XXI MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Visoko, 14.5.2016.

1. Opisana je kružnica k četverokutu $ABCD$. Pravci AB i CD se sijeku u točki E, te vrijedi $|AB| = |BE|$. Neka je točka F sjecište tangenti na kružnicu k povučenih u točkama B i D te kružnice. Ako su pravci AB i DF paralelni, dokazati da su točke A, C, F kolinearne.

2. Neka je n prirodan, a t cijeli broj. Na ploči je napisano n različitih cijelih brojeva. Bob, koji je u susjednoj sobi, želi da zna da li među tim brojevima postoji određeni broj njih sa sumom t. Alisa, koja se nalazi pred pločom, pomoći će mu u tome. Na početku, ona mu kaže samo ukupan zbroj svih brojeva na ploči. Nakon toga, on joj u svakom potezu govori jednu od sljedeće 4 rečenice:
   i. Da li među brojevima na ploči postoji broj k?
   ii. Ako na ploči postoji broj k, izbriši ga.
   iii. Ako na ploči ne postoji (cijeli) broj k, dodaj ga.
   iv. Da li se brojevi na ploči mogu podijeliti u dva skupa sa jednakom sumom elemenata?

   Na pitanja mu Alisa točno odgovara sa da ili ne, a operacije koje on kaže ona izvede na ploči (ako je moguće), pri tom mu ne govoreći da li ih je izvela. Dokazati da u manje od $3n$ poteza Bob može saznati da li se među brojevima napisanim na početku nalaze neki čija je suma jednaka t.

3. Za beskonačni niz $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ prirodnih brojeva kažemo da je „lijep“, ako za svaki prirodan broj n vrijedi $a_{2n} = 2a_n$. Dokazati sljedeće tvrdnje:

a) Ako je dat „lijep“ niz i prost broj $p > a_1$, postoji neki član niza koji je djeljiv sa p;

b) Za svaki prost broj $p > 2$, postoji „lijep“ niz takav da nijedan član tog niza nije djeljiv sa p.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme za izradu: 270 minuta

XXI MATEMATIČKA OLIMPIJADA BOSNE I HERCEGOVINE

Visoko, 15.5.2016.

4. Odrediti najveći prirodan broj n koji se ne može napisati kao zbroj tri broja veća od 1 koji su po parovima relativno prosti.

5. Neka je k kružnica opisana šiljastokutnom trokutu ABC $(AC < BC)$. Dalje, neka je CL simetrala kuta $\measuredangle ACB$ $(L \in AB)$, M polovište luka AB kružnice k na kojemu se nalazi i točka C, te I središte upisane kružnice trokutu ABC. Kružnica k siječe po drugi put pravac MI u K i kružnicu sa promjerom CI u H. Ako kružnica opisana trokutu CLK siječe AB ponovo u T, dokazati da su točke T, H, C kolinearne.

6. Naći sve funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ koje zadovoljavaju uvjet
$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(f(x)\big) - f(y) - 1$$

za sve $x, y \in \mathbb{Z}$.

Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme za izradu: 270 minuta

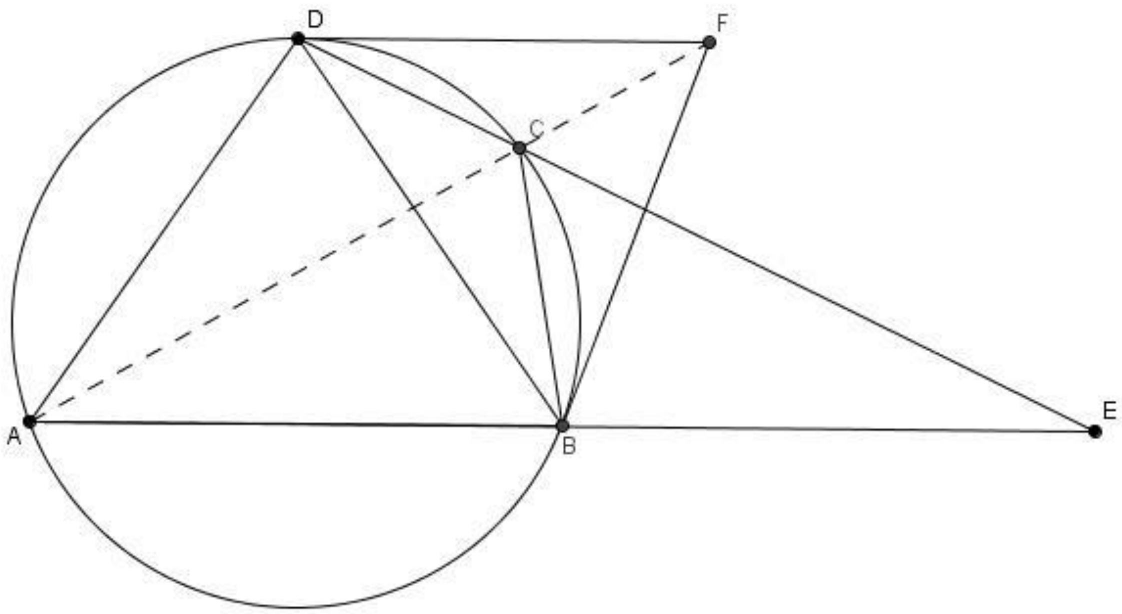
RJEŠENJA

1. Opisana je kružnica k četverokutu $ABCD$. Pravci AB i CD se sijeku u točki E, te vrijedi $|AB| = |BE|$. Neka je točka F sjecište tangenti na kružnicu k povučenih u točkama B i D te kružnice. Ako su pravci AB i DF paralelni, dokazati da su točke A, C, F kolinearne.

.

Rješenje 1:

Kako je $DF||AB$, to je D polovište luka AB, pa je $|AD| = |BD|$. Iz potencije točke E na kružnicu k je $2|AB|^2 = |EB| \cdot |EA| = |EC| \cdot |ED|$ (1). Sa druge strane, kako je $\measuredangle DCB = 180° - \measuredangle DAB = 180° - \measuredangle ABD = \measuredangle DBE$, to su trokuti DCB i DBE slični, pa vrijedi da je $\frac{|DB|}{|DE|} = \frac{|DC|}{|DB|}$, tj. $|DB|^2 = |DC| \cdot |DE|$ (2). Sada dijeljenjem (1) sa (2) imamo $\frac{2|AB|^2}{|DB|^2} = \frac{|EC|}{|DC|}$ $(*)$. Međutim, kako je $\measuredangle FDB = \measuredangle DAB$, to su jednakokraki trokuti ABD i DBF slični, odakle je $\frac{|DA|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|DB|}$, tj. $|DB|^2 = |AB| \cdot |DF|$. Uvrštavajući posljednju jednakost u $(*)$, dobijamo $\frac{|EC|}{|DC|} = \frac{2|AB|}{|DF|} = \frac{|AE|}{|DF|}$, pa kako vrijedi i $\measuredangle AEC = \measuredangle CDF$, to su trokuti AEC i DCF slični, što znači da je $\measuredangle ACE = \measuredangle DCF$, pa su tačke A, C, F kolinearne, što je i trebalo dokazati.



Rješenje 2:

Kao i u prvom rješenju, zaključujemo da je $AD = BD$ i $\frac{DA}{AB} = \frac{FD}{DB}$, tj. $\frac{DB}{AB} = \frac{FD}{DA}$. Dalje, iz sličnosti trouglova ACE i DBE imamo $\frac{AC}{CE} = \frac{BD}{BE} = \frac{BD}{AB} = \frac{FD}{AD}$. Kako je uz to i $\measuredangle ADF = 180° - \measuredangle BAD =$

