XVI Matematička olimpijada BiH

Elektro-tehnički fakultet Istočno Sarajevo

Lukavica, 14. 05. 2011.

Dan 1

1. U trouglu ABC vrijedi $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Neka su M i N središta duži AB i AC, i neka je k kružnica opisana oko trougla AMN. Dokazati da centar kružnice upisane u trougao ABC pripada kružnici k.
2. Na polukružnici prečnika $AB = d$ zadate su tačke C i D tako da vrijedi $BC = CD = a$ i $DA = b$, gdje su a, b i d različiti prirodni brojevi. Odrediti najmanju moguću vrijednost broja d.
3. Brojevi $1, 2, \dots, 2n$ su raspoređeni u dva niza $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ i $b_1 > b_2 > \dots > b_n$. Dokazati da je broj

$$W = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

potpun kvadrat.

- Svaki zadatak se vrednuje sa 7 bodova.
- Vrijeme za izradu zadataka je 4 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.

Sretno!

XVI Matematička olimpijada BiH

Elektro-tehnički fakultet Istočno Sarajevo

Lukavica, 15. 05. 2011.

Dan 2

1. Odrediti najveću vrijednost broja a koji ima osobinu da za bilo koji raspored brojeva $1, 2, 3, \ldots, 10$ po kružnici, moraju postojati tri susjedna broja čija je suma veća ili jednaka a.
2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi čiji je zbir jednak 1. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$a\sqrt[3]{1+b-c} + b\sqrt[3]{1+c-a} + c\sqrt[3]{1+a-b} \leq 1.$$

3. U četverouglu $ABCD$ stranice AD i BC nisu paralelne. Dijagonale AC i BD sijeku se u tački E. Tačke F i G dijele AB i DC, respektivno, u omjeru $\frac{AD}{BC}$.

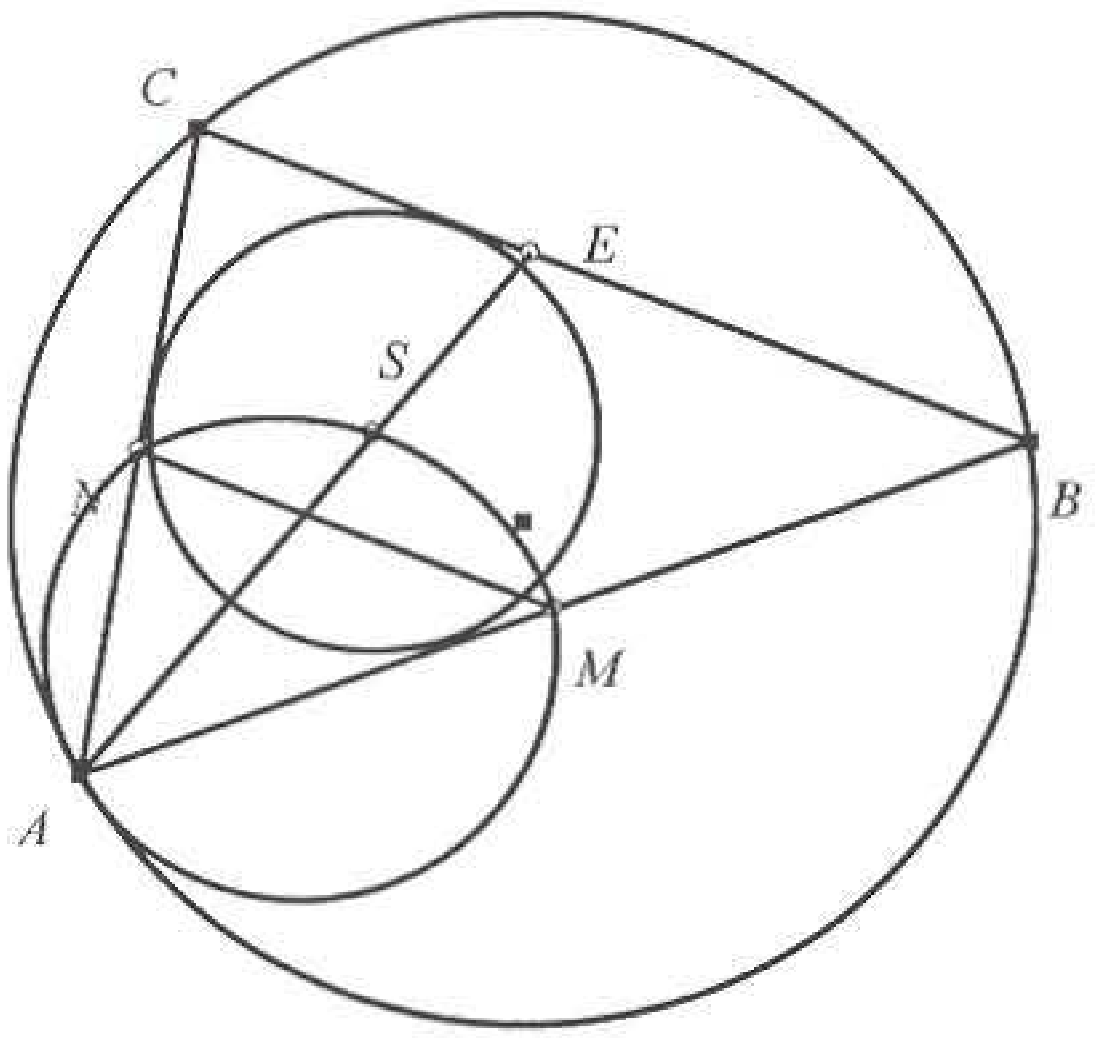
Ako su tačke E, F i G kolinearne dokazati da je četverougao $ABCD$ tetivan.

