UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

IX MATEMATIČKA OLIMPIJADA BiH

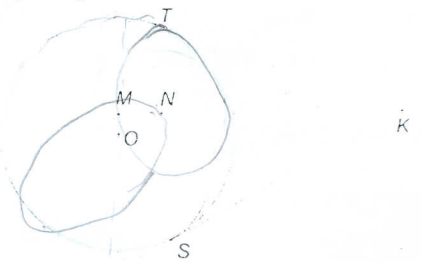
XLIV TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA – UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA BOSNE I HERCEGOVINE

Prvi dan
Sarajevo, 08.05.2004. godine

RJEŠENJA ZADATAKA

* ***Zadatak 1.*** Datu kružnicu s centrom u O iznutra dodiruju dvije kružnice u tačkama dodira S i T. Neka se ove dvije kružnice sijeku u tačkama M i N, pri čemu je N bliže pravoj ST. Dokazati da su prave OM i MN okomite ako i samo ako su tačke S, N i T kolinearne.

Rješenje.



Posmatrajmo tangente (dirke) u S i T. (Ako su tangente (dirke) paralelne onda su S, O, T kolinearne tako što su M i N podjednako udaljene od ST, što je u kontradikciji sa tim da je N bliže ST.) Neka se tangente (dirke) sijeku u tački (točki) K.

Tada je $\angle OSK = 90^\circ = \angle OTK$, odakle slijedi da O, S, K, T leže na jednoj kružnici sa prečnikom (promjerom) OK.

Takođe vrijedi, $KS^2 = KM \cdot KN = KT^2 \Rightarrow K$ leži na radikalnoj osi (potencijali, tj. tačka (točka) K ima jednake potencije u odnosu na obje kružnice) MN dva unutarnja kruga, pa su prema tome M, N, K kolinearne.

Ako su S, N, T kolinearne, onda je

$$\angle SMT = \angle SMN + \angle TMN = \angle NSK + \angle KTN = 180^\circ - \angle SKT,$$

pa su M, S, K, T, O na jednoj kružnici. Onda je

$$\angle OMN = \angle OMK = \angle OSK = 90^\circ.$$

Obratno, ako je $OM \perp MN$, onda je $\angle OMK = 90^\circ = \angle OSK$, pa slijedi da tačke (točke) M, S, K, T, O leže na jednoj kružnici.

$$\angle SKT = 180^\circ - \angle SMT = 180^\circ - \angle SMN - \angle TMN = 180^\circ - \angle NSK - \angle KTN$$

Kako je $\angle TNS = 360^\circ - \angle NSK - \angle SKT - \angle KTN = 180^\circ$, slijedi da su S, N, T kolinearne.

* *Zadatak 2.* Ispitati da li postoiji trougao čija je površina 2004, a njegove stranice imaju cjelobrojne dužine.

Rješenje.

Pretpostavimo da takav trougao (trokut) postoji. Tada iz Heronove formule (obrasca) slijedi da je

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=2004^2$$

odakle dobijemo da je s cijeli broj. Stavljajući $s-a=x, s-b=y, s-c=z$ dobijemo da je

$$xyz(x+y+z)=2004^2=12^2\cdot 167^2,$$

pa kako je 167 prost broj, imamo sljedeća četiri bitno različita slučaja,

(a) $167^2|x$. Tada je $xyz(x+y+z)>167^2\cdot 1\cdot 1\cdot 167^2>2004^2$.

(b) $167|x, 167|y$. Tada je $xyz(x+y+z)>167\cdot 167\cdot 1\cdot 2\cdot 167>2004^2$.

(c) $167|x, 167|x+y+z$. Tada $167|y+z$, pa je $y+z\geq 167$.
Kako je $(y-1)(z-1)\geq 0$, tj. $yz\geq y+z-1$, slijedi da je $yz\geq 166$ pa imamo

$$xyz(x+y+z)\geq 167\cdot 166\cdot 2\cdot 167>2004^2.$$

(d) $167^2|x+y+z$. Tada je $x+y+z\geq 167^2$, pa je

$$xyz\geq \max\{x,y,z\}\geq \frac{x+y+z}{3}\geq \frac{167^2}{3}>12^2$$

$$xyz(x+y+z)>12^2\cdot 167^2=2004^2.$$

Kontradikcija.

