = 180 - \angle BPQ = \angle TPB$ вриједи $\angle PBQ = \angle PTD$. Коначно, вриједи $\angle PBQ = \angle PTD = 90 - \angle TDP = \angle PBQ = \angle PDA$, ш.т.д.

Rješenje:

Neka je M sredina stranice BC, a T presjek pravih BC i EF. Četverougao $BCEF$ je tetivni (jer je $\angle BFC = \angle BEC = 90°$). Također, četverougao $FDME$ je tetivni jer ove tačke pripadaju Ojlerovoj kružnici trougla ABC. Konačno, zbog $\angle QMD = \angle DPQ = 90°$) je i četverougao $PDMQ$ tetivni. Iz potencije tačke T u odnosu na ove kružnice vrijedi $TB \cdot TC = TF \cdot TE = TD \cdot TM = TP \cdot TQ$, odakle slijedi da je četverougao $BCQP$ tetivni.



Primijetimo da je $\angle PBQ + \angle QBC = \angle PBC = \angle PTB + \angle TPB$, odakle zbog $\angle QBC = \angle QCB = 180 - \angle BPQ = \angle TPB$ vrijedi $\angle PBQ = \angle PTD$. Konačno, vrijedi $\angle PBQ = \angle PTD = 90 - \angle TDP = \angle PBQ = \angle PDA$, q.e.d.

2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$, k i M prirodni brojevi za koje vrijedi:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{i} \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$

Ako je $M > 1$, dokazati da izraz $M\,(x+1)^k - (x+a_1)\,(x+a_2)\cdots(x+a_n)$ nije jednak nuli ni za jedan pozitivan realan broj x.

Rješenje:

Dokazat ćemo da je dati izraz negativan za sve pozitivne realne brojeve x, tj. da vrijedi $M(x+1)^k < (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)$. Primijetimo da je lijeva strana jednaka $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot (x+1)^{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} = a_1(x+1)^{\frac{1}{a_1}} \cdot a_2(x+1)^{\frac{1}{a_2}} \cdot ... \cdot a_n(x+1)^{\frac{1}{a_n}}$. Dokažimo da za svako i vrijedi $a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}} \leq (x+a_i)$. Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za a_i brojeva $x+1, 1, 1, ..., 1$ slijedi:

$x + a_i \geq a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}}$.

Množeći ove nejednakosti za svako i dobija se

$a_1(x+1)^{\frac{1}{a_1}} a_2(x+1)^{\frac{1}{a_2}} a_n(x+1)^{\frac{1}{a_n}} \leq (x+a_1)(x+a_2)...(x+a_n)$.

Međutim, kako je $x+1 > 1$ jednakost se dostiže samo kada su svi a_i jednaki 1, što je nemoguće zbog $M > 1$.

3. Odrediti sve parove prirodnih brojeva a i b za koje se u vrhove pravilnog $(a+b)-$tougla može postaviti a jedinica i b nula tako da je brojeve koji su postavljeni u vrhovima tog mnogougla moguće zarotirati za neki ugao i da nakon rotacije u odnosu na početni položaj jedna susjedna jedinica i nula zamijene mjesta, a u svim ostalim vrhovima ostanu isti brojevi kao u početnom položaju.

Rješenje:

Numerišimo polja mnogougla redom brojevima $1, 2, ..., a+b$. Dokažimo da parovi relativno prostih brojeva a i b zadovoljavaju uslove zadatka. Kako su a i b relativno prosti, to su i brojevi a i $a+b$ relativno prosti. Zbog toga postoji jedinstven prirodan broj $k < a+b$ takav da je $k \cdot a \equiv 1$ $(mod(a+b))$. Postavimo jedinice u polja $1, k+1, 2k+1, ..., (a-1)k+1$ (numeracija polja se uzima po modulu $a+b$. Primijetimo da nijedan od ovih brojeva nije kongruentan 2 po modulu $a+b$ (u suprotnom bi za neko $i < a$ vrijedilo $i \cdot k \equiv 1$ $(mod(a+b))$, što je nemoguće). Zbog toga se pri rotaciji za k mjesta zadnji broj slika u nulu koja je susjedna prvoj jedinici (jer se slika u mjesto numerisano brojem 2), dok se očigledno sve ostale jedinice slikaju u jedinicu. Jedino se u prvu jedinicu ne slika neka druga jedinica, što znači da se u nju slika neka nula, dok se sve ostale nule slikaju u nule. Zbog toga jedina dva broja koja su se promijenila su brojevi na mjestima 1 i 2, čime je dokaz završen. Dokažimo sada da se u slučaju da a i b nisu relativno prosti brojevi, jedinice i nule ne mogu rasporediti na traženi način. To ćemo dokazati na dva načina:

1. način: Pretpostavimo da je moguće rasporediti nule i jedinice na traženi način i da se rotacijom za k mjesta dobija tražena konfiguracija. Neka se bez umanjenja opštosti na mjestu 1 nalazi jedinica u koju se ne slika druga jedinica (već nula). Primijetimo da u nizu $1, k+1, 2k+1, ...$ moramo naići na nulu (u suprotnom bi ušli u ciklus jedinica koji bi morao sadržavati početnu jedinicu, što je nemoguće jer bi se prije nje morala pojaviti nula koja se slika u nju). Jasno je da ta nula mora biti susjedna početnoj jedinici. Neka je t broj jedinica u nizu prije pojavljivanja ove nule. Odatle je broj $t \cdot k$ kongruentan 1 ili -1 po modulu $a+b$, pa su t i k relativno prosti sa $a+b$. Zbog toga nije moguće da je $t = a$, pa postoje još neke jedinice osim ovih. Sve te jedinice se slikaju u jedinice, jer se samo jedna jedinica, zadnja iz niza od t jedinica slika u nulu. Znači da te jedinice formiraju ciklus. Neka je $c < a$ dužina tog ciklusa. Tada je $c \cdot k \equiv 0$ $(mod(a+b))$, što je nemoguće jer su brojevi k i $a+b$ relativno

prosti. (ciklus se mora ponavljati počevši od prvog elementa jer svaki element ciklusa određuje i naredni i prethodni).

2. način: Posmatrajmo zbir indeksa na kojima su jedinice po modulu $a+b$. Primijetimo da se rotacijom za k mjesta zbir svih indeksa poveća za $k \cdot a$ po modulu $a+b$. S druge strane, iz uslova zadatka ovaj zbir se treba povećati ili smanjiti za 1 po modulu $a+b$, odakle je $k \cdot a$ kongruentno 1 ili -1 po modulu $a+b$, što je nemoguće jer brojevi a i $a+b$ nisu relativno prosti.

23. MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Sarajevo, 22.04.2018. godine

DRUGI DAN - RJEŠENJA ZADATAKA

4. Сви квадратићи табле 1000×1000 су обојени црно или бијело. Познато је да постоје квадрат 10×10 чији су сви квадратићи црни и квадрат 10×10 чији су сви квадратићи бијели. За сваки квадрат K димензије 10×10 дефинишимо његову *моћ* $m(K)$ као апсолутну вриједност разлике броја црних и бијелих поља у квадрату K. Нека је T квадрат 10×10 који има најмању моћ међу свим квадратима димензије 10×10 у датој табли. Одредити највећу могућу вриједност за $m(T)$.

   Рјешење: За сваки квадрат X димензија 10×10 нека је $b(X)$ број бијелих квадратића у њему, а $c(X)$ број црних, те нека је $r(X) = b(X) - c(X)$. Нека је Y квадратић који је читав бијели, а Z квадратић који је читав црни. Тада је $r(Y) = 100$ и $r(Z) = -100$. Нека је W варијабилан квадрат 10×10 који ћемо на почетку поставити у Y. Помјерајмо квадрат W док се он не преклопи са Z, при чему се под једним кораком помјерања подразумијева помјерање квадрата W за једно мјесто паралелно страницама квадрата. Примијетимо да се $r(W)$ у једном кораку може промијенити за највише 20. Како је на почетку $r(W) = 100$, а на крају $r(W) = -100$, то је у неком кораку морало вриједити $-10 \leq r(W) \leq 10$. Дакле, $m(T) \leq 10$. С друге стране, докажимо да је $m(T) \geq 10$, чиме ће доказ бити завршен. Обојимо све квадратиће табле 1000×1000 испод главне дијагонале црно, а преостале бијело. Узмимо произвољан квадрат 10×10 у тој табли. Ако је његова главна дијагонала црна, онда су и испод ње све црни квадратићи, па је број црних квадратића бар за 10 већи од броја бијелих квадратића. Слично, ако је главна дијагонала бијела, тада је број бијелих квадратића бар за 10 већи од броја црних квадратића. Дакле, не постоји ниједан квадратић ћија је моћ мања од 10. Овим је доказ завршен.

