ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ БиХ ЗА ЕГМО 2017.
Сарајево, 25.2.2017. године

ЗАДАЦИ

Вријеме за рад: 240 минута.
Сваки задатак вриједи 7 бодова.

1. Дат је низ дужине 2017 који се састоји од првих 2017 природних бројева поредaних у произвољном редослиједу (сваки број се појављује тачно једном). Уочимо први број у том низу. Нека је то природан број k. Од датог низа формирамо нови низ дужине 2017 који има исте чланове као и почетни, тако да су првих k чланова новог низа исти као првих k чланова почетног низа, само у обрнутом редослиједу, док остатак низа остаје непромијењен. Доказати да ће се, ако наставимо овај поступак, појавити низ чији је први члан 1.

2. Дат је троугао ABC и тачке P и Q на страницама AB и AC, редом, тако да је $PQ \parallel BC$. Нека су X и Y редом пресјечне тачке правих BQ и CP са кружницом k описаном око троугла APQ, а D и E редом пресјечне тачке правих AX и AY са страницом BC. Ако је $2DE = BC$, доказати да кружница k садржи пресјечну тачку симетрале угла $\angle BAC$ са страницом BC.

3. За природан број n нека је $f(n)$ збир свих његових позитивних дјелилаца (укључујући 1 и n). Одредити све природне бројеве c за које постоји бесконачни строго растући низ природних бројева n_1, n_2, n_3, ..., такав да за свако $i \in \mathbb{N}$ вриједи да је $f(n_i) - n_i = c$.

4. Нека су a, b, c, d, e различити позитивни реални бројеви такви да вриједи
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$
   a) Доказати да међу ових датих пет бројева постоји тројка таква да они не могу бити мјерни бројеви дужина страница троугла.
   b) Доказати да у а) постоји бар 6 таквих различитих тројки.