

1. U trokutu ABC , upisana kružnica sa središtem u točki I , dira stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama P i Q , redom. Pravci BI i CI sijeku pravac PQ u točkama K i L , redom. Dokažite da kružnica opisana trokutu ILK dira kružnicu upisanu trokutu ABC ako i samo ako vrijedi $|AB| + |AC| = 3|BC|$.

Rješenje 1:

Neka je $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$ i neka je $|IP| = |IQ| = r$. Neka je $CK \cap BL = \{D\}$. Kako je $\sphericalangle BKL = \sphericalangle BKP = 180^\circ - \sphericalangle BPK - \sphericalangle KBP = \sphericalangle APK - \sphericalangle KBP = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$ tj. $\sphericalangle IKL = \frac{\gamma}{2}$ i $\sphericalangle IKQ + \sphericalangle QCI = 180^\circ - \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180^\circ$, slijedi da je četverokut $IKQC$ tetivan, pri čemu je $\sphericalangle IKC = \sphericalangle IQC = 90^\circ$. Analogno se dobije da je i $\sphericalangle ILB = 90^\circ$. Sada je $\sphericalangle BKC = \sphericalangle BLC = 90^\circ$, pa je četverokut $CBLK$ tetivan, a kako je $\sphericalangle ILD = \sphericalangle DKI = 90^\circ$ to je i četverokut $ILDK$ tetivan (promjeri kružnica opisanih oko četverokuta $CBLK$ i $ILDK$ su $\overline{BC}$ i $\overline{ID}$, redom). Iz sinusnog poučka za trokut LDK imamo da je $|KL| = |ID| \sin \sphericalangle LDK = |ID| \cos \sphericalangle LCK$. Slično, iz troukuta CLK dobijamo da je $|LK| = a \sin \sphericalangle LCK$, pa je $|ID| = \operatorname{tg} \sphericalangle LCK$. Iz trokuta CBK dobijamo da je $\sphericalangle ICK = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$ tj. $\sphericalangle LCK = \frac{\alpha}{2}$ pa je $|ID| = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Također, imamo da je $r = |AQ| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Kružnica određena točkama K, I, L dodiruje kružnicu određenu točkama A, B, C ako i samo ako je $|ID| = r$, odakle lako dobijamo da vrijedi $b + c = 3a$, što je i trebalo dokazati.

Rješenje 2:

Koristićemo oznake iz rješenja 1, pri čemu ćemo sa s označiti poluopseg trokuta ABC . Slično kao u prvom rješenju dobivamo $\sphericalangle IKC = \sphericalangle ILB = 90^\circ$, kao i tetivnost četverokuta $DKIL$. Neka upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u R . Primijetimo da je I ortocentar trokuta CBD , pa je DI okomito na BC , tj. točke D, I, R su kolinearne. Kružnica određena točkama K, I, L dodiruje kružnicu određenu točkama A, B, C ako i samo ako je $|ID| = r$, tj. $|DR| = 2r$. Kako je $\sphericalangle KDI = \sphericalangle KLI = \sphericalangle KBC = \sphericalangle IBR$, to su pravokutni trokutovi CRD i IRB slični, odakle je $\frac{|CR|}{|RD|} = \frac{|IR|}{|BR|}$, tj. $|DR| \cdot r = |DR| \cdot |IR| = |BR| \cdot |CR| = (s - b)(s - c)$, pa

je $|DR| = 2r$ ako i samo ako je $(s-b)(s-c) = 2r^2 = \frac{2p^2}{s^2} = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \leftrightarrow s = 2a \leftrightarrow b+c = 3a, q. e. d.$

2. Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za sve prirodne brojeve m i n , cijeli broj $f(m) + f(n) - mn$ je različit od 0 i dijeli $mf(m) + nf(n)$.

Rješenje:

U početnu jednačinu uvrstimo $m = n = 1$ i dobijamo $2f(1) - 1 | 2f(1)$.

Tada $2f(1) - 1 | 2f(1) - (2f(1) - 1) = 1$, pa je $f(1) = 1$.

Neka je $p \geq 7$ prost broj. U početnu uvrstimo $m = p, n = 1$ i dobijamo $f(p) - p + 1 | pf(p) + 1$ pa dobijamo

$$f(p) - p + 1 | pf(p) + 1 - p(f(p) - p + 1) = p^2 - p + 1$$

Ako je $f(p) - p + 1 = p^2 - p + 1$, tada je $f(p) = p^2$.