Rješenje: Za svaki kvadrat X dimenzija 10×10 neka je $b(X)$ broj bijelih kvadratića u njemu, a $c(X)$ broj crnih, te neka je $r(X) = b(X) - c(X)$. Neka je Y kvadratić koji je čitav bijeli, a Z kvadratić koji je čitav crni. Tada je $r(Y) = 100$ i $r(Z) = -100$. Neka je W varijabilan kvadrat 10×10 koji ćemo na početku postaviti u Y. Pomjerajmo kvadrat W dok se on ne preklopi sa Z, pri čemu se pod jednim korakom pomjeranja podrazumijeva pomjeranje kvadrata W za jedno mjesto paralelno stranicama kvadrata. Primijetimo da se $r(W)$ u jednom koraku može promijeniti za najviše 20. Kako je na početku $r(W) = 100$, a na kraju $r(W) = -100$, to je u nekom koraku moralo vrijediti $-10 \leq r(W) \leq 10$. Dakle, $m(T) \leq 10$. S druge strane, dokažimo da je $m(T) \geq 10$, čime će dokaz biti završen. Obojimo sve kvadratiće table 1000×1000 ispod glavne dijagonale crno, a preostale bijelo. Uzmimo proizvoljan kvadrat 10×10 u toj tabli. Ako je njegova glavna dijagonala crna, onda su i ispod nje sve crni kvadratići, pa je broj crnih kvadratića bar za 10 veći od broja bijelih kvadratića. Slično, ako je glavna dijagonala bijela, tada je broj bijelih kvadratića bar za 10 veći od broja crnih kvadratića. Dakle, ne postoji nijedan kvadratić čija je moć manja od 10. Ovim je dokaz završen.

5. Neka je p prost broj i neka je $M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$. Igrači A i B igraju igru, pri čemu igrač A igra prvi. Oni naizmjenično biraju broj i iz skupa $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ koji nije ranije odabran, te umjesto a_i upišu neku cifru (moguće i nulu). Cilj igrača A je da nakon završetka igre broj M bude djeljiv sa p. Dokazati da on ima pobjedničku strategiju.

Rješenje: Kažemo da igrač pravi potez (i, a_i) ako bira indeks i pa zatim element a_i iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ u svom potezu. Ako je $p = 2$ ili $p = 5$ tada igrač A u prvom potezu bira potez $(0, 0)$ i pobjeđuje neovisno od sljedećih poteza jer će M biti djeljiv sa 10 na kraju igre. Sada neka je p prost broj različit od 2 i 5. Igrač A u prvom potezu bira potez $(p-1, 0)$. Po Maloj Fermaovoj teoremi vrijedi $(10^{\frac{p-1}{2}})^2 \equiv 1\ (mod\, p)$, pa $p|(10^{\frac{p-1}{2}})^2 - 1 = (10^{\frac{p-1}{2}} + 1)(10^{\frac{p-1}{2}} - 1)$. Pošto je p prost broj razlikujemo dva slučaja:

Prvi slučaj: $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ (mod\ p)$

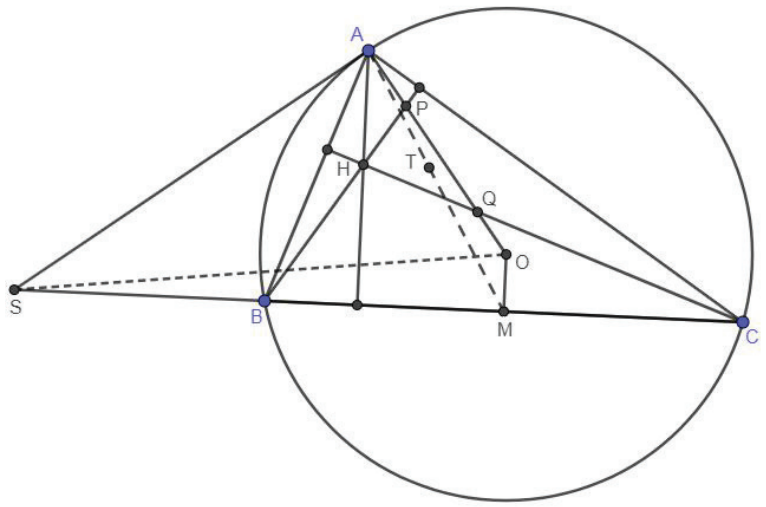
U ovom slučaju kad god igrač B napravi potez (i, a_i), igrač A napravi potez $(j, a_j) = (i + \frac{p-1}{2}, a_i)$ ako je $i < \frac{p-1}{2}$ ili potez $(j, a_j) = (i - \frac{p-1}{2}, a_i)$ ako je $i \geq \frac{p-1}{2}$. Primijetimo da p dijeli $a_i \cdot 10^i + a_j \cdot 10^j$ pa će nakon svakog poteza igrača A zbir dotadašnjih izabranih članova biti djeljiv sa p. Na ovaj način je $p-1$ članova podijeljeno u parove čiji je zbir djeljiv sa p, pa ce M biti djeljiv sa p na kraju igre, što je trebalo dokazati.

