Rješenja zadataka XIV matematičke olimpijade Bosne i Hercegovine

Sarajevo, 9. i 10.5.2009. godine

Zadatak 1 *Neka su M i N podnožja normala povučenih iz tjemena A na simetrale spoljanjih uglova pri tjemenima B i C trougla ABC. Dokažite da je dužina duži MN jednaka poluobimu trougla ABC.*

Rješenje: Neka su E i F polovišta stranica AB i AC trougla ABC. Budući da je trougao ABM pravougli, to je E centar opisane kružnice trougla ABM. Zato je $|EB| = |EM|$ i $\angle EMB = \angle EBM$ a koji su suplementni uglu $\angle MBC$, iz čega slijedi da je ME paralelno sa BC. Zato su tačke M, E, F i N kolinearne (jer je i EF paralelno sa BC), pa vrijedi $|ME| = |EA| = \frac{1}{2}|AB|$, $|FN| = |FA| = \frac{1}{2}|CA|$, $|EF| = \frac{1}{2}|BC|$ pa je

$$|MN| = |ME| + |EF| + |FN| = \frac{1}{2}\left(|AB| + |AC| + |BC|\right)$$

Zadatak 2 *Nai sve parove (a, b) prirodnih brojeva takve da je*

$$\frac{a^2(b-a)}{b+a}$$

kvadrat prostog broja.

Rješenje: Neka je

$$\frac{a^2(b-a)}{b+a} = p^2, a, b \in \mathbf{N}, p \textit{ prost}$$

Izrazimo b preko a i p:

$$b = \frac{a(a^2+p^2)}{a^2-p^2} \in \mathbf{N}$$

1. slučaj: $(a, p) = 1$. Tada je $(a^2+p^2, a^2-p^2)|2$ i $(a^2-p^2, a) = 1$ odakle slijedi da b nije prirodan broj. U ovom slučaju nema rješenja jer $a^2 - p^2 > 2$.

2. slučaj: $(a, p) \neq 1$. Tada je $a = kp$, $k \in \mathbf{N}$, pa je

$$b = \frac{kp \cdot p^2(k^2+1)}{p^2(k^2-1)} = \frac{kp(k^2+1)}{k^2-1} \in \mathbf{N}$$

Slijedi da je $(k^2+1, k^2-1)|2$ i $(k^2-1, k) = 1$, što daje da je $(k^2-1)|2p$, odnosno da je $k^2 - 1 \in \{1, 2, p, 2p\}$. Imamo četiri podslučaja:

a) $k^2 - 1 = 1 \Rightarrow k^2 = 2$ što nema rješenja.

b) $k^2 - 1 = 2 \Rightarrow k^2 = 3$ što nema rješenja.

c) $k^2 - 1 = p \Rightarrow (k-1)(k+1) = p$, odakle imamo da je $k = 2$ i $p = 3$, pa je $a = kp = 6$, a $b = 10$.

d) $k^2 - 1 = 2p \Rightarrow (k-1)(k+1) = 2p$. Pošto su $k-1$ i $k+1$ iste parnosti i pošto je desna strana djeljiva sa 2, to su i $k-1$ i $k+1$ uzastopni parni brojevi, pa je jedan od njih djeljiv sa 4, a drugi sa 2, pa je lijeva strana djeljiva sa 8, a desna nije. Znači ovaj slučaj nema rješenje.

Jedino rješenje je $(a, b) = (6, 10)$.

Zadatak 3 *Neka su $a_1, a_2, \ldots a_{100}$ realni brojevi za koje vrijedi*

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_{100} \geq 0$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 100$$
$$a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_{100}^2 \geq 100$$

Kolika je minimalna vrijednost sume $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$?

Rješenje: Zbog datih uslova mora biti $a_2 > 0$. Iz

$$a_2a_3 + a_2a_4 + \ldots a_2a_{100} \geq a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_{100}^2 \geq 100$$

dobija se

$$a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} \geq \frac{100}{a_2}$$

Sada je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} \geq a_1 + a_2 + \frac{100}{a_2} \geq 2a_2 + \frac{100}{a_2} \geq 2\sqrt{2a_2 \cdot \frac{100}{a_2}} = 20\sqrt{2}$$

Traženi minimum nije manji od $20\sqrt{2}$. Jednakost se dostiže za $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 5\sqrt{2}$ i $a_5 = a_6 = \ldots = a_{100} = 0$. Dakle, minimalna vrijednost zbira je $20\sqrt{2}$.