Sada pretpostavimo da je $f(p) - p + 1 \neq p^2 - p + 1$. Sada, pošto je $p^2 - p + 1$ neparan prirodan broj, vrijedi $3(f(p) - p + 1) \leq p^2 - p + 1$, odnosno

$$f(p) \leq \frac{1}{3}(p^2 + 2p - 2). \quad (1)$$

Ubacimo $m = n = p$ u početnu i dobijamo $2f(p) - p^2 | 2pf(p)$. Sada dobijamo

$$2f(p) - p^2 | 2pf(p) - p(2f(p) - p^2) = p^3$$

Iz (1) i jer je $f(p) \geq 1$ dobijamo

$$-p^2 < 2f(p) - p^2 \leq \frac{2}{3}(p^2 + 2p - 2) - p^2 < -p$$

jer je $p \geq 7$. Došli smo u kontradikciju sa činjenicom da $2f(p) - p^2$ dijeli broj p^3 . To znači da je $f(p) = p^2$ za sve proste brojeve $p \geq 7$.

Neka je sada n proizvoljan prirodan broj. Neka je p dovoljno veliki prost broj. U početnu ubacimo $m = p$ i dobijamo

$$\begin{aligned} f(p) + f(n) - pn | pf(p) + nf(n) - n(f(p) + f(n) - pn) \\ = pf(p) - nf(p) + pn^2 \end{aligned}$$

Pošto je $f(p) = p^2$, dobijamo $p^2 + f(n) - pn | p(p^2 - pn + n^2)$. Pošto je p dovoljno veliki prost broj $(p, p^2 - pn + n^2) = 1$ pa $p^2 + f(n) - pn | p^2 - pn + n^2$. Sada dobijamo

$$p^2 + f(n) - pn | p^2 - pn + n^2 - (p^2 + f(n) - pn) = n^2 - f(n).$$

Primijetimo da je $n^2 - f(n)$ fiksni cijeli broj, a $p^2 + f(n) - pn$ može biti proizvoljno veliki prirodan broj. To znači da $n^2 - f(n) = 0$, odnosno $f(n) = n^2$ za sve prirodne brojeve n .

Vidimo da je ova funkcija zadovoljava, jer je

$$f(m) + f(n) - mn = m^2 + n^2 - mn$$

a

$$mf(m) + nf(n) = m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2).$$

Očigledno je drugi izraz djeljiv sa prvim za sve prirodne brojeve m i n .

Znači, $f(n) = n^2$ je jedino rješenje.

3. Naći sve realne brojeve c za koje postoji strogo rastući niz $a_1, a_2, \dots$ prirodnih brojeva takav da je $\frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{a_n} = c$ za sve prirodne brojeve n .
4. Očigledno, $c = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{a_n}$ je pozitivan racionalan broj. Dokazimo da c mora biti prirodan broj. Neka je $c = \frac{p}{q}$, gdje je $(p, q) = 1$. Sada dobijamo $pa_n = q(a_{2n-1} + a_{2n})$ iz čega slijedi da $q | a_n$ za sve prirodne brojeve n . Posmatrajmo niz $b_n = \frac{a_n}{q}$. Primijetimo da i za niz b_n vrijedi uslov zadatka tj. $\frac{b_{2n-1} + b_{2n}}{b_n} = c$. Sada dobijamo da $q | b_n$ tj. $q^2 | a_n$ za sve prirodne brojeve n . Nastavljajući ovaj postupak

добивамо да $q^k | a_n$ за сваки природан број k , одакле слиједи $q = 1$, па је c природан број. Будући да је a_n строго растући низ, имамо да је: $\frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{a_n} > \frac{2a_n}{a_n} = 2$, тј. мора бити $c > 2$. Докажимо да за $c = 3$ такав низ не постоји. Посматрајмо низ $r_n = a_{n+1} - a_n$. Сада имамо:

$$3r_n = 3a_{n+1} - 3a_n = a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n-1} - a_{2n} = a_{2n} - a_{2n-1} + 2(a_{2n+1} - a_{2n}) + a_{2n+2} - a_{2n+1} = r_{2n-1} + 2r_{2n} + r_{2n+1}.$$

Примијетимо да је бар један од бројева r_{2n-1} , r_{2n} , r_{2n+1} мањи од r_n . Дакле, постоји строго опадајући подниз низа r_n , а будући да је то низ природних бројева, добијамо контрадикцију. Сада ћемо доказати да за све природне бројеве $c > 3$, постоји низ који задовољава услов задатка. За $c = 4$, низ $a_n = 2n - 1$ очигледно задовољава услов задатка. За $c > 4$ узмимо $a_1 = 1$ и нека је $a_{2n-1} = \left\lfloor \frac{c a_n - 1}{2} \right\rfloor$ и $a_{2n} = \left\lfloor \frac{c a_n}{2} \right\rfloor + 1$. Лагано се провјерава да овако дефинисан низ задовољава услов задатка. Очигледно је $a_{2n-1} < a_{2n}$, а лако се провјери и да је $a_{2n} < a_{2n+1}$, па је овако дефинисан низ растући.

