Izborno takmičenje za Balkansku matematičku olimpijadu 2017

Istočno Sarajevo, 27.3.2017.

1. Naći sve prirodne brojeve n za koje je broj
$$1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$$
relativno prost sa brojem n.
($\varphi(t) -$ broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih t koji su relativno prosti sa t)

2. Neka je ABC oštrougli trougao. Neka je P tačka u unutrašnjosti trougla ABC takva da je $\measuredangle BAP = \measuredangle ACP$ i $\measuredangle CAP = \measuredangle ABP$. Neka su M i N centri upisanih kružnica u trouglove ABP i ACP, respektivno. Ako je R poluprečnik kružnice opisane oko trogla AMN, dokazati da vrijedi
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AP}$$

3. Dat je pravilni n-tougao. Povučene su neke dijagonale n-tougla, tako da se nikoje dvije ne sijeku u unutrašnjosti i tako da one dijele n-tougao na trouglove. Pri tome, iz svakog vrha n-tougla izlazi paran broj dijagonala. Naći sve prirodne brojeve $n \geq 4$ za koje je ovo moguće.

4.
   a) Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da ne postoji racionalan broj $\frac{a}{b}$, takav da su a i b cijeli brojevi za koje vrijedi $0 < b \leq \sqrt{n}$ i $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}$
   b) Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji racionalan broj $\frac{a}{b}$, takav da su a i b cijeli brojevi za koje vrijedi $0 < b \leq \sqrt{n} + 1$ i $\sqrt{n} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{n+1}$

Vrijeme za izradu zadataka je 270 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 poena.

1. Neka je p neki prosti djelioc broja n. Poznato je da $p-1$ dijeli $\varphi(n)$(slijedi direktno iz formule). Sada za svaki prirodan broj a koji nije djeljiv sa p vrijedi $a^{\varphi(n)} \equiv a^{(p-1)k} \equiv 1(mod\ p)$. Budući da je broj prirodnih brojev manjih ili jednakih n koji nisu djeljivi sa p jednak $n-\frac{n}{p}$,

$$1^{\varphi(n)}+2^{\varphi(n)}+\cdots+n^{\varphi(n)} \equiv n-\frac{n}{p} \equiv -\frac{n}{p}(mod\ p)$$

Sada primijetimo da p ne dijeli $1^{\varphi(n)}+2^{\varphi(n)}+\cdots+n^{\varphi(n)}$ ako i samo ako p^2 ne dijeli n. Ovo znači da su n i $1^{\varphi(n)}+2^{\varphi(n)}+\cdots+n^{\varphi(n)}$relativno prosti ako i samo ako je n proizvod različitih prostih brojeva.

2. Neka je O centar opisanog kruga trougla AMN. Tada je : $\measuredangle MON = 2\measuredangle MAN = \measuredangle BAC$. Kako su PM i PN simetrale uglova $\measuredangle APB$ i $\measuredangle APC$ redom, imamo da je: $\measuredangle MPN = \measuredangle APB = 180° - \measuredangle ABP - \measuredangle BAP = 180° - \measuredangle BAC$, pa je četverougao $OPMN$ tetivan. Kako je $OM = ON$, slijedi da je PO simetrala ugla $\measuredangle MPN$, pa odavde slijedi da se tačka O nalazi na duži PA. Takođe, kako su M i N centri upisanih krugova sličnih trouglova APB i CPA, imamo da je MP: $NP = AP$: BP. Kako je $\measuredangle MPN = \measuredangle APB$, zaključujemo da su trouglovi NPM, APB i CPA slični, odakle slijedi da je $\measuredangle BAP = \measuredangle MNP = \measuredangle MOP$, pa je $MO \mid\mid AB$ i $NO \mid\mid CA$. Označimo sa E presječnu tačku pravih PM i AB i sa r poluprečnik upisanog kruga trougla ABP. Sada je: $\frac{AP}{R} = \frac{AP}{AO} = \frac{EP}{EM} = \frac{P(\Delta APB)}{P(\Delta AMB)} = \frac{r(AP+PB+AB)}{rAB} = 1 + \frac{AP}{AB} + \frac{BP}{AB} = 1 + \frac{AP}{AB} + \frac{AP}{AC}$, odakle dobijamo: $\frac{1}{R} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AP}$.

3. Rješenje su svi prirodni brojevi n djeljivi sa 3.

Tvrdnju ćemo dokazati za sve konveksne n-touglove.

Prvo dokažimo da za $n = 3k$ postoji konfiguracija. Neka su $A_1, A_2, \dots, A_{3k}$ vrhovi n-tougla. Spojimo A_1 sa A_{3i} i sa A_{3i+2}, i spojimo A_{3i} i A_{3i+2}za svako $1 \leq i \leq k-1$.

Dokaz da za ostale brojeve ne postoji konfiguracija emo izvesti na 3 načina.

Prvi način

Pretpostavimo da je poligon podjeljen dijagonalama u skladu sa uslovom zadatka. Tada se unutrašnjosti dobijenih trouglova mogu obojiti u dvije boje, plavu i crvenu, tako da su svaka dva trougla koja imaju zajedničku stranicu obojena različitim bojama. Ovo se postiže tako što se poligon na početku oboji jednom bojom, a zatim se konstruišu dijagonale jedna za drugom i posle svakog konstruisanja nove dijagonale, sve obojene površine sa jedne strane dijagonale prefarbaju drugom bojom. Očigledno je da su svaka dva trougla, koji imaju dijagonalu kao zajedničku stranicu, obojena različitom bojom. Uočimo da su, zbog uslova da iz svakog temena ishodi paran broj dijagonala, svi trouglovi koji imaju stranicu , stranicu poligona, obojeni istom bojom. Bez umanjenja opštosti neka je to plava boja. Ako je p broj plavih trouglova, c broj crvenih trouglova, onda je $n + 3c = 3p$, jer je svaka dijagonala iz D stranica jednog plavog i jednog crvenog trougla, a svaka stranica poligona je stranica samo jednog plavog trougla. Prema tome, broj n mora biti djeljiv sa 3.