* *Zadatak 3.* Neka su a, b, c realni, pozitivni brojevi i $abc=1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ac}{c^5+a^5+ac}\leq 1.$$

Rješenje.

$(a^3-b^3)(a^2-b^2)\geq 0$, za sve a, b, c. Odavde je $a^5+b^5\geq a^2b^2(a+b)$.

Imamo,

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b)+ab}\cdot\frac{c^2}{c^2}=\frac{(abc)\cdot c}{(abc)^2(a+b)+(abc)\cdot c}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Analogno,

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\leq \frac{bc}{b^2c^2(b+c)+bc}\cdot\frac{a^2}{a^2}=\ldots=\frac{a}{a+b+c},$$

$$\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq \frac{ca}{c^2a^2(c+a)+ca}\cdot\frac{b^2}{b^2}=\ldots=\frac{b}{a+b+c}.$$

Zbrajanjem dobijemo tvrdnju.

UDRUŽENJE MATEMATIČARA BOSNE I HERCEGOVINE / BOSNIAN MATHEMATICAL SOCIETY
Zmaja od Bosne 35/IV, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina
Tel. (++387)(33) 279-935; Fax: (++387)(33) 649-342

IX MATEMATIČKA OLIMPIJADA BiH

XLIV TAKMIČENJE MLADIH MATEMATIČARA – UČENIKA SREDNJIH ŠKOLA BOSNE I HERCEGOVINE

Vrijeme za rad: 4 sata.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Drugi dan
Sarajevo, 09.05.2004. godine

RJEŠENJA ZADATAKA

Zadatak 4. Na takmičenju na kome učestvuje 16 ekipa je odigrano 55 utakmica. Dokazati da među njima postoje tri ekipe od kojih nikoje dvije nisu igrale međusobno.
Rješenje.
Pretpostavimo suprotno, da među proizvoljne 3 ekipe postoje dvije ekipe koje su igrale međusobno. Neka je ekipa A odigrala najmanji broj utakmica i to k utakmica. Svaka od k ekipa koje su igrale sa A je odigrala bar k utakmica. Od preostalih $15-k$ ekipa koje nisu igrale sa A svaka je igrala sa svakim preostalim $14-k$ ekipa. Stoga, broj odigranih utakmica nije manji od

$$\frac{1}{2}\left(k^2+k+(15-k)(14-k)\right)=k^2-14k+105=(k-7)^2+56\geq 56$$

Kontradikcija.

Zadatak 5. Za $0\leq x<\frac{\pi}{2}$ dokazati nejednakost

$$a^2 tgx\cdot(\cos x)^{\frac{1}{3}}+b^2\sin x\geq 2xab,$$

za proizvoljne realne brojeve a i b.
Rješenje.
Posmatrajmo izraz:

$$F(a,b)=tgx\cdot(\cos x)^{\frac{1}{3}}a^2-2x\cdot ab+\sin x\cdot b^2.$$

Za:

$$b\neq 0 \text{ imamo } F(a,b)=b^2\left[tgx(\cos x)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{a}{b}\right)^2-2x\left(\frac{a}{b}\right)+\sin x\right];$$

$$a\neq 0 \text{ imamo } F(a,b)=a^2\left[tgx(\cos x)^{\frac{1}{3}}-2x\left(\frac{b}{a}\right)+\sin x\left(\frac{b}{a}\right)^2\right].$$

U svakom slučaju, trebamo pokazati da je $D<0$, gdje je

$$D=4\left[x^2-(tgx)(\cos x)^{\frac{1}{3}}(\sin x)\right].$$

Za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, nejednakost $D < 0$ ekvivalentna je s nejednakosti

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \quad (*)$$

(Lako se to pokaže da vrijedi nejednakost $(*)$:

$$x^2 - \frac{\sin x}{x}(\cos x)^{\frac{1}{3}} \sin x < 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{\sin^2 x}{(\cos x)^{\frac{2}{3}}} < 0 \Leftrightarrow x^2 < \frac{\sin^2 x}{(\cos x)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \left(\frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{1}{3}}}\right)^2 \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow (\cos x)^{\frac{1}{3}} < \frac{\sin x}{x} \Leftrightarrow \cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3)$$

Na osnovu $(*)$, koristeći napomenu, pišemo $\boxed{\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \ \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6}}$, pa ako je $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3$, tj. $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$, onda smo dokazali nejednakost $(*)$. No, ovdje je $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 \Leftrightarrow x^2 < 9$, što je (identički) tačno za sve $0 < x < \frac{\pi}{2}$, dakle, nejednakost $(*)$ tačna je za sve $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Time je, za sve $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tačna zadana nejednakost (uz napomenu da su slučajevi $x = 0$, $a = 0$ ili $b = 0$ trivijalni).