- Svaki zadatak se vrednuje sa 7 bodova.
- Vrijeme za izradu zadataka je 4 sata.
- Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.

Sretno!

U trokutu ABC vrijedi $|BC| = \frac{1}{2}(|AB| + |AC|)$. Neka su M i N polovišta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, i neka je k kružnica opisana oko trokuta AMN. Dokazati da središte kružnice upisane u trokut ABC pripada kružnici k.

Rješenje:



Neka je E sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i dužine $\overline{BC}$.

Tada je

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|CE|}.$$

Odavde je

$$\frac{|AB| + |AC|}{|AC|} = \frac{|BE| + |CE|}{|CE|} = \frac{|BC|}{|CE|},$$

tj.

$$\frac{2|BC|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|CE|},$$

a odavde slijedi

$$|CE| = \frac{1}{2}|AC| = |CN|.$$

Analogno je

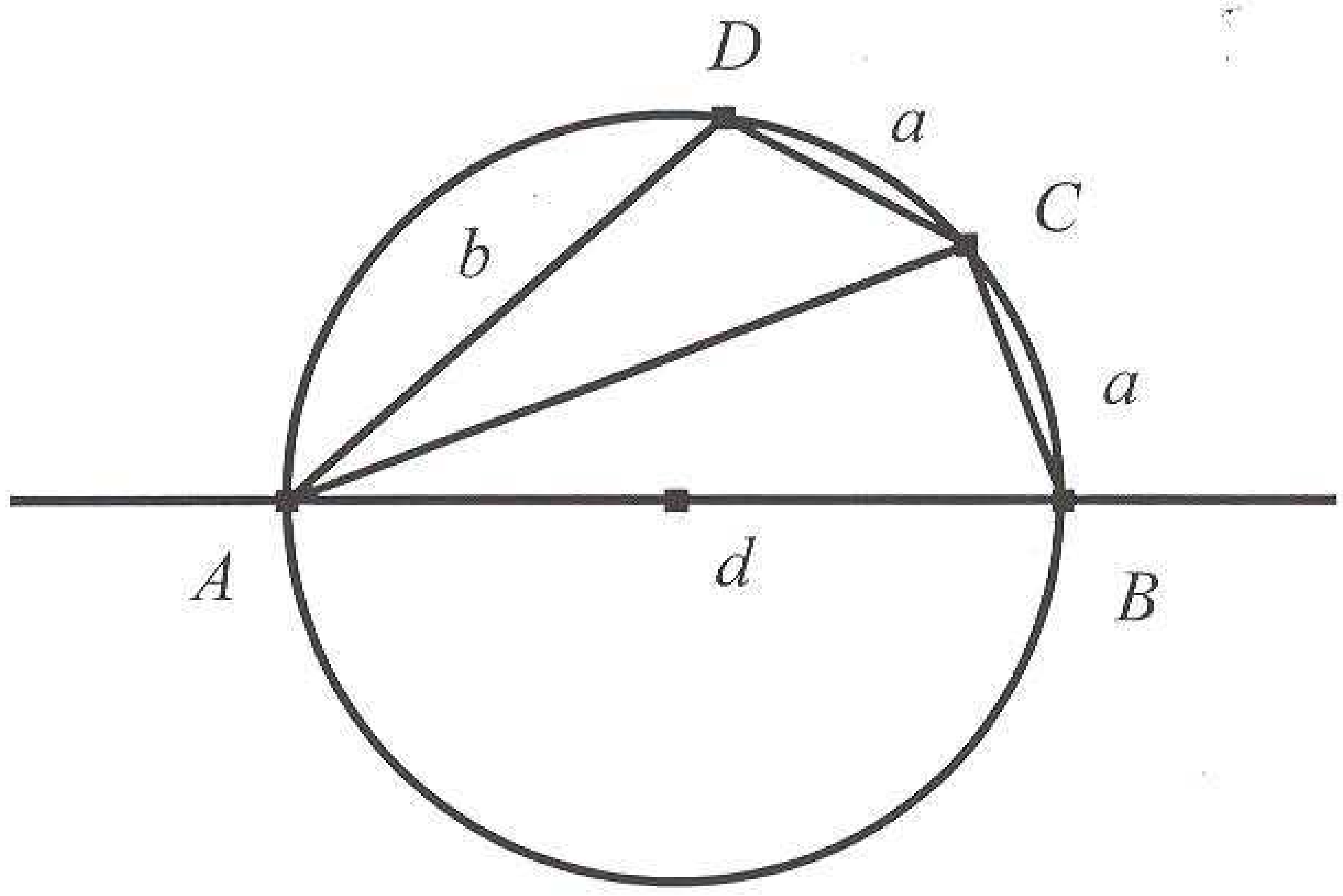
$$|BE| = \frac{1}{2}|AB| = |BM|.$$

Prema tome trokuti NEC i EMB su jednakokraki, te su simetrale kutova $\sphericalangle NCE$ i $\sphericalangle MBE$ ujedno i simetrale dužina $\overline{NE}$ i $\overline{ME}$. Njihovo sjecište je točka S, središte opisane kružnice troukutu MNE, pa pripada i simetrali dužine $\overline{MN}$. Točka S je ujedno i središte kružnice upisane trokutu ABC, pa se nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle BAC$, odnosno kuta $\sphericalangle MAN$.

Kako se simetrala unutarnjeg kuta i simetrala nasuprotne stranice trokuta sijeku na kružnici opisanoj tom trokutu, to se točka S nalazi na kružnici k.

