1. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 18. и 19. мај 1996.

1. **(а)** Нека су a, b и c позитивни реални бројеви. Доказати да за све природне бројеве m важи неједнакост

$$(a+b)^m + (b+c)^m + (c+a)^m \leqslant 2^m(a^m + b^m + c^m).$$

(б) Шта се може рећи о неједнакости из (а) ако су **(1)** a, b, c произвољни реални бројеви, или је **(2)** m произвољан цео број?

2. **(а)** Нека су m и n ($m \geqslant 2$) природни бројеви. Доказати да n дели $\phi(m^n - 1)$, где ϕ означава Ојлерову функцију.

(б) Нека су n и d природни бројеви и $d \mid n$. Доказати да је број чланова низа $1, 2, \ldots, n$, чији је највећи заједнички делилац са бројем n једнак d, износи $\phi(\frac{n}{d})$.

3. Нека је M тачка у унутрашњости конвексног четвороугла $ABCD$ таква да је четвороугао $ABMD$ паралелограм. Ако је $\sphericalangle CBM = \sphericalangle CDM$, доказати да је тада $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCM$.

4. Наћи све функције **(а)** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, **(б)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које за све x, y задовољавају

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y.$$

5. Десет људи је пошло да купује књиге. Познате су следеће чињенице:

(i) свака особа је купила четири различите књиге;

(ii) сваке две особе су купиле бар једну исту књигу.

Посматрајмо књигу коју је купио највећи број од ових десет људи. Одредити најмању могућу вредност тог броја.

6. Дати су узајамно прости цели бројеви a и b. Нека је n случајно изабран природан број. Одредити вероватноћу да је број решења (x, y) једначине $ax + by = n$ у ненегативним целим бројевима једнак $\left[\frac{n}{ab}\right] + 1$.

Напомена. Другим речима, ако је $f(x)$ број природних бројева $n \leqslant x$ таквих да једначина $ax + by = n$ има тачно $\left[\frac{n}{ab}\right] + 1$ решења у $\mathbb{N}_0$, треба одредити $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 17. и 18. мај 1997.

1. Решити у скупу реалних бројева систем једначина

$$\begin{aligned} 8(x^3+y^3+z^3) &= 73, \\ 2(x^2+y^2+z^2) &= 3(xy+yz+zx), \\ xyz &= 1. \end{aligned}$$

2. У једнакокраком троуглу ABC са основицом AB, тачке O и S су редом његови центри описаног и уписаног круга. Нека је M тачка на страници BC. Доказати да је $SM \parallel AC$ ако и само ако је $OM \perp BS$.

3. Нека је A подскуп скупа $\mathbb{R}$. Функција $f : A \to \mathbb{R}$ задовољава услов

$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1 \quad \text{за све} \quad x, y \in A.$$

(а) Ако је $A \supseteq \mathbb{N}$ и $c = f(1) - 1$, доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$f(n) = \begin{cases} \frac{c^{n+1}-1}{c-1} & \text{ако је } c \neq 1, \text{ и} \\ n+1 & \text{ако је } c = 1. \end{cases}$$

(б) Наћи све овакве функције за $A = \mathbb{Z}$.

(в) Ако је $A = \mathbb{Q}$, наћи све овакве функције за које је $f(1997) \neq f(1998)$.

4. **(а)** Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама A_1, B_1 и C_1. Нека су l_1, l_2, l_3 редом дужине лукова B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 уписаног круга који не садрже тачке A_1, B_1, C_1. Ако су a, b, c редом дужине страница троугла ABC, доказати да је

$$\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_2} + \frac{c}{l_3} \geqslant \frac{9\sqrt{3}}{\pi}.$$

(б) Нека је $ABCD$ тетраедар у коме је $AB = CD = a$, $BC = AD = b$ и $AC = BD = c$. Одредити висине тетраедра у функцији a, b и c.

5. Доказати да за сваки природан број n постоји скуп M_n од n природних бројева са следећим својством:

(i) аритметичка средина елемената ма ког непразног подскупа M_n је цео број;

(ii) геометријска средина елемената ма ког непразног подскупа M_n је цео број;

(iii) и аритметичка и геометријска средина елемената ма ког непразног подскупа скупа M_n су цели бројеви.

Постоји ли бесконачан скуп M природних бројева са својством (i)?

6. Нека су k, m и n природни бројеви такви да је $1 < n \leqslant m-1 \leqslant k$. Одредити највећи могући број елемената подскупа S скупа $\{1, 2, \ldots, k\}$ таквог да не постоји n различитих елемената из S са збиром

(а) једнаким m; **(б)** већим од m.

3. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 16. и 17. мај 1998.

1. Нека су P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 различите тачке унутар фигуре D или на њеној граници. Означимо са M минималну удаљеност између различитих тачака P_i. За какву конфигурацију тачака P_i величина M достиже максималну вредност ако је D

(а) јединични квадрат?

(б) једнакостраничан троугао странице 1?

(в) круг полупречника 1?

2. Ако за позитивне реалне бројеве x, y и z важи $x^2+y^2+z^2=1$, доказати неједнакост

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

3. Симетрале углова код темена A, B и C троугла ABC секу наспрамне странице редом у тачкама A_1, B_1, C_1. Нека је M произвољна тачка на једној од дужи A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, а M_1, M_2, M_3 редом њене нормалне пројекције на праве BC, CA, AB. Доказати да је једна од дужи MM_1, MM_2, MM_3 једнака збиру друге две.

4. Круг полупречника r додирује праву p у тачки A. Нека је AB пречник тог круга и C произвољна тачка на кругу различита од A и B. Означимо са D подножје нормале из тачке C на праву AB. Нека је E тацка на продужетку дужи CD иза D таква да је $ED = BC$. Тангенте на круг повучене из тачке E секу праву p у тачкама K и N. Доказати да дужина дужи KN не зависи од избора тачке C.

5. Ако цели бројеви a, b, c и d задовољавају једначине $bc+ad = ac+2bd = 1$, доказати да тада они задовољавају и једнакост $a^2+c^2 = 2b^2+2d^2$.

6. Низ целих бројева $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ је одређен условима $u_0 = 0$ и

$$u_{2n} = u_n, \quad u_{2n+1} = 1-u_n \quad \text{за } n \in \mathbb{N}_0.$$

(а) Израчунати u_{1998}.

(б) Ако је p природан број и $m = (2^p-1)^2$, одредити u_m.

4. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 22. и 23. мај 1999.

1. Нека су a, b и c странице троугла. Доказати да бар једна од једначина

$$x^2 - 2bx + 2ac = 0, \quad x^2 - 2cx + 2ab, \quad x^2 - 2ax + 2bc$$

нема реална решења.

2. Ако су a, b, c странице троугла ABC и R његов полупречник описаног круга, доказати да важи

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geqslant 3R\sqrt{3}.$$

3. Нека је $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ произвољна инјективна функција таква да је $f(0) + f(1) = 1$. Доказати да постоје бројеви $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 \neq x_2$ такви да је $2f(x_1) < f(x_2) + \frac{1}{2}$.

Навести бар једно уопштење овог тврђења.

4. У троуглу ABC, симетрале углова код темена A и B секу наспрамне странице редом у тачкама D и E. Тачке F и G су редом подножја нормала из тачке C на праве AD и BE. Доказати да су праве FG и AB паралелне.

5. Означимо са $\sigma(S)$ и $\pi(S)$ редом збир и производ елемената непразног скупа бројева S. Доказати да је

(а) $\sum \frac{1}{\pi(S)} = n$ и

(б) $\sum \frac{\sigma(S)}{\pi(S)} = (n^2 + 2n) - (n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$,

где се сумира по свим непразним подскуповима S скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$.

6. Посматрајмо полином $P(x) = x^4 + 3x^3 + 3x + p$, где је p реалан број.

(а) Наћи p за које $P(x)$ има комплексан корен x_1 такав да је $|x_1| = 1$ и $Re(x_1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17} - 3\right)$.

(б) За ту вредност p наћи остале корене полинома $P(x)$.

(в) Доказати да ни за које $n \in \mathbb{N}$ не важи $x_1^n = 1$.

5. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 20. и 21. мај 2000.

1. Одредити реалне корене x_1, x_2 полинома $x^5 - 55x + 21$ ако се зна да је $x_1 x_2 = 1$.

2. Нека су R и r редом полупречници описаног и уписаног круга троугла ABC. Нека је S тачка унутар троугла ABC и нека праве AS, BS и CS редом секу наспрамне странице троугла у тачкама X, Y и Z. Доказати да важи

$$\frac{BX \cdot CX}{AX^2} + \frac{CY \cdot AY}{BY^2} + \frac{AZ \cdot BZ}{CZ^2} = \frac{R}{r} - 1$$

ако и само ако је S центар уписаног круга троугла ABC.