Zadatak 6. Dat je trougao (trokut) ABC i u ravni (ravnini) tog trougla (trokuta) paralelogram ASCR sa dijagonalom AC. Neka prava (pravac) konstruisana (konstruiran) kroz tačku (točku) B paralelno sa CS siječe prave (pravce) AS i CR redom u tačkama (točkama) M i P, a prava (pravac) konstruisana (konstruiran) kroz B paralelno sa AS siječe prave (pravce) AR i CS redom u tačkama (točkama) N i Q. Dokazati da se prave (pravci) RS, MN i PQ sijeku u jednoj tački (točki).

Rješenje.

Stavimo

$AM = x$, $AN = y$, $AR = b$, $AS = a$

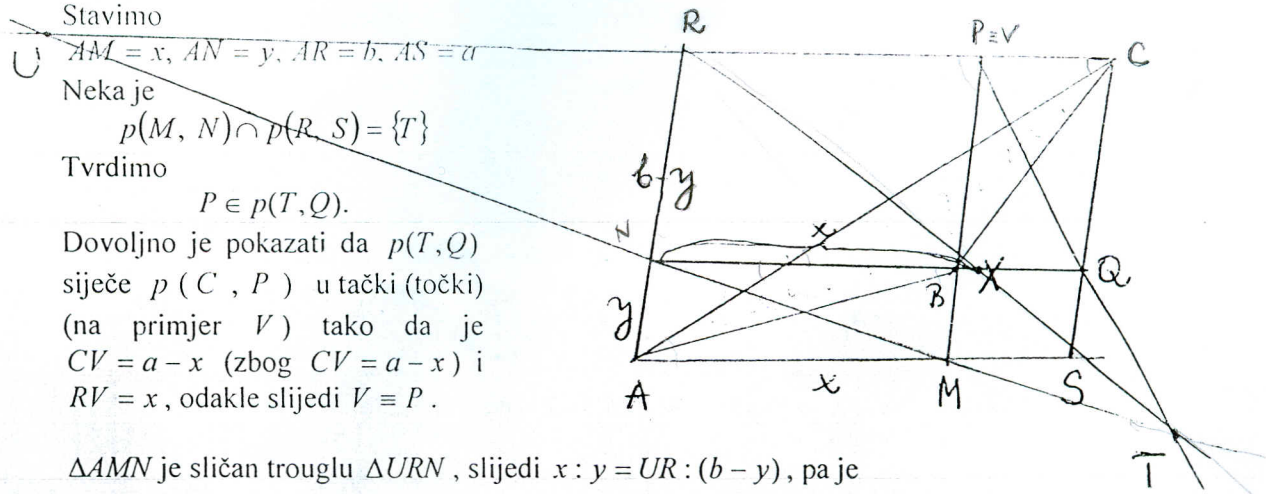
Neka je

$$p(M, N) \cap p(R, S) = \{T\}$$

Tvrdimo

$$P \in p(T, Q).$$

Dovoljno je pokazati da $p(T,Q)$ siječe $p(C, P)$ u tački (točki) (na primjer V) tako da je $CV = a - x$ (zbog $CV = a - x$) i $RV = x$, odakle slijedi $V \equiv P$.



ΔAMN je sličan trouglu ΔURN, slijedi $x : y = UR : (b - y)$, pa je

$$UR = \frac{x(b-y)}{y}.$$

Stavimo

$$\{X\} = p(R,S) \cap BN \text{ i } NX = z.$$

Iz Talesove teoreme slijedi $z : UR = (a-z) : RV$, pa je

$$RV = \frac{x(b-y)(a-z)}{zy}.$$

Tvrdimo da je $RV = x$, tj. $\frac{x(b-y)(a-z)}{zy} = x \Leftrightarrow a(b-y) = bz \Leftrightarrow \frac{a}{z} = \frac{b}{b-y}$,

što slijedi iz Talesove teoreme zbog $\frac{AS}{NX} = \frac{AR}{NR}$, q.e.d.

Analogno bi bilo $CV = a - x$ pa je $V \equiv P$.