Drugi slučaj: $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ (mod\ p)$

U ovom slučaju kad god igrač B napravi potez (i, a_i). igrač A napravi potez $(j, a_j) = (i + \frac{p-1}{2}, 9 - a_i)$ ako je $i < \frac{p-1}{2}$ ili potez $(j, a_j) = (i - \frac{p-1}{2}, 9 - a_i)$ ako je $i \geq \frac{p-1}{2}$. Vrijedi $a_i \cdot 10^i + a_j \cdot 10^j \equiv 9 \cdot 10^i$, pa će na kraju igre M biti jednako $\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} 9 \cdot 10^i = 10^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0\ (mod\ p)$, pa će igrač A pobijediti, što je trebalo dokazati.

6. Neka je O centar opisane kružnice oštrouglog raznostraničnog trougla ABC. Prava OA siječe visine trougla ABC, povučene iz vrhova B i C, u tačkama P i Q, redom. Ako je H ortocentar trougla ABC, dokazati da centar opisane kružnice trougla PQH leži na težišnici trougla ABC povučenoj iz vrha A.

Rješenje: Uzmimo da je $|AB| < |AC|$. Imamo da je $\angle PQH = 90° - \angle QAB = 90° - \angle OAB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$. Slično, imamo da je $\angle QPH = \angle ABC$. Znači, trokut ABC i trokut HPQ su slični. Neka su k i k_1 kružnice opisane trokutima ABC i HPQ, redom. Kako je $\angle AHP = 90° - \angle HAC = \angle ACB = \angle HQP$, pravac AH je tangenta kružnice k_1. Neka je T središte kružnice k_1 i neka se pravci AT i BC sijeku u točki M. Neka je točka na pravcu BC takva da je pravac AS tangenta kružnice k. Točki S u trokutu ABC odgovara točka A u trokutu HPQ, pa vrijedi $\angle OSM = \angle OAT = \angle OAM$.



Slijedi da je $SAOM$ tetivni četverokut i pošto je pravac AS okomit na pravac AO vrijedi i $\angle OMS = 180° - \angle OAS = 90°$. Ovo znači da je točka M ortogonalna projekcija točke O na $\overline{BC}$, pa je M polovište $\overline{BC}$. Znači da T leži na tezišnici $\overline{AM}$ trokuta ABC, što je trebalo dokazati.