3. Тројку природних бројева (x, y, z) зовемо Питагорином ако важи $x < y < z$ и $x^2 + y^2 = z^2$. За свако $n \in \mathbb{N}$, доказати да се број 2^{n+1} појављује у тачно n различитих Питагориних тројки.

4. Доказати да за позитивне бројеве a, b, c важе неједнакости

$$\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + ca} + \frac{ab}{c^2 + ab} \leqslant 1 \leqslant \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ab}\,.$$

5. Означимо са T_m број неподударних троуглова са обимом m чије су све странице целобројне. Доказати да је

(а) $T_{1999} > T_{2000}$ и

(б) $T_{4n+1} = T_{4n-2} + n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

6. Дат је троугао ABC у коме је $\sphericalangle ABC = 3\sphericalangle CAB$. Тачке M и N су изабране на страници AC тако да је N између A и M и важи $\sphericalangle CBM = \sphericalangle MBN = \sphericalangle NBA$. Нека је L произвољна унутрашња тачка дужи BN, а K тачка на дужи BM таква да је $LK \parallel AC$. Доказати да се праве AL, NK и BC секу у једној тачки.

6. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Лукавица, 19. и 20. мај 2001.

1. На кружници су дате тачке A, B и C које деле кружницу у размери $3:5:7$. Израчунати углове троугла ABC.

2. Природни бројеви x, y и z задовољавају једначину

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{z^2}\,.$$

Доказати да је $xyz \geqslant 3600$.

3. Одредити највећи природан број n за који постоји n-точлани подскуп S скупа $\{1,2,\dots,2001\}$ такав да једначина $y=2x$ нема решења x,y у скупу S.

4. У равни су дата два круга полупречника r_1 и r_2, један изван другог. Конструисане су обе спољашње и једна унутрашња заједничка тангента тих кругова. Унутрашња тангента сече спољашње тангенте у тачкама A и B и додирује један од датих кругова у тачки C. Доказати да је $AC\cdot BC=r_1r_2$.

5. Нека је n природан број већи од 1 и нека су $x_1,x_2,\dots,x_n$ позитивни бројеви такви да је $x_1+x_2+\dots+x_n=1$. Испитати да ли обавезно важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}}\,.$$

6. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које једначина

$$(x+y+z)^3=n^2xyz$$

има решење (x,y,z) у скупу природних бројева.

7. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Брчко, 11. и 12. мај 2002.

1. Реални бројеви x, y, z задовољавају једнакости

$$x+y+z=3 \quad \text{и} \quad xy+yz+zx=a,$$

где је a неки реалан параметар. Одредити вредност a за коју је разлика између максималне и минималне вредности променљиве x једнака 8.

2. Дат је троугао ABC. Посматрајмо праву која спаја подножја симетрала углова ABC и ACB. Затим кроз тачку пресека ове праве са симетралом угла BAC повуцимо праву паралелну правој BC. Нека ова права сече праве AB и AC у тачкама M и N, редом. Доказати да је $2MN = BM + CN$.

3. Ако је n природан број, доказати да $(n+1)(n+2)\cdots(n+10)$ није потпун квадрат.

4. Реални бројеви a, b и c су такви да важи $a^2+b^2+c^2=1$. Доказати неједнакост

$$\frac{a^2}{1+2bc}+\frac{b^2}{1+2ca}+\frac{c^2}{1+2ab} \geqslant \frac{3}{5}.$$

5. Нека су p и q различити прости бројеви. У скупу целих бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} \frac{z+p}{x}+\frac{z-p}{y} &= q, \\ \frac{z+p}{y}-\frac{z-p}{x} &= q. \end{aligned}$$

6. Темена конвексног четвороугла $ABCD$ и пресечна тачка S његових дијагонала имају целобројне координате у координатној равни. Нека је P површина четвороугла $ABCD$, а P_1 површина троугла ABS. Доказати да важи

$$\sqrt{P} \geqslant \sqrt{P_1}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

8. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Неум, 10. и 11. мај 2003.

1. На табли су написани бројеви 5, 7 и 9. У сваком кораку бирамо два броја a и b са табле тако да је $a > b$ и на таблу дописујемо број $5a-4b$. Може ли се после коначно много оваквих корака на табли написати број 2003?

2. Над страницама AB и BC троугла ABC конструисани су квадрати ABB_1A_1 и BCC_1B_2 ван троугла. Доказати да се праве AC_1 и CA_1 секу у тачки на висини из темена B.