2. Na polukružnici prečnika $AB = d$ zadate su tačke C i D tako da vrijedi $BC = CD = a$ i $DA = b$, gdje su a, b i d različiti prirodni brojevi. Odrediti najmanju moguću vrijednost broja d.

<u>**Rješenje**</u>



Jasno je da su $a, b < d$. Iz jednakosti duži BC i CD slijedi jednakost uglova $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \theta$.

Trougao ADB je pravougli pa važi $AD = b = d \cdot \cos 2\theta$. Slično iz pravouglog trougla ABC $BC = a = d \cdot \sin\theta$.

Koristeći identitet $\cos 2\theta = 1 - 2sin^2\theta$ dobijamo

$$\frac{b}{d} = 1 - 2 \cdot \frac{a^2}{d^2},$$

odnosno

$$bd + 2a^2 = d^2.$$

(Alternativno, upotrebom Ptolomejeve teoreme dobija se slična jednačina)

Pokažimo da d ne može biti prost broj. U protivnom bi, $d|2a^2$ i ako $d \neq 2$, $d|a^2$ pa pošto je d prost broj, dobijamo $d|a$, što je nemoguće, jer $a < d$.

Za $d = 2$, dobijamo da je $a = b = 1$, što nije u skladu sa uslovima zadatka.

Ukoliko je $d = 2p$, gdje je p prost broj, dobijamo

$$bp + a^2 = 2p^2.$$

Sada $p|a^2$, odnosno $p|a$ i $a < 2p$, pa je $a = p$.

Međutim, tada se dobija $b = p$, što je u kontradikciji sa $a \neq b$.

Prvi broj koji dolazi u obzir je $d = 8$. Gornja jednačina postaje

$$4b + a^2 = 32.$$

Odavde je a paran broj i zbog pozitivnosti broja b u obzir dolaze samo vrijednosti $a = 2$ i $a = 4$. Slučaj $a = 4$ dovodi do vrijednosti $b = 4$, što odbacujemo.