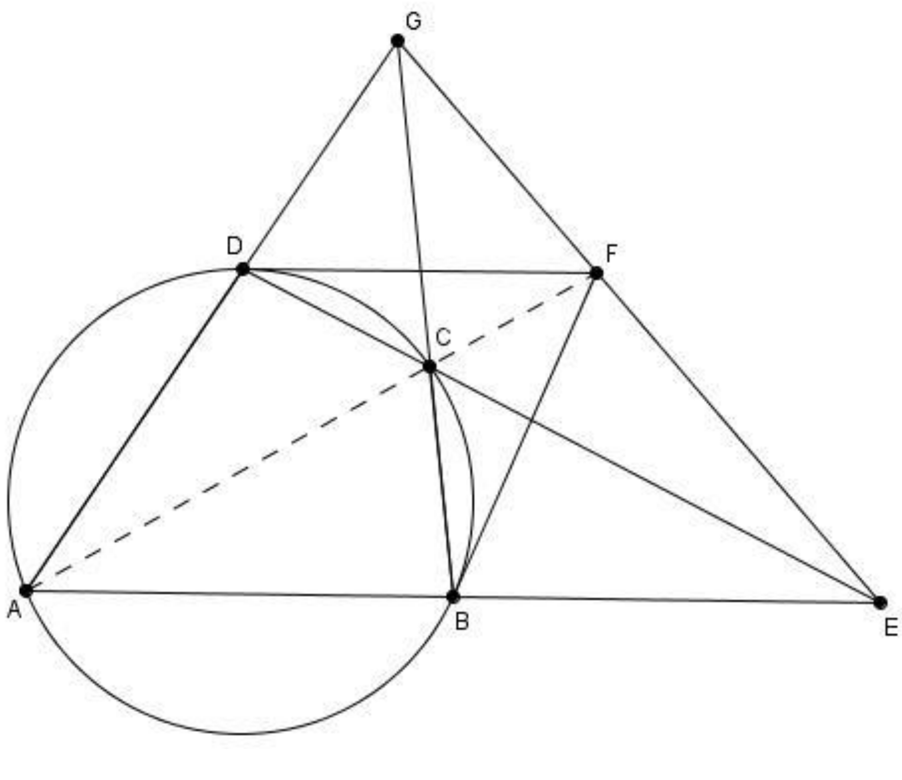
$180° - \measuredangle ABD = 180° - \measuredangle ACD = \measuredangle ACE$, to su trouglovi ACE i ADF slični, pa je $\measuredangle CAE = \measuredangle DFC$, odakle slijedi da su tačke A, C, F kolinearne.

Rješenje3:

Da bi dokazali da su tačke A, C, F kolinearne, dovoljno je dokazati da je $\frac{\sin \measuredangle BAC}{\sin \measuredangle DAC} = \frac{\sin \measuredangle BAF}{\sin \measuredangle DAF}$. Vidimo da je $\frac{\sin \measuredangle BAC}{\sin \measuredangle DAC} = \frac{BC}{DC}$. S druge strane, iz sinusne teoreme na trouglove BAF i DAF, imamo $\frac{\sin \measuredangle BAF}{\sin \measuredangle ABF} = \frac{BF}{AF} = \frac{DF}{AF} = \frac{\sin \measuredangle DAF}{\sin \measuredangle ADF}$, tj. $\frac{\sin \measuredangle BAF}{\sin \measuredangle DAF} = \frac{\sin \measuredangle ABF}{\sin \measuredangle ADF}$. Kako je $\measuredangle ABF = \measuredangle ABC + \measuredangle CBF = \measuredangle ABC + \measuredangle BAC = 180° - \measuredangle ACB = 180° - \measuredangle ADB$ i $\measuredangle ADF = 180° - \measuredangle DAB$, to je $\frac{\sin \measuredangle ABF}{\sin \measuredangle ADF} = \frac{\sin \measuredangle ADB}{\sin \measuredangle DAB} = \frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BD}$. Sada je potrebno dokazati $\frac{BC}{DC} = \frac{BE}{DB}$, što slijedi iz sličnosti trouglova DCB i DBE (koja je dokazana u rješenju 1). Ovim je dokaz završen.