Zadatak 4 *Data je tablica $1 \times n$, $(n \geq 2)$. Dva igrača naizmjenično upisuju znakove "$+$" i "$-$" u slobodna polja. Prvi igrač upisuje stalno "$+$", a drugi stalno "$-$". Nije dozvoljeno da dva ista znaka budu upisana u dva susjedna polja. Gubi igrač koji ne može da odigra potez. Koji od igrača ima pobjedničku strategiju?*

Rješenje: Drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Strategija se sastoji u tome da u svom prvom potezu drugi igrač upiše "$-$" u neka od krajnjih polja. U nastavku igre može igrati na proizvoljan način (naravno, poštujući pravila). Dokažimo da on uvijek pobjeđuje, igrajući tako. Poslije k-tog poteza prvog igrača ako se izbaci k polja koja sadrže "$+$", tablica se razbija na k povezanih dijelova koji sadrže prazna polja ili polja sa "$-$". Kako ima samo $k-1$ minusa, slijedi da je ostao jedan dio koji sadrži samo prazna polja i drugi igrač može upisati "$-$" u neko od tih polja. Dakle, drugi igrač ima potez poslije svakog poteza prvog igrača, pa on prema tome pobjeđuje.

Zadatak 5 *Prava siječe stranice AB i BC trougla ABC u tačkama M i K. Ako je površina trougla MBK jednaka površini četvorougla $AMKC$, dokazati da je tada*

$$\frac{|MB|+|BK|}{|AM|+|CA|+|KC|} \geq \frac{1}{3}$$

Rješenje: Označimo radi jednostavnijeg pisanja dužine $|BK|=y$, $|KC|=z$, $|CA|=b$, $|AM|=u$ i $|MB|=x$. Budući da je $P_{BMK}=P_{AMKC}$. to je $P_{BMK}=P_{MKC}$ ili $y>z$, te $P_{BMK}=P_{AMK}$ ili $x>u$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$\frac{|MB|+|BK|}{|AM|+|CA|+|KC|} < \frac{1}{3}$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi niz nejednakosti

$$\frac{x+y}{u+b+z} < \frac{1}{3} \Rightarrow 3x+3y < u+b+z < x+y+b \Rightarrow 2x+2y < b \Rightarrow$$

$$x+u+y+z < 2x+2y < b \Rightarrow (x+u)+(y+z) < b \Rightarrow |AB|+|BC| < |CA|$$

što je nemoguće, pa početna pretpostavka otpada. Stoga vrijedi tražena nejednakost.

Zadatak 6 *Neka je n prirodan broj i neka je x pozitivan broj, takav da nijedan od brojeva $x, 2x, \ldots nx$, kao i nijedan od brojeva $\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \ldots \frac{\lfloor nx \rfloor}{x}$ nije cijeli. Dokazati da vrijedi identitet*

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor + \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + \lfloor \frac{2}{x} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \rfloor = n \lfloor nx \rfloor$$

Rješenje: Broj sabiraka u sumi $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor$koji su jednaki 0 je jednak cijelom broju k, za koji je $kx < 1 < (k+1)x$, a taj broj je $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Broj sabiraka u sumi $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor$ koji su jednaki 1 je jednak broju cijelih brojeva k za koje je $1 < kx < 2$, a taj broj je $\lfloor \frac{2}{x} \rfloor - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Uopšte za svako $1 < r < \lfloor nx \rfloor$, broj sabiraka u sumi $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor$ jednakih r je jednak $\lfloor \frac{r+1}{x} \rfloor - \lfloor \frac{r}{x} \rfloor$. Na kraju, ako je $\lfloor nx \rfloor = L$, onda je broj sabiraka u sumi $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor$ jednakih L jednak $n - \lfloor \frac{L}{x} \rfloor = n - \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \rfloor$.

Zbog svega rečenog vrijedi jednakost

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor = 0 \cdot \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + 1 \cdot \left(\lfloor \frac{2}{x} \rfloor - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \right) + \ldots + \lfloor nx \rfloor \cdot \left(n - \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \rfloor \right) =$$

$$= -\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - \lfloor \frac{2}{x} \rfloor - \ldots - \lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{x} \rfloor + n \lfloor nx \rfloor$$