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$(n-1)^n + 2n^n \leqslant (n+1)^n \leqslant 2(n-1)^n + 2n^n.$$

4. Нека су AD и BE висине троугла ABC, а L подножје нормале из тачке B на праву DE. Ако је $LB^2 = LD \cdot LE$, доказати да је троугао ABC једнакокраки.

5. Дат је правилан $2n$-тоугао ($n \geqslant 2$) са центром S. Посматрајмо све четвороуглове са теменима у теменима овог $2n$-тоугла. Означимо са u број таквих четвороуглова који садрже тачку S у унутрашњости, а са v број преосталих четвороуглова. Одредити $u-v$.

6. Нека су a, b и c реални бројеви такви да је $|a| \geqslant 2$ и $a^2+b^2+c^2 = abc+4$. Доказати да постоје реални бројеви x и y такви да је

$$a = x + \frac{1}{x}, \quad b = y + \frac{1}{y}, \quad c = xy + \frac{1}{xy}.$$

9. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 8. и 9. мај 2004.

1. Два круга изнутра додирују круг са центром O у тачкама S и T. Нека се ова два круга секу у тачкама M и N, при чему је тачка N ближа правој ST. Доказати да су праве OM и ON нормалне ако и само ако су тачке S, N и T колинеарне.

2. Испитати да ли постоји троугао чије странице имају целобројне дужине и чија је површина 2004.

3. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати неједнакост

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leqslant 1.$$

4. На такмичењу на коме учествује 16 екипа одиграно је 55 утакмица. Доказати да међу овим екипама постоје три од којих никоје две нису играле међусобно.

5. За $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ и произвољне реалне бројеве a и b доказати неједнакост

$$a^2 \operatorname{tg} x \sqrt[3]{\cos x} + b^2 \sin x \geqslant 2abx.$$

6. У равни су дати троугао ABC и паралелограм $ASCR$ (са дијагоналом AC). Права кроз тачку B паралелна правој CS сече праве AS и CR редом у тачкама M и P. Даље, права кроз тачку B паралелна правој AS сече праве AR и CS редом у тачкама N и Q. Доказати да се праве RS, MN и PQ секу у једној тачки.

10. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Бања Лука, 7. и 8. мај 2005.

1. Тачка H је ортоцентар оштроуглог троугла ABC. Доказати да су средишта дужи AB и CH и пресек симетрала углова CAH и CBH три колинеарне тачке.

2. Ако су a_1, a_2 и a_3 ненегативни реални бројеви за које је $a_1+a_2+a_3=1$, доказати да важи

$$a_1\sqrt{a_2}+a_2\sqrt{a_3}+a_3\sqrt{a_1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Дат је природан број $n\geqslant 2$. Нека су $x_1,x_2,\ldots,x_n$ произвољни различити природни бројеви и нека је S_i $(i=1,2,\ldots,n)$ збир свих ових бројева изузев x_i. Означимо

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\text{НЗД}(x_1,S_1)+\text{НЗД}(x_2,S_2)+\cdots+\text{НЗД}(x_n,S_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}.$$

Наћи максималну вредност f по свим могућим n-торкама $(x_1,\ldots,x_n)$.

4. Тачка A је одабрана на правој која садржи пречник PQ круга $k(S,r)$, ван круга. Тангента t из тачке A на круг k додирује круг у тачки T. Нека су p и q редом тангенте на круг k у тачкама P и Q, и нека је $PT\cap q=\{N\}$ и $QT\cap p=\{M\}$. Доказати да су тачке A,M,N колинеарне.

5. Ако за пермутацију $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ бројева $1,2,\ldots,n$ важи

$$\frac{a_k^2}{a_{k+1}}\leqslant k+2 \quad \text{за} \quad k=1,2,\ldots,n-1,$$

доказати да је она идентична.

6. Нека су a, b и c цели бројеви такви да је

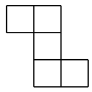
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3.$$

Доказати да је abc куб целог броја.

11. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 20. и 21. мај 2006.

1. *Z-фигура* је било која фигура подударна фигури на слици. Колико је најмање Z-фигура потребно да би се прекрила таблица 8×8, под условом да се свако поље Z-фигуре или поклапа са неким пољем таблице или је ван табле? Фигуре се могу међусобно преклапати.



2. Дат је троугао ABC. Одредити скуп центара свих правоугаоника уписаних у троугао ABC тако да једна страница правоугаоника лежи на страници троугла AB.