Rješenje 4:

Iz Paskalove teoreme na (degenerisani) šestougao $ABBCDD$ imamo da se prave AD, BC i EF sijeku u jednoj tački ili su paralelne (jer je $E = AB \cap CD$ i $F = BB \cap DD$). Ako se sijeku u jednoj tački, neka je to tačka G.



Da bi A, C, F bile kolinearne, dovoljno je dokazati da se prave AF, GB i ED sijeku u jednoj tački, tj. (po Čevinoj teoremi) da vrijedi $\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GD}{DA} = 1.$ Posljednja jednakost vrijedi zbog $AB = BE$ i $\frac{GD}{AD} = \frac{FG}{FE}$ (Talesova teorema).

2. Neka je n prirodan, a t cijeli broj. Na tabli je napisano n različitih cijelih brojeva. Bob, koji je u susjednoj sobi, želi da zna da li među tim brojevima postoji određeni broj njih sa sumom $t.$ Alisa, koja se nalazi pred tablom, će mu pomoći u tome. Na početku, ona mu kaže samo ukupan zbir svih brojeva na tabli. Nakon toga, on joj u svakom potezu govori jednu od sljedeće 4 rečenice:

i. Da li među brojevima na tabli postoji broj k?
ii. Ako na tabli postoji broj k, izbriši ga.
iii. Ako na tabli ne postoji (cijeli) broj k, dodaj ga.
iv. Da li se brojevi na tabli mogu podijeliti u dva skupa sa jednakom sumom elemenata?

Na pitanja mu Alisa tačno odgovara sa da ili ne, a operacije koje on kaže ona izvede na tabli (ako je moguće), pri tom mu ne govoreći da li ih je izvela. Dokazati da u manje od $3n$ poteza Bob može saznati da li se među brojevima napisanim na početku nalaze neki čija je suma jednaka t.

Rješenje:

Neka je ukupna suma brojeva na ploči na početku jednaka s. Bob će najprije pitati da li među brojevima postoji broj $2t - s$. Ako njega nema, u sljedećem potezu će ga Bob dodati i tada će ukupna suma brojeva na ploči biti $2t$. Sada Bob pita 4. pitanje i ako je potvrdan odgovor, znači da imamo dva disjunktna podskupa početnog skupa i suma brojeva oba skupa je t, u jednom od njih se sigurno ne nalazi broj $2t - s$, pa samim tim u početnom skupu imamo skup sa sumom t. A ako je negativan odgovor, očigledno se u početnom skupu ne nalazi podskup sa sumom t. Znači, ako se broj $2t - s$ ne nalazi u početnom skupu, u dva pitanja Bob može saznati odgovor na svoje pitanje. Ako je broj $2t - s$ u skupu, Bob kaže Alisi da ga izbriše, a zatim pita pitanje 4. Ako je potvrdan odgovor, pošto je suma elemenata na tabli $s - (2t - s) = 2s - 2t$, to znači da postoji skup sa sumom $s - t$, i kad tom skupu dodamo element $2t - s$, dobijamo skup sa sumom t i u tom slučaju je Bob već saznao odgovor. A ako smo dobili negativan odgovor, onda sigurno ne postoji među početnim brojevima skup njih koji sadrži elemenat $2t - s$ i čija je suma t(jer bi onda među brojevima bez $2t - s$ postojao skup sa sumom $s - t$, što nije tačno). Znači, ako je negativan odgovor, ne postoji skup sa sumom t koji sadrži elemenat $2t - s$, ali vidimo da je Bob potrošio 3 poteza i već je saznao odgovor ili je saznao da jedan od n elemenata sigurno ne učestvuje u traženoj sumi. Nastavljajući ovako, nakon svaka 3 pitanja Bob sazna odgovor ili izbaci jedan element. Što znači, nakon $3(n - 1)$ poteza Bob će saznati odgovor ili će ostati još samo jedan broj na tabli kojeg će Bob znati, jer u svakom trenutku on zna sumu brojeva na tabli, što znači da će tada sigurno znati odgovor, što je i trebalo dokazati.

Komentar:

Granica $3(n-1)$ je optimalna samo za $n=1$(tada imamo 0 pitanja). Inače Bob može saznati odgovor sa još manje pitanja(lagano se može dobiti $3n-5$ za $n \geq 2$, samo posebno riješimo slučaj sa 2 elementa).

3. Za beskonačni niz $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$ prirodnih brojeva kažemo da je „lijep“, ako za svaki prirodan broj n vrijedi $a_{2n} = 2a_n$. Dokazati sljedeće tvrdnje:

c) Ako je dat „lijep“ niz i prost broj $p > a_1$, postoji neki član niza koji je djeljiv sa p;
d) Za svaki prost broj $p > 2$, postoji „lijep“ niz takav da nijedan član tog niza nije djeljiv sa p.

Rješenje:

a) Neka je d najmanja razlika dva uzastopna člana niza, tj. $d = \min\{\, a_{i+1} - a_i, i \in \mathbb{N}\,\}$ i neka je $d = a_{k+1} - a_k$. Tada je $2d = 2a_{k+1} - 2a_k = a_{2k+2} - a_{2k}$, pa kako je $a_{2k+2} - a_{2k} = a_{2k+2} - a_{2k+1} + a_{2k+1} - a_{2k} \geq d + d = 2d$ (nejednakost vrijedi zbog izbora broja d), to je $a_{2k+2} - a_{2k+1} = a_{2k+1} - a_{2k} = d$. Slično dobijamo da za svaki prirodan broj t važi $2^t \cdot d = 2^t \cdot a_{k+1} - 2^t \cdot a_k = a_{2^t\cdot(k+1)} - a_{2^t\cdot k} = a_{2^t\cdot(k+1)} - a_{2^t\cdot(k+1)-1} + a_{2^t\cdot(k+1)-1} - a_{2^t\cdot(k+1)-2} + \cdots + a_{2^t\cdot k+1} - a_{2^t\cdot k} \geq d + d + \cdots + d = 2^t \cdot d$, pa je $a_{2^t\cdot(k+1)} - a_{2^t\cdot(k+1)-1} = a_{2^t\cdot(k+1)-1} - a_{2^t\cdot(k+1)-2} = \cdots = a_{2^t\cdot k+1} - a_{2^t\cdot k} = d$. Uzmimo sada t takvo da je $2^t > p$, pa sigurno imamo p uzastopnih članova niza koji se razlikuju za d. Međutim, kako je $p > a_1 = 2a_1 - a_1 = a_2 - a_1 \geq d$, to vrijedi da je $(p,d) = 1$ (jer je p prost), pa onda ti uzastopni članovi niza obrazuju potpun sistem ostataka po modulu p. Zbog toga je neki od tih članova djeljiv sa p, $q.e.d.$

b) 1. način:
Za svaki prirodan broj n, neka je $f(n)$ prirodan broj s takav da vrijedi $2^s \leq n < 2^{s+1}$ (tj. neka je $f(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$). Posmatrajmo sada niz zadat sa $a_n = np + 2^{f(n)}$. Očigledno je ovaj niz rastući. Također, zbog definicije broja $f(n)$, jasno je da vrijedi $f(2n) = f(n) + 1$. Zbog toga vrijedi $a_{2n} = 2np + 2^{f(2n)} = 2np + 2^{f(n)+1} = 2\left(np + 2^{f(n)}\right) = 2a_n$. Dakle, ovaj niz je „lijep“, a očigledno p ne dijeli nijedan član niza (jer bi onda vrijedilo da $p|2^{f(n)}$, što je nemoguće). Ovim smo dokazali tvrdnju zadatka.
2. način:

Definišimo niz sa $a_1 = p + 1$, te $a_{2n} = 2a_n, a_{2n+1} = a_{2n} + p$ za $n \geq 1$. Očigledno za ovaj niz vrijedi $a_{2n} = 2a_n$, za sve prirodne brojeve n. Dokažimo da je rastući.

Dokazat ćemo i jaču tvrdnju, tj. da je $a_{i+1} - a_i \geq p$ (ovako smo konstruisali niz upravo zbog dokaza pod a)) Pretpostavimo suprotno. Neka je i najmanji indeks takav da je $a_{i+1} - a_i < p$. Zbog definicije niza jasno je da i mora biti neparan, neka je $i = 2k - 1$. Zbog izbora broja i vrijedi $a_k - a_{k-1} \geq p$, pa je $2p \leq 2a_k - 2a_{k-1} = a_{2k} - a_{2k-2} = a_{2k} - a_{2k-1} + a_{2k-1} - a_{2k-2} = a_{i+1} - a_i + p < p + p = 2p$, što je kontradikcija. Lagano matematičkom indukcijom dokazujemo da ne postoji član niza koji je djeljiv sa p (jer iz $p \nmid a_n$ slijedi $p \nmid a_{2n}$, a iz $p \nmid a_{2n}$ slijedi $p \nmid a_{2n+1}$). Ovim je dokaz završen.

4. Odrediti najveći prirodan broj n koji se ne može napisati kao zbir tri broja veća od 1 koji su po parovima relativno prosti.

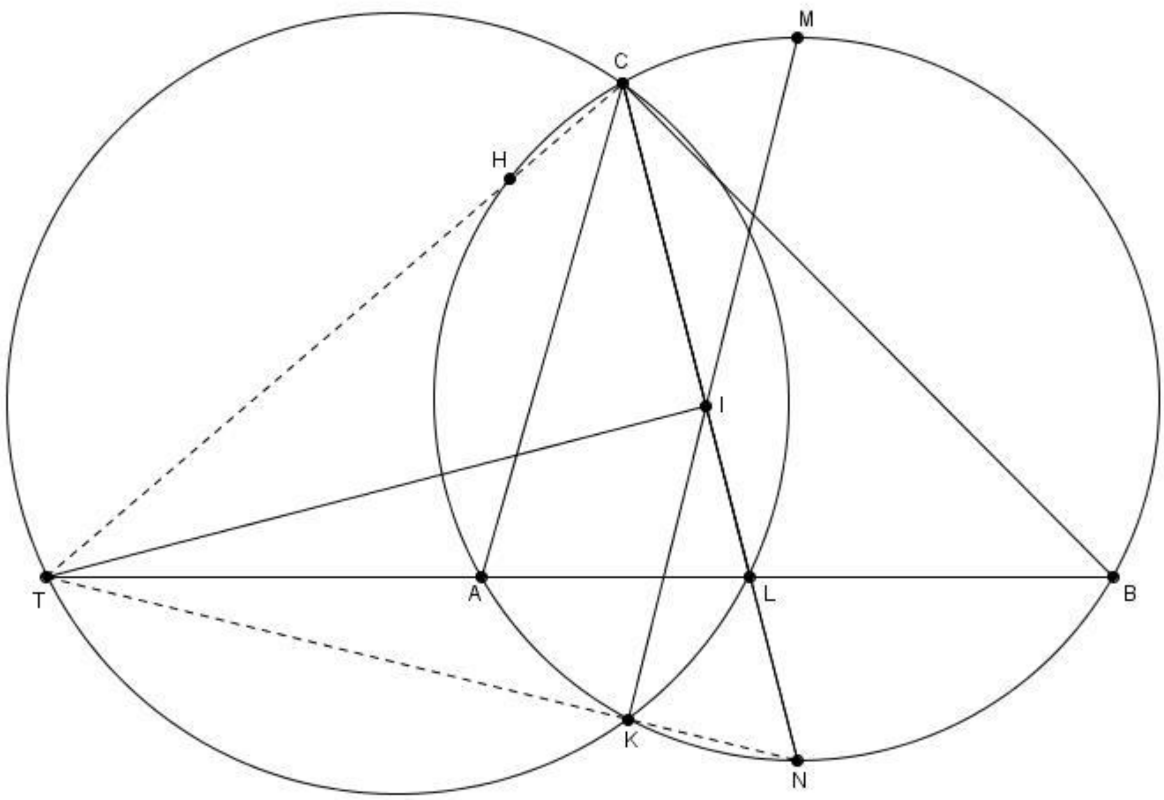
Rješenje:

To je broj 17. Dokažimo da 17 ne možemo napisati kao zbir 3 broja koji su po parovima relativno prosti. Pretpostavimo suprotno. Ta tri broja moraju biti neparni, te mora među njima biti broj 3, jer bi inače najmanji mogući zbir bio $5 + 7 + 9 = 21 > 17$. Zato među njima ne smije biti broj 9. Najmanji mogući zbir je $3 + 5 + 7 = 15 < 17$, a sljedeći najmanji mogući je $3 + 5 + 11 = 19 > 17$. Zbog toga je nemoguće napisati broj 17 u traženom obliku.

Dokažimo sada da je moguće svaki broj veći od 17 napisati u traženom obliku. Dokažimo prvo za parne brojeve. Vrijedi $6k + 4 = (6k - 1) + 2 + 3, 6k + 2 = (6k - 5) + 3 + 4, 6k = (6k - 5) + 2 + 3$ (vidimo da čak sve parne brojeve veće od 8 možemo napisati u datom obliku). Mogli smo i drugačije dokazati da se svi parni brojevi mogu napisati , naime $4k + 2 = (2k - 1) + (2k + 1) + 2$, a $4k = (2k - 3) + (2k + 1) + 2$.

Dokažimo sada tvrdnju za neparne brojeve. Tu ćemo razdvojiti slučajeve po modulu 12. Naime, $12k + s = (6k + 1) + (6k - 1) + s$, gdje $s \in \{3,9\}$. Dalje, $12k + 7 = (6k - 1) + (6k + 5) + 3, 12k + 1 = (6k - 7) + (6k - 1) + 9, 12k + 5 = (6k - 5) + (6k + 1) + 9, 12k + 11 = (6k + 1) + (6k + 7) + 3$. Lako se provjerava da su u svim slučajevima brojevi po parovima relativno prosti. Primijetimo još da su za $k >= 1$ svi sabirci veći od 1 osim u rastavljanju $12k + 5$ i $12k + 1$ za $k = 1$, ali to su onda redom brojevi 17 i 13, koji su manji od 17.

5. Neka je k kružnica opisana oko oštrouglog trougla ABC $(AC < BC)$. Dalje, neka je CL simetrala ugla $\measuredangle ACB$ $(L \in AB)$, M sredina luka AB kružnice k na kojem se nalazi i tačka C, te I centar upisane kružnice trougla ABC. Kružnica k siječe po drugi put pravu MI u K i kružnicu sa prečnikom CI u H. Ako kružnica opisana oko trougla CLK siječe AB ponovo u T, dokazati da su tačke T, H, C kolinearne.



Rješenje:

Neka simetrala ugla $\measuredangle ACB$ siječe k u N. Tada je $\measuredangle NKC + \measuredangle CKT = \measuredangle NAC + \measuredangle CLT = \measuredangle NAC + \measuredangle ABC + \measuredangle LCB = \measuredangle NAC + \measuredangle ANC + \measuredangle ACN = 180°$, pa su tačke T, K, N kolinearne. Poznato je (i lako dobijamo) da je $NA = NB = NI$. Kako je $\measuredangle NAB = \measuredangle NCB = \measuredangle NCA$, to su trouglovi NAL i NAC slični, pa je $NA^2 = NL \cdot NC$. Iz potencije tačke N na kružnicu opisanu oko četverougla $TKLC$ je $NL \cdot NC = NK \cdot NT$. Sada imamo $NI^2 = NA^2 = NL \cdot NC = NK \cdot NT$, pa su trouglovi NKI i NTI slični, odakle je $\measuredangle TIN = \measuredangle IKN = 90°$ (očigledno je MN prečnik kružnice k). Primijetimo da se kružnica k_1 opisana oko trougla ABI (čiji je centar N) i kružnica k_2 sa prečnikom CI dodiruju u tački I (jer su centri i tačka I na istoj pravoj). Zato je TI zajednička tangenta tih kružnica. Posmatrajmo sada kružnice k, k_1, k_2. Prave AB, TI i CH su redom radikalne osi kružnica k i k_1, k_1 i k_2, k_2 i k, pa se sijeku u jednoj tački, odakle slijedi da su tačke T, H, C kolinearne, $q.e.d.$

6. Naći sve funkcije $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ koje zadovoljavaju uvjet

$$f\big(x - f(y)\big) = f\big(f(x)\big) - f(y) - 1$$

za sve $x, y \in \mathbb{Z}$.

Rješenje 1:

Označimo se $(*)$ početnu jednadžbu. Ako stavimo u (*) $x = 0$ i $y = f(0)$, imamo da za $z = -f(f(0))$ vrijedi $f(z) = -1$. Ako u $(*)$ ubacimo $y = z$ dobivamo da je

$$f(x+1) = f\big(f(x)\big) \qquad (1)$$

za sve $x \in \mathbb{Z}$. Tako da sada $(*)$ postaje

$$f\big(x - f(y)\big) = f(x+1) - f(y) - 1. \quad (2)$$

Iz (2), za $y = x$ dobivamo

$$f(x+1) - f(x) = f\big(x - f(x)\big) + 1 = f(f\big(x - 1 - f(x)\big) + 1.$$

Kako je iz (2) $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - f(x) - 1 = -1$, to dobivamo

$$f(x+1) = f(x) + A,$$

gdje je $A = f(-1) + 1$ neka konstanta.

Sada lako matematičkom indukcijom u oba smjera dobivamo da je $f(x) = Ax + B$, gdje je $B = f(0)$. Ako zamjenimo ovo u (1) dobivamo

$$Ax + (A + B) = A^2x + (AB + B)$$

za sve $x \in \mathbb{Z}$. Ako primjenimo to na $x = 0$ i $x = 1$ dobivamo redom $A + B = AB + B$ i $A^2 = A$. Druga jednadžba nam daje $A = 0$ ili $A = 1$. U slučaju $A = 1$, iz prve jednadžbe dobivamo $B = 1$, što nam daje rješenje $f(x) = x + 1$. Ako je $A = 0$, slijedi da je rješenje $f(x) = -1$. Dakle, jedina rješenja su $f(x) = x + 1$ i $f(x) = -1$, što lako provjeravamo.

Rješenje 2:

Kao i u prvom rješenju dobivamo jednakosti (1) i (2). Ako je f injektivna funkcija, iz (1) slijedi da je $f(x) = x + 1$. Pretpostavimo suprotno, da postoje a i b $(a > b)$ takvi da je $f(a) = f(b)$. Koristeći (1), lako matematičkom indukcijom dobivamo da je $f(a + n) = f(b + n)$ za $n \in \mathbb{N}$, pa je niz $c_n = f(b + n)$ periodičan, a samim tim i ograničen, pa postoje cijeli brojevi $m = \min c_n$ $(n \geq 0)$ i $M = \max c_n$ $(n \geq 0)$. Uzmimo y takvo da je $f(y) = m$ i cijeli broj $x \geq a$ takav da je $f\big(x - f(y)\big) = m$. Zbog definicije broja m iz (2) imamo da vrijedi

$$m \leq f(x+1) = f\big(x - f(y)\big) + f(y) + 1 = 2m + 1,$$

pa je $m \geq -1$. Slično dobivamo da je $M \leq -1$, pa zbog $m \leq M$ vrijedi $f(t) = -1$ za sve $t \geq a$.

Konačno, za dati cijeli broj y, možemo naći x takvo da je $x + 1 \geq a$ i $x - f(y) \geq a$. Tada iz (2) dobivamo da je

$$f(y) = f(x+1) - f\big(x - f(y)\big) - 1 = (-1) - (-1) - 1 = -1.$$

Ovim je zadatak riješen.