Za $a = 2$ imamo da vrijedi $b = 7$ za koju se pokaže da je rješenje, tj. $d = 8$.

3. Brojevi $1, 2, \ldots, 2n$ su raspoređeni u dva niza $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ i $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Dokazati da je broj

$$W = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

potpun kvadrat.

Rješenje:

Pretpostavimo da je $b_n > a_n$. Tada vrijedi:

$$W = |2n - 1| + |2n - 1 - 2| + \cdots + |n + 1 - n| = n^2.$$

Analogno, za $a_1 > b_1$ zaključujemo da je $W = n^2$.

Razmotrimo sada slučajeve za koje elementi jednog niza nisu svi veći od svih elemenata drugog niza, tj. $a_1 < b_1$ i $a_n > b_n$. Odavde slijedi da mora postojati indeks k za koji vrijedi $a_k < b_k$ i $a_{k+1} > b_{k+1}$.

Iz uslova zadatka imamo da vrijedi $b_{k-1} > b_k$ i $a_k > a_{k-1}$. Kombinirajući ovo sa $a_k < b_k$ zaključujemo da je $a_i < b_i$ za $1 \leq i \leq k$.

Analogno, zaključujemo da vrijedi i $a_i > b_i$ za $k + 1 \leq i \leq n$.

Dakle,

$$W = b_1 - a_1 + \cdots + b_k - a_k + a_{k+1} - b_{k+1} + \cdots + a_n - b_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) - 2(a_1 + \cdots + a_k + b_{k+1} + \cdots + b_n) =$$

$$= n(2n + 1) - 2(a_1 + \cdots + a_k + b_{k+1} + \cdots + b_n).$$

Međutim,

$$a_1 < a_2 < \cdots a_k < b_k < b_{k-1} < \cdots < b_1$$

i

$$b_n < b_{n-1} < \cdots < b_{k+1} < a_{k+1} < a_{k+1} < \cdots < a_n.$$

Dakle, elementi $\{b_1, \ldots, b_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ su svi veći od elemenata $\{a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}$, tj.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + b_{k+1} + b_{k+2} + \cdots + b_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

tj.

$$W = n(2n+1) - n(n+1) = n^2.$$

4. Odrediti najveću vrijednost broja a koji ima osobinu da za bilo koji raspored brojeva $1, 2, 3, \dots, 10$ po kružnici, moraju postojati tri susjedna broja čija je suma veća ili jednaka a.

Rješenje:

Posmatrajmo sve uzastopne trojke; njih ima 10 i označimo ih sa $S_1, S_2, \dots, S_{10}$.

Vrijedit će

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{10} = 3(1 + \dots + 10) = 165.$$

Odavde mora postojati $i \in \{1, 2, \dots, 10\}$ takav da je $S_i \geq \frac{165}{10} = 16,5$, odnosno $S_i \geq 17$. Time je $a \geq 17$.

Pokažimo da je zapravo $a = 18$. Ispuštajući broj 1 dobit ćemo niz od devet uzastopnih prirodnih brojeva i podijelimo ih u tri uzastopne sume od po tri broja, T_1, T_2, T_3. Suma svih tih brojeva je

$$2 + 3 + 4 + \dots + 10 = 54 = T_1 + T_2 + T_3.$$

Odavde je jasno da je barem jedan $T_i \geq \frac{54}{3} = 18$.

Da a ne može biti veći od 18 dobivamo na osnovu cikličkog rasporeda $(1, 10, 6, 2, 9, 4, 5, 3, 8, 7)$.

5. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi čiji je zbroj jednak 1. Dokazati da vrijedi nejednakost:

$$a\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-a}+c\sqrt[3]{1+a-b}\leq 1.$$

__Rješenje:__

Pokažimo da su $1+b-c, 1+c-a, 1+a-b$ pozitivni realni brojevi.

$$1+b-c=a+b+c+b-c=a+2b>0.$$

Slično se pokaže i za ostale brojeve.