4. Нека је n природан број. На конференцији се налази $6n + 4$ математичара. Одржава се $2n + 1$ састанака. На сваком састанку математичари сједе за једним округлим столом са 4 мјеста и n округлих столова са 6 мјеста. Растојања између свака два сусједна мјеста за једним столом су једнака. Кажемо да су два математичара у *специјалној* позицији ако сједе за истим столом и ако су сусједи или ако су на дијаметрално супротним позицијама. За које природне бројеве n је могуће, да након што се заврше сви састанци, никоја два математичара нису била у специјалној позицији више од једном?

Одговор: могуће је за све природне бројеве n .

Лема

За сваки природан број k , може се организовати турнир на коме учествује $2k + 1$ екипа, који има $2k + 1$ кола и у коме ће сваке две екипе играти тачно једном једна против друге.

Доказ.

Уочимо правилан $2k + 1$ — угао $A_1 A_2 \dots A_{2k+1}$. Нека екипе представљају врхове, а дужи које их спајају, међусобне сусрете ових екипа. Турнир организујемо на сљедећи начин: ако у једном колу играју екипе A_i и A_j ($i \neq j$), онда у том колу играју и све екипе представљене врховима A_k и A_l , тако да важи $A_i A_j \parallel A_k A_l$ (примјетимо да имамо $n - 1$ оваквих дужи које су паралелне са $A_i A_j$, а различите су од ње саме и да тачно један врх није крајња тачка ниједне од ових дужи (тим врхом је представљена екипа слободна у том колу)). Пошто из сваког врха исходи $2n$ различитих дужи имаћемо тачно $2n$ кола у којима ће играти екипа представљена тим врхом и једно коло у коме ће та екипа бити слободна што даје укупно $2n + 1$ кола. Овим је доказ леме завршен.

Сада ћемо дати конструкцију тј. показати како математичаре распоредити око столова на овим састанцима за сваки природан број n .

Подијелимо скуп од $6n + 4$ математичара на $2n + 2$ дисјунктних подскупова, од којих су $2n + 1$ трочланих и један скуп у коме се налази

само један математичар(означимо га са A). На основу доказане леме, на $2n + 1$ састанака, за сваким столом који има 6 мјеста, можемо окупити све математичаре из двије од уочених тројки, тако да су се било које двије од уочених тројки сједе за столом тачно једном. При том, математичаре из ових тројки распоређујемо око стола наизмјенично, тј. да никоја два математичара из исте тројке не буду сусједна(при том распореду никоја два математичара из исте тројке нису распоређена дијаметрално супротно). За столом који има 4 мјеста распоређујемо три математичара из тројке која је преостала тј. чији чланови не сједе за столовима од 6 мјеста и математичара A (који иначе на сваком састанку сједи за столом са 4 мјеста) на произвољан начин. Докажимо да ова конструкција задовољава услове задатка. Очигледно ће A са сваким преосталим математичаром бити у специјалној позицији тачно једном. Два математичара из исте тројке ће бити у специјалној позицији само за столом за 4 мјеста, а математичари из различитих само када се њихове тројке састану за столом од 6 мјеста.

5. Наћи најманју могућу константу C такву да је за било које позитивне реалне бројеве a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 (не нужно различите) могуће одабрати различите индексе i, j, k и l такве да

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leq C$$

Рјеђење:

Најманје такво C је $\frac{1}{2}$.

Прво ћемо доказати да је $C \leq 1/2$.

Нека је без губитка општости $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$.

Посматрајмо 5 разломака

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_3}{a_4}, \frac{a_1}{a_5}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5}$$

Сваки лежи у интервалу $(0,1]$. То значи да по Дирихлеовом принципу најманје 3 од њих леже сви у интервалу $(0, \frac{1}{2}]$ или у интервалу $(\frac{1}{2}, 1]$. Значи, постоје два сусједна разломка који припадају интервалу дужине $\frac{1}{2}$ (узимамо да су $\frac{a_4}{a_5}$ и $\frac{a_1}{a_2}$ сусједни).