KONAČNI REZULTATI 23. BiHMO

Ime i prezime učenika	Razred	Škola i mjesto	Šifra I dan	Šifra II dan	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Suma	Plasman	Nagrada
Amar Kurić	4	Međunarodna srednja škola Sarajevo	116	244	7	7	0	7	2	7	30	1	zl.med.
Тијана Бабић	4	Гимназија Бања Лука	112	231	6	0	7	7	3	7	30	1	zl.med.
Adnan Šabanović	4	Druga gimnazija Sarajevo	117	203	0	7	3	7	2	7	26	3	sr.med.
Дејан Станковић	2	СШЦ Фоча	109	232	7	0	0	6	3	7	23	4	sr.med.
Дамјан Станковић	3	СШЦ Фоча	105	229	7	0	0	7	1	7	22	5	sr.med.
Tarik Džaka	3	Međunarodna srednja škola Sarajevo	119	202	7	0	0	7	0	2	16	6	br.med.
Boris Velašević	3	Međunarodna srednja škola Sarajevo	128	208	7	0	0	7	1	1	16	6	br.med.
Стефан Јурошевић	4	СШЦ ,,Милорад Влачић“, Власеница	120	201	7	0	0	2	0	7	16	6	br.med.
Faik Tahirović	2	Druga gimnazija Sarajevo	104	228	2	7	0	7	0	0	16	6	br.med.
Muamer Parić	4	Druga gimnazija Sarajevo	103	223	0	4	0	7	1	0	12	10	br.med.
Elma Nuhanović	4	Sarajevo koledž	121	205	2	0	0	0	0	6	8	11	
Nejla Subašić	3	Druga gimnazija Sarajevo	134	226	1	0	0	0	0	7	8	11	
Dino Melunović	4	Sarajevo koledž	142	230	7	0	0	0	0	1	8	11	
Milica Đokić	4	Međunarodna srednja škola Sarajevo	108	233	6	0	0	0	2	0	8	11	
Aldin Saračević	1	Međunarodna srednja škola Tuzla	136	235	1	0	0	0	0	7	8	11	
Невена Радешић	3	СШЦ ,,Јован Дучић“, Теслић	129	207	0	0	0	7	0	0	7	16	
Tarik Raljević	3	Koledž ujedinjenog svijeta Mostar	113	234	0	0	0	4	3	0	7	16	
Марко Јојић	1	Гимназија Бања Лука	110	218	1	4	0	0	0	1	6	18	
Душан Гарић	3	Гимназија ,,Јован Дучић“, Добој	106	224	5	0	0	0	0	1	6	18	
Sandro Paradžik	1	Druga gimnazija Sarajevo	118	209	0	0	0	6	0	0	6	18	
Boris Stanković	9	OŠ „Safvet-beg Bašagić“ Visoko	123	216	1	0	0	0	0	3	4	20	
Lejla Skelić	3	Međunarodna srednja škola Sarajevo	125	220	2	0	0	0	0	1	3	22	
Benjamin Ramhorst	3	Druga gimnazija Sarajevo	130	206	0	0	0	2	0	1	3	25	
Imran Kovač	4	Međunarodna srednja škola Zenica	141	214	1	1	0	0	0	0	2	23	
Дејан Пејић	3	Гимназија ,,Филип Вишњић“, Бијељина	122	217	0	0	0	2	0	0	2	23	
Ivan Martinović	4	Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg	115	219	1	0	0	0	0	0	1	25	
Ivan Martinović	3	Koledž ujedinjenog svijeta Mostar	107	236	0	0	1	0	0	0	1	25	
Алекса Турнић	1	Гимназија ,,Јован Дучић“, Требиње	127	204	0	0	0	0	0	0	0	28	
Драган Марковић	3	Гимназија ,,Филип Вишњић“, Бијељина	137	210	0	0	0	0	0	0	0	28	

Јана Јанковић	4	Гимназија ,,Филип Вишњић“, Бијељина	140	211	0	0	0	0	0	0	0	28	
Jelena Čolak	2	Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg	144	212	0	0	0	0	0	0	0	28	
Сергеј Крчмар	1	Гимназија Бања Лука	111	213	0	0	0	0	0	0	0	28	
Marija Matijević	3	Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg	143	215	0	0	0	0	0	0	0	28	
Алекса Сибиновић	1	ЕТШ ,,Никола Тесла“, Бања Лука	126	221	0	0	0	0	0	0	0	28	
Lamija Biogradlija	2	Međunarodna srednja škola Zenica	124	222	0	0	0	0	0	0	0	28	
Ana Marija Vego	4	Gimnazija fra Grge Martića Mostar	138	225	0	0	0	0	0	0	0	28	
Gabrijela Galić	3	Gimnazija fra Dominika Mandića Široki Brijeg	132	227	0	0	0	0	0	0	0	28	
Ana Stojkić	3	Gimnazija fra Grge Martića Mostar	131	237	0	0	0	0	0	0	0	28	
Iva Marić	3	Gimnazija fra Grge Martića Mostar	101	238	0	0	0	0	0	0	0	28	
Tin Mišić	3	KŠC „Sv. Franjo“ Tuzla	139	239	0	0	0	0	0	0	0	28	
Amra Maglajčetović	1	SŠ Pere Zečevića Odžak	102	240	0	0	0	0	0	0	0	28	
Hana Muslić	3	Prva gimnazija Zenica	114	241	0	0	0	0	0	0	0	28	
Милица Пухало	2	Гимназија ,,Филип Вишњић“, Бијељина	135	242	0	0	0	0	0	0	0	28	
Теодор Видаковић	1	Техничка школа ,,М. Пупин“, Бијељина	133	243	0	0	0	0	0	0	0	28	