Primjenom AG nejednakosti dobivamo:

$$\frac{1+1+(1+b-c)}{3}\geq\sqrt[3]{1+b-c}$$

$$a\sqrt[3]{1+b-c}\leq a\frac{1+1+(1+b-c)}{3}=\frac{3a+ab-ac}{3}=a+\frac{ab-ac}{3}.$$

Analogno dobivamo:

$$b\sqrt[3]{1+c-a}\leq b+\frac{bc-ba}{3}$$

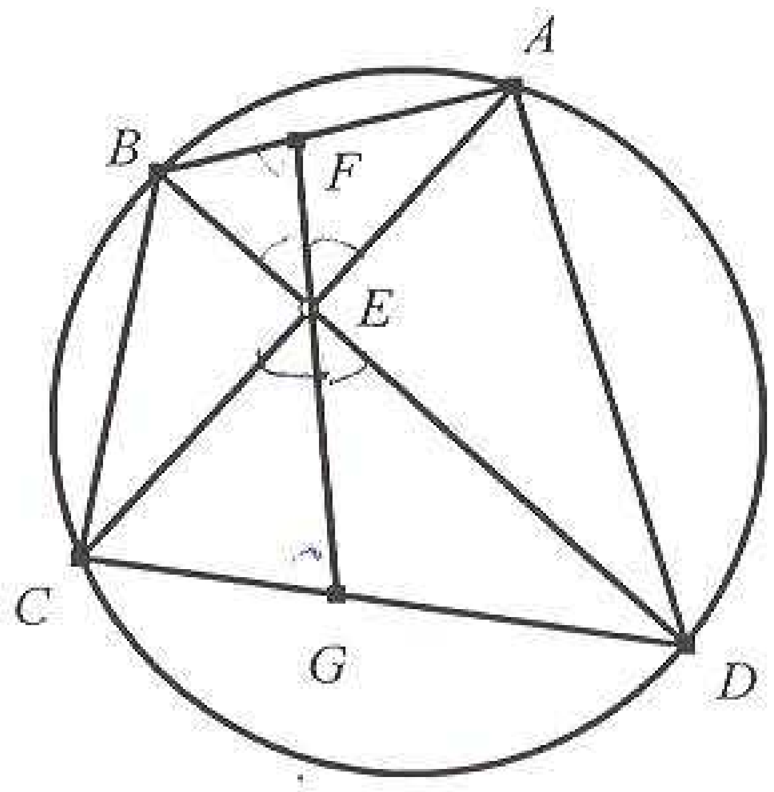
$$c\sqrt[3]{1+a-b}\leq c+\frac{ca-cb}{3}.$$

Zbrajanjem ove tri nejednakosti dobivamo traženu nejednakost.

6. U četverouglu $ABCD$ stranice AD i BC nisu paralelne. Dijagonale AC i BD sijeku se u tački E. Tačke F i G dijele AB i DC, respektivno, u omjeru $\frac{AD}{BC}$.

Ako su tačke E, F i G kolinearne dokazati da je četverougao $ABCD$ tetivan.

<u>Rješenje:</u>



Primjenom Menelajeve teoreme na trouglove BCD i ABC imamo:

$$\frac{CG}{GD} \cdot \frac{DE}{EB} \cdot \frac{BX}{XC} = 1$$

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

pri čemu je $BC \cap FG = \{X\}$.

Nakon dijeljenja imamo:

$$\frac{DE \cdot AE}{BE \cdot CE} = \frac{AF \cdot GD}{FB \cdot CG} = \frac{AD^2}{BC^2}$$

(koristili smo uslov zadatka $\frac{AF}{FB} = \frac{DG}{GC} = \frac{AD}{BE}$).

Iz trouglova ADE i BCE imamo:

$$\frac{AD}{\sin \sphericalangle AED} = \frac{AE}{\sin \sphericalangle EDA} = \frac{DE}{\sin \sphericalangle EAD}$$

i

$$\frac{BC}{\sin \sphericalangle BEC} = \frac{BE}{\sin \sphericalangle BCE} = \frac{CE}{\sin \sphericalangle CBE}$$

tj.

$$AD^2 = \frac{AE \cdot DE \cdot sin \sphericalangle AED \cdot sin \sphericalangle AED}{\sin \sphericalangle EDA \cdot \sin \sphericalangle EAD}$$

i

$$BC^2 = \frac{BE \cdot CE \cdot \sin \sphericalangle BEC \cdot \sin \sphericalangle BEC}{\sin \sphericalangle BCE \cdot \sin \sphericalangle CBE}.$$