Пошто су индекси који учествују у ова два разломка различити, можемо их изабрати да буду i, j, k, l и тиме добијемо $C \leq \frac{1}{2}$.

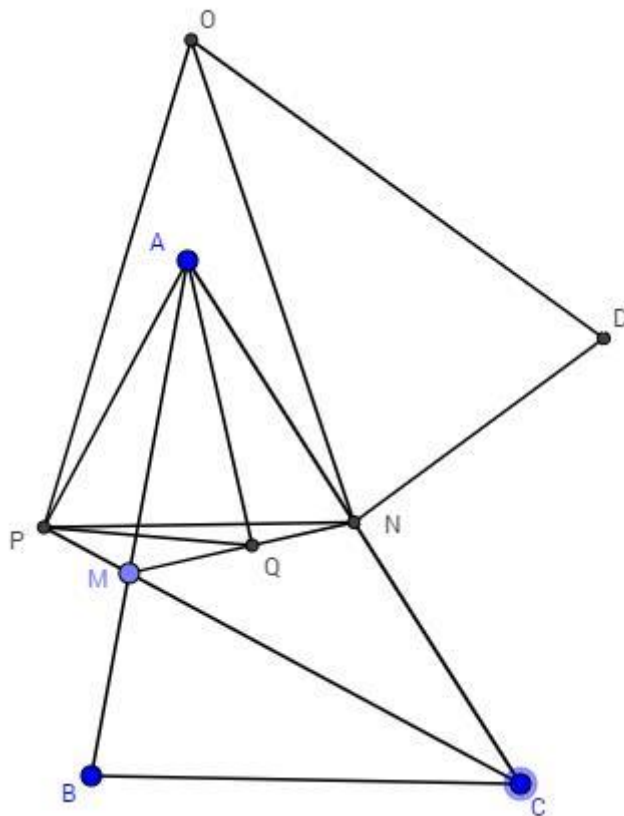
Sada ćemo pokazati da je $C = \frac{1}{2}$ najbolje moguće. Posmatrajmo brojeve $1, 2, 2, 2, n$ pri čemu je n veliki realan broj. Razlomci koje dobijamo formirajući neka dva od ovih brojeva u rastućem poretka su $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{1}$. Budući da su i, j, k, l različiti $\frac{1}{n}$ i $\frac{2}{n}$ ne mogu istovremeno biti izabrani. Znači, najmanja razlika koju je moguće dobiti na lijevoj strani nejednakosti je $\frac{1}{2} - \frac{2}{n}$. Kada n teži u beskonačnost, ova vrijednost se približava $\frac{1}{2}$, pa C ne može biti manje od $\frac{1}{2}$. Ovim zaključujemo da je $C = \frac{1}{2}$ najmanja moguća konstanta.

6. Dan je šiljastokutni trokut ABC . Točka M je proizvoljna točka na stranici $\overline{AB}$, a N je polovište stranice $\overline{AC}$. Neka su P i Q nožišta okomica iz vrha A na pravce MC i MN , redom. Dokazati da središte kružnice opisane trokutu PQN leži na fiksnom pravcu dok se M kreće po stranici $\overline{AB}$.

Rješenje:

Neka je $\angle BAC = \alpha$, $\angle ACM = x$.

Neka je O središte kružnice opisane trokutu PQN .



Neka je točka D takva da je $\angle AND = 2\alpha$, $|ND| = \frac{|AC|}{2}$ i točka D se nalazi na suprotnoj strani točke B u odnosu na pravac AC .

Trokut APC je pravokutni pa je $|NP|=|NC|$, iz čega slijedi $\angle ANP = 2x$.

Dalje je

$$\angle PQN = 180 - \angle PQM = 180 - \angle PAM = 90 + \angle PMA = 90 + \angle BMC = 90 + \alpha + x$$

Slijedi $\angle PON = 180 - 2\alpha - 2x$, pa je $\angle ONP = \alpha + x \Rightarrow \angle ONA = \angle ONP - \angle ANP = \alpha - x \Rightarrow \angle OND = \alpha + x$.

Primijetimo da je $\triangle OND \cong \triangle ONP$ jer je $|NP|=|ND|$, $|NO|=|NO|$ i $\angle ONP = \angle OND$.

Iz ovoga slijedi $|OP| = |OD| = |ON|$, pa se O nalazi na simetrali dužine $\overline{ND}$ koja je očigledno fiksna u odnosu na točku M .