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\left\{n\sqrt{7}\right\} > \frac{3\sqrt{7}}{14n},$$

где $\{x\}$ представља разломљени део реалног броја x. (На пример, разломљени део броја $4{,}3$ је $0{,}3$ јер је $4{,}3 = 4 + 0{,}3$.)

4. Доказати да свака бесконачна аритметичка прогресија облика $a, a+d, a+2d, \ldots$, где су a и d природни бројеви, садржи бесконачну геометријску прогресију облика $b, bq, bq^2, \ldots$, где су b и q природни бројеви и $q > 1$.

5. Оштроугли троугао ABC је уписан у круг са центром O. Нека је P тачка на краћем луку AB описаног круга. Нормала из тачке P на праву BO сече страницу AB у тачки S, а страницу BC у тачки T. Слично, нормала из тачке P на праву AO сече страницу AB у тачки Q, а страницу AC у тачки R.

(а) Доказати да је троугао PQS једнакокраки.

(б) Доказати да је $PQ^2 = QR \cdot ST$.

6. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реалне константе и

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \cdots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Ако за реалне бројеве x_1 и x_2 важи $f(x_1) = f(x_2) = 0$, доказати да је $x_1 - x_2 = m\pi$ за неки цео број m.

12. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Кисељак, 19. и 20. мај 2007.

1. У троуглу ABC, дужина симетрале унутрашњег угла у темену B је једнака s, а дужине симетрале спољашњег угла у темену B је једнака s_1. Ако је $\frac{AB}{BC} = k$, одредити површину троугла ABC.

2. Решити једначину

$$x(x+2) = y^2(y^2+1)$$

у скупу целих бројева.

3. Наћи све целе бројеве x и реалне бројеве a такве да важи

$$\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x-a} + a.$$

4. Нека је $P(x)$ полином облика $P(x) = x^3 - 2x^2 + bx + c$. Познато је да све његове нуле леже у интервалу $(0,1)$. Доказати да је

$$8b + 9c \leqslant 8.$$

Када важи једнакост?

5. Дат је троугао ABC у коме је $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и $AC = 2BC$. Права паралелна страници AC сече праве AB и BC редом у тачкама M и N тако да је $CN = 2BN$. Праве CM и AN се секу у тачки O. На дужи ON одабрана је тачка K тако да је $OM + OK = KN$. Симетрала угла ABC и нормала из тачке K на праву AN секу се у тачки T. Израчунати $\sphericalangle MTB$.

6. Дат је скуп A са тачно $n > 4$ елемената. Одабрано је $n+1$ различитих трочланих подскупова скупа A. Доказати да међу овим подскуповима постоје два чији је пресек једночлан.

13. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Источно Сарајево, 17. и 18. мај 2008.

1. Доказати да у једнакокраком троуглу важи

$$b > \pi r,$$

где је b крак, а r полупречник уписане кружнице.

2. Одредити све парове $m, n \in \mathbb{N}$ такве да

$$m^2 - n \mid m + n^2 \quad \text{и} \quad n^2 - m \mid n + m^2.$$

3. За округлим столом седи 30 људи. Сваки од њих је свезналица или незналица. На питање "Шта је сусед здесна - свезналица или незналица?" свезналица изриче истиниту тврдњу, док незналица може изрећи или истиниту или лажну тврдњу. Познато је да број незналица за столом није већи од N. Колики највећи може бити број N да бисмо, знајући све одговоре особа за столом, могли са сигурношћу да одредимо бар једног свезналицу?

4. Осам ученика је решавало осам задатака. Испоставило се да је сваки задатак решило бар 5 ученика. Доказати да се увек могу наћи два ученика таква да је сваки задатак решио бар један од њих.

5. Нека је AD висина троугла ABC, а R његов полупречник описаног круга. Означимо са E и F редом подножја нормала из тачке D на праве AB анд AC. Ако је $AD = R\sqrt{2}$, доказати да права EF пролази кроз центар описаног круга.

6. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y \quad \text{за све } x, y \in \mathbb{R}.$$

14. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 9. и 10. мај 2009.

1. Нека су M и N подножја нормала из темена A на симетрале спољашњих углова у теменима B и C троугла ABC. Доказати да је дужина дужи MN једнака полуобиму троугла ABC.

2. Наћи све парове природних бројева (a,b) такве да је

$$\frac{a^2(b-a)}{b+a}$$

квадрат простог броја.