Sada dijeljenjem i relacijom koju smo dobili za kvadrate ovih stranica imamo:

$$1 = \frac{\sin \sphericalangle BCE \cdot \sin \sphericalangle CBE}{\sin \sphericalangle EDA \cdot \sin \sphericalangle EAD}$$

tj.

$$\cos(\sphericalangle EDA - \sphericalangle EAD) = \cos(\sphericalangle BCE - \sphericalangle CBE).$$

Odavde slijedi:

$$\sphericalangle EDA - \sphericalangle EAD = \pm(\sphericalangle BCE - \sphericalangle CBE).$$

No, imamo da vrijedi i

$$\sphericalangle EDA + \sphericalangle EAD = \sphericalangle BCE + \sphericalangle CBE$$

i prema tome vrijedi $\sphericalangle EDA = \sphericalangle BCE$ ili $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBE$. Drugi slučaj odbacujemo zbog pretpostavke zadatka da stranice AD i BC nisu paralelne.

Dakle, četverougao $ABCD$ je tetivan.

КОНАЧНИ РЕЗУЛТАТИ БХМО 2011

			Задатак				Задатак			
Име и презиме	Школа и мјесто	Шифра1	1	2	3	Шифра2	4	5	6	Укупно
Мина Феризбеговић	Сарајево колеџ	14	7	4	7	64	7	7	4	36
Ратко Дарда	Гимназија Приједор	24	7	3	6	56	6	7	5	34
Владимир Ивковић	СШЦ Невесиње	22	7	6	7	55	5	7	0	32
Златан Туцаковић	II гимназија Сарајево	4	7	2	6	62	7	7	0	29
Есма Мујкић	Сарајево колеџ	3	7	3	0	59	2	6	7	25
Сеад Делалић	II гимназија Сарајево	9	7	1	2	71	7	6	1	24
Харун Хиндија	Сарајево колеџ	15	7	1	0	72	2	7	7	24
Ријад Скробо	Сарајево колеџ	12	1	2	6	54	7	7	1	24
Славко Ивановић	Гимназија Зворник	6	7	0	1	70	6	7	0	21
Абдулах Јашаревић	Сарајево колеџ	1	7	4	0	57	1	7	1	20
Хамза Мерзић	I бошњачка гимназија Сарајево	5	7	0	1	52	6	6	0	20
Роберт Матичевић	КШЦ Тузла	16	1	7	0	73	5	0	0	13
Аднан Ибрић	Гимназија Лукавац	17	4	2	0	68	1	6	0	13
Мухамед Чилашевић	Гимназија Тузла	13	0	6	0	51	5	0	0	11
Марко Палангетић	СШЦ Власеница	8	0	1	0	60	3	6	0	10
Ивона Јурошевић	СШЦ Братунац	10	2	4	1	75	0	3	0	10
Марија Тороман	Гимназија Бања Лука	2	5	0	0	61	4	0	0	9
Хаџем Хаџић	Сарајево колеџ	23	0	0	3	69	6	0	0	9
Марко Рајковић	СШЦ Невесиње	20	1	0	0	53	2	1	1	5
Ријад Муминовић	II гимназија Сарајево	21	1	0	1	58	2	0	0	4
Невена Митровић	Гимназија Градишка	25	0	0	0	77	3	1	0	4
Андреа Милаковић	Гимназија Бања Лука	18	0	0	0	76	1	2	0	3
Давид Врховац	Гимназија Бања Лука	11	0	0	0	63	2	0	0	2
Владан Јовичић	СШЦ Власеница	19	0	0	0	66	0	2	0	2
Младен Пејић	КШЦ Тузла	26	0	2	0	74	0	0	0	2
Селвер Садиковић	Уна-Сана колеџ Бихаћ	7	0	0	1	67	0	0	0	1
Денис Божић	Гимназија Мостар	28	1	0	0	81	0	0	0	1
Денис Чуљак	Гимназија Мостар	31	0	0	0	79	0	1	0	1
Луција Ловрић	Гимназија Широки Бријег	27	0	0	0	65	0	0	0	0
Мирна Михаљевић	СШ Купрес	29	0	0	0	78	0	0	0	0
Ајна Ибрахимкадић	МСШ Жабљак-Усора	30	0	0	0	82	0	0	0	0
Мате Марас	Гимназија Широки Бријег	32	0	0	0	83	0	0	0	0
Марко Васић	Гимназија Дервента	33	0	0	0	80	0	0	0	0

Такмичарска комисија