Drugi način:

Lagano provjeravamo da za $n = 4$ i za $n = 5$ ne postoji konfiguracija. Pretpostavimo da za sve brojeve manje od n koji nisu djeljivi brojem 3 ne postoji konfiguracija.

Pretpostavimo da za n, koji nije djeljiv sa 3, postoji konfiguracija.

Prvo primijetimo da je broj dijagonala jednak $n - 3$, a broj trouglova $n - 2$(lagano se dokazuje indukcijom).

Sada, budući da je broj stranica jednak n, neke dvije stranice pripadaju istom trouglu. Neka su te stranice AB i BC(A, B i C su vrhovi n-tougla). Sada, AC mora biti u trouglu T u kojem su sve tri stranice dijagonale(u suprotnom iz A ili C više ne bi moglo izlaziti dijagonala, pa bi iz tog vrha broj dijagonala bio 1). Sada primijetimo da trougao T dijeli n-tougao na dva dijela i na trougao ABC. Neka je S treći vrh trougla T. Kada posmatramo dva dijela na koja T dijeli n-tougao, iz svakog vrha, ne računajući vrh S, u ta dva dijela mora izlaziti paran broj dijagonala. Iz vrha S mora izlaziti zajedno u ta dva dijela paran broj dijagonala. Ako u oba dijela izlazi neparan broj dijagonala, tada posmatrajući jedan dio vidimo da iz svakog vrha izlazi paran broj duži osim iz S, što nije moguće(u grafu postoji paran broj vrhova neparnog stepena). To znači da iz S u oba dijela izlazi paran broj dijagonala, pa je pretpostavka indukcije u oba dijela zadovoljena, što znači da oba dijela imaju broj stranica djeljiv sa 3. Ali, pošto oba dijela zajedno imaju isti broj stranica kao početni n-tougao(sa dvije dijagonale i bez dvije stranice n-tougla), dobijamo da je n djeljiv sa 3, što je kontradikcija.

Treći način:

Primijetimo da imamo 3 vrste trouglova, oni koji imaju 3 dijagonale kao stranice(neka ih ima t_3), oni koji imaju dvije dijagonale(neka ih ima t_2) i oni koji imaju jednu dijagonalu kao stranicu(neka ih ima t_1).

Ukupan broj trouglova je $n-2$ pa je $t_1+t_2+t_3=n-2$.

Sada prebrojimo dijagonale po trouglovima. Dobijamo jednakost

$$t_1+2t_2+3t_3=2(n-3)$$

(U svakom trouglu tipa t_i se nalazi i dijagonala, a svaku dijagonalu brojimo dva puta). Iz ova dva izraza dobijamo $t_1=t_3+2$.

Sada, kao u drugom načinu, dokažemo da svakom trouglu tipa t_1 odgovara jedan trougao tipa t_3(dijele jednu stranicu). Ali pošto je trouglova tipa t_1 više nego trouglova tipa t_3, neka dva dijele stranice sa istim trouglom tipa t_3. Iz ovog očigledno slijedi da izbacivanjem ova tri trougla dobijamo $(n-3)$ −ugao za koji vrijede svi uslovi, pa ako tvrdnja vrijedi za n, vrijedi i za $n-3$.

Samim tim, n mra biti djeljivo sa 3, što je trebalo dokazati.

4.

a) Neka je $n=k^2-2$, pri čemu je k prirodan broj veći ili jednak 2. Pretpostavimo da postoje cijeli brojevi a i b takvi da vrijede uslovi zadatka. Sada imamo $0<b\leq k-1(1)$ i $(k^2-2)b^2\leq a^2\leq (k^2-1)b^2(2)$. Vidimo da je $a<kb$, pa je $a^2\leq k^2b^2-2kb+1$ (3). Iz (2) i (3) slijedi $(k^2-2)b^2\leq k^2b^2-2kb+1$, a iz ovog $2kb\leq 2b^2+1$, što je u kontradikciji sa (1). Znači, takvi brojevi a i b ne postoje, što je i trebalo dokazati.

b) Predstavimo n u obliku k^2+t, pri čemu je $0\leq t\leq 2k$ (1). Sada uslovi postaju $0<b\leq k+1, (k^2+t)b^2\leq a^2\leq (k^2+t+1)b^2$.

Ako je t parno, uzmimo da je $b=k, a=k^2+\frac{t}{2}$. Sada treba dokazati

$$k^4+k^2t\leq k^4+k^2t+\left(\frac{t}{2}\right)^2\leq k^4+k^2t+k^2$$

a ovo vrijedi zbog (1).

Ako je t neparno, neka je $b = k+1, a = (k+1)^2 - \frac{2k+1-t}{2}$. Trebamo dokazati

$$
\begin{aligned}
&(k+1)^4 - (k+1)^2(2k+1-t) \\
&\qquad \leq (k+1)^4 - (k+1)^2(2k+1-t) + \left(\frac{2k+1-t}{2}\right)^2 \\
&\qquad \leq (k+1)^4 - (k+1)^2(2k+1-t) + (k+1)^2
\end{aligned}
$$