3. Реални бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ задовољавају услове

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{100}, \quad a_1^2 + a_2^2 \geqslant 100 \quad \text{и} \quad a_3^2 + a_4^2 + \cdots + a_{100}^2 \geqslant 100.$$

Колика је минимална вредност збира $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$?

4. Дата је таблица $1 \times n$, где је $n \geqslant 2$ природан број. Два играча наизменично уписују знакове "+" и "−" у слободна поља, при чему први играч увек уписује "+", а други "−". Није дозвољено да два иста знака буду уписана у два суседна поља. Губи играч који не може да одигра потез. Који играч има победничку стратегију?

5. Права сече странице AB и BC троугла ABC редом у тачкама M и K. Ако је површина троугла MBK једнака површини четвороугла $AMKC$, доказати да је тада

$$\frac{MB + BK}{MA + AC + CK} \geqslant \frac{1}{3}.$$

6. Нека је n природан број, а x позитиван број такав да ниједан од бројева $x, 2x, \ldots, nx$, као и ниједан од бројева $\frac{1}{x}, \frac{2}{x}, \ldots, \frac{[nx]}{x}$, није цео. Доказати да важи једнакост

$$[x] + [2x] + \cdots + [nx] + \left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[\frac{[nx]}{x}\right] = n[nx].$$

Као и обично, $[t]$ означава највећи цео број не већи од t.

15. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Мостар, 15. и 16. мај 2010.

1. **(а)** Нека су p и q различити прости бројеви такви да $p+q^2 \mid p^2+q$. Доказати да $p+q^2 \mid pq-1$.

(б) Одредити све просте бојеве p такве да $p+121 \mid p^2+11$.

2. Нека су AB и FD тетиве круга које се не секу, а P тачка на луку AB који не садржи тетиву FD. Праве PF и PD редом секу тетиву AB у тачкама Q и R. Доказати да је $\frac{AQ \cdot RB}{QR}$ константно када се тачка P креће луком AB.

3. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ које задовољавају следећа два услова:

(i) $f(n)f(-n) = f(n^2)$ за све $n \in \mathbb{Z}$;

(ii) $f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn$ за све $m, n \in \mathbb{Z}$.

4. Конвексан четвороугао подељен је дијагоналама на четири троугла чији су уписани кругови подударни. Доказати да је тај четвороугао ромб.

5. Нека су a, b и c дужине страница троугла чији обим није већи од 2. Доказати да је

$$\left| \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} - \frac{a^3}{c} - \frac{c^3}{b} - \frac{b^3}{a} \right| < 3.$$

6. Доказати да је укупан број јединица које се појављују у свим неуређеним партицијама природног броја n једнак суми бројева различитих елемената тих партиција.

Напомена. За партицију $10 = 1+1+2+3+3$ број различитих елемената је једнак 3 јер су различити елементи у њој 1, 2 и 3.

16. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Лукавица, 14. и 15. мај 2011.

1. У троуглу ABC важи $BC = \frac{1}{2}(AB + AC)$. Нека су M и N редом средишта дужи AB и AC, а k кружница описана око троугла AMN. Доказати да центар кружнице уписане у троугао ABC лежи на кружници k.

2. На полукружници пречника $AB = d$ дате су тачке C и D тако да важи $BC = CD = a$ и $DA = b$, где су a, b и d различити природни бројеви. Одредити најмању могућу вредност броја d.

3. Бројеви $1, 2, \ldots, 2n$ су распоређени у два низа $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ и $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$. Доказати да је број

$$W = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

потпун квадрат.

4. Одредити највећу вредност броја a који има особину да, за било који распоред бројева $1, 2, \ldots, 10$ по кружници, морају да постоје три суседна броја чији је збир већи или једнак a.

5. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви чији је збир 1. Доказати да важи неједнакост

$$a\sqrt[3]{1 + b - c} + b\sqrt[3]{1 + c - a} + c\sqrt[3]{1 + a - b} \leqslant 1.$$

6. У четвороуглу $ABCD$ са непаралелним страницама AD и BC, дијагонале AC и BD се секу у тачки E. Тачке F и G деле странице AB и DC редом у размери AD/BC. Ако су тачке E, F и G колинеарне, доказати да је четвороугао $ABCD$ тетиван.

17. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 19. и 20. мај 2012.

1. У троуглу ABC је $AB < AC$. Нека је D средиште лука BAC описаног круга овог троугла. Доказати да подножје E нормале из тачке D на праву AC полови изломљену линију BAC.

2. Доказати да за све позитивне бројеве a, b, c који задовољавају услов $a^2+b^2+c^2=1$ важи

$$\frac{a^3}{b^2+c}+\frac{b^3}{c^2+a}+\frac{c^3}{a^2+b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

3. Нека је p непаран прост број. Доказати да постоји природан број m, $1 \leqslant m < p$, тако да за неке целе бројеве x_1, x_2 и x_3 важи

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=mp.$$

4. Функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ задовољава услове

(i) $f(1)=p+1$;

(ii) $f(n+1)=f(1)f(2)\cdots f(n)+p$.

где је p прост број. Одредити све вредности p за које постоји природан број k такав да је $f(k)$ потпун квадрат.

5. Дат је троугао ABC. На полуправим AB и CB одабране су тачке K и M редом тако да важи $AK=CM=AC$. Доказати да је полупречник круга описаног око троугла BKM једнак IO и да је $IO \perp KM$, где су I и O редом центри уписаног и описаног круга датог троугла.

6. Квадрат странице 1 подељен је на области. Границе свих области састоје се од дужи паралелних страницама квадрата. Укупна дужина граничних дужи унутар квадрата једнака је $2n$. Доказати да постоји бар једна област са површином већом или једнаком $\frac{1}{(n+1)^2}$.

18. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Високо, 18. и 19. мај 2013.

1. У троуглу ABC са правим углом код темена C, симетрале унутрашњих углова код темена A и B редом секу наспрамне странице у тачкама M и N. Висина CH сече праве AM и BN редом у тачкама P и Q. Доказати да је права која пролази кроз средишта дужи QN и PM паралелна хипотенузи AB.

2. Низ је задат условима

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1 \quad \text{и} \quad a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4$$

за сваки природан број $n \geqslant 1$. Доказати да су сви чланови овог низа потпуни квадрати.

3. Нека је n природан број. Доказати да се у сваком скупу од $\binom{2n}{n}$ људи може наћи $n+1$ људи који се сви међусобно познају или $n+1$ људи који се сви међусобно не познају.

4. Одредити све просте бројеве p и q за које важи $p \mid 30q - 1$ и $q \mid 30p - 1$.

5. Нека је $n \geqslant 3$ природан број и нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ ненегативни реални бројеви за које је $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Означимо

$$F_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1).$$

Доказати да је:

(а) $\min F_3 = -\frac{1}{3}$; **(б)** $\min F_4 = -\frac{1}{4}$; **(в)** $\min F_5 = -\frac{1}{5}$.

6. Нека су O и I редом центри описаног и уписаног круга троугла ABC. На дужима IA, IB и IC редом одабране су тачке P, Q и R тако да важи

$$IP \cdot IA = IQ \cdot IB = IR \cdot IC.$$

Доказати да Ојлерова права троугла PQR садржи тачке I и O.

19. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Источно Сарајево, 10. и 11. мај 2014.

1. Дата је кружница k и на њој тачке A и B које нису дијаметрално супротне. На мањем луку AB дата је тачка C. Нека су D, E и F редом подножја нормала из тачке C на тетиву AB и на тангенте на кружницу k у тачкама A и B. Доказати да је $CD = \sqrt{CE \cdot CF}$.

2. Нека су a, b и c различити реални бројеви.

(а) Израчунати вредност израза:

(1) $\dfrac{1+ab}{a-b} \cdot \dfrac{1+bc}{b-c} + \dfrac{1+bc}{b-c} \cdot \dfrac{1+ca}{c-a} + \dfrac{1+ca}{c-a} \cdot \dfrac{1+ab}{a-b}$;

(2) $\dfrac{1-ab}{a-b} \cdot \dfrac{1-bc}{b-c} + \dfrac{1-bc}{b-c} \cdot \dfrac{1-ca}{c-a} + \dfrac{1-ca}{c-a} \cdot \dfrac{1-ab}{a-b}$.

(б) Доказати неједнакост

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Да ли може наступити знак једнакост?

3. Наћи сва решења једначине $7^x - 2 \cdot 5^y = -1$ у скупу ненегативних целих бројева.

4. Низ (a_n) је задат условима

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad a_m = \frac{a_{m-1}}{2ma_{m-1}+1} \quad \text{за } m > 1.$$

Одредити збир $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ за произвољно $k \in \mathbb{N}$.

5. Дат је правилан n-тоугао, где је $n \geqslant 6$. Колико има троуглова са теменима у теменима n-тоугла којима су странице дијагонале тог n-тоугла?

6. Нека су D и E редом подножја висина из темена A и B троугла ABC, F пресечна тачка симетрале угла C са страницом AB, а O, I и H редом центри описане и уписане кружнице и ортоцентар троугла ABC. Ако је $\frac{CF}{AD} + \frac{CF}{BE} = 2$, доказати да је $OI = IH$.

20. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 16. и 17. мај 2015.

1. Одредити најмању могућу вредност израза

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}$$

за позитивне реалне бројеве a, b и c такве да је $a+b+c\leqslant 3$.

2. Нека је D произвољна тачка на страници AB троугла ABC. Кружнице описане око троуглова BCD и ACD секу странице AC и BC редом у тачкама E и F. Симетрала дужи EF сече праву AB у тачки M, а нормалу на AB кроз тачку D у тачки N. Праве AB и EF се секу у тачки T, а описана кружница троугла CDM сече праву TC у тачки $U\neq C$. Доказати да је $NC=NU$.

3. Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n таквих да n дели $3^{n-1}-2^{n-1}$.

4. Скуп X који се састоји од осам узастопних природних бројева подељен је на два дисјунктна подскупа A и B са једнаким бројем елемената. Ако је збир квадрата елемената скупа A једнак збиру квадрата елемената скупа B, доказати да је тада збир елемената скупа A једнак збиру елемената скупа B.

5. Нека је N природан број. Дат је скуп тегова који задовољава следеће услове:

(i) сваки тег из скупа има неку од тежина $1,2,\dots,N$;

(ii) за свако $i\in\{1,2,\dots,N\}$ у датом скупу постоји тег тежине i;

(iii) збир тежина свих ових тегова је паран број.

Доказати да се тај скуп тегова може разбити на два скупа једнаких тежина.

6. Уписана кружница троугла ABC има центар у тачки I и додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F. Нека је P подножје нормале из тачке I на праву AD и нека је M средиште дужи DE. Ако се праве PM и AC секу у тачки N, доказати да је $DN\parallel EF$.

21. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Високо, 14. и 15. мај 2016.

1. Четвороугао $ABCD$ уписан је у кружницу k. Праве AB и CD се секу у тачки E, при чему је $AB = BE$. Тангенте у тачкама B и D на кружницу k секу се у тачки F. Ако су праве AB и DF паралелне, доказати да су тачке A, C и F колинеарне.

2. Нека је n природан, а t цео број. На табли је написано n различитих целих бројева. Боб, који је у суседној соби, жели да зна да ли међу тим бројевима постоји одређени број њих са сумом t. Алиса, која се налази пред таблом, помоћи ће му у томе. Она му на почетку каже само укупан збир свих бројева на табли. Након тога, он јој у сваком потезу говори једну од следеће 4 реченице:

(i) Да ли међу бројевима на табли постоји број k?
(ii) Ако на табли постоји број k, избриши га.
(iii) Ако на табли не постоји (цео) број k, допиши га.
(iv) Да ли се бројеви на табли могу поделити у два скупа са једнаким збиром елемената?

На питања му Алиса одговара са *да* или *не*, а операције које он каже она изведе на табли ако је могуће, притом му не говорећи да ли их је извела. Доказати да у мање од $3n$ потеза Боб може сазнати да ли се међу бројевима написаним на почетку налазе неки чији је збир једнак t.

3. За бесконачан низ природних бројева $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ кажемо да је *леп* ако за сваки природан број n важи $a_{2n} = 2a_n$. Доказати следећа тврђења:

(а) за сваки леп низ и прост број $p > a_1$ постоји члан низа који је дељив са p;
(б) за сваки прост број $p > 2$ постоји леп низ у коме ниједан члан није дељив са p.

4. Одредити највећи природан број n који се не може написати у облику збира три броја већа од 1 и узајамно проста по паровима.

5. Нека је k кружница описана око оштроуглог троугла ABC ($AC < BC$). Даље, нека је CL симетрала угла ACB ($L \in AB$), M средиште лука AB кружнице k на којем се налази и тачка C, а I центар уписане кружнице троугла ABC. Кружница k сече по други пут праву MI у тачки k и сече кружницу над пречником CI у тачки H. Ако кружница описана око троугла CLK поново сече праву AB у тачки T, доказати да су тачке T, H и C колинеарне.

6. Наћи све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ које задовољавају услов

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1 \quad \text{за све} \quad x, y \in \mathbb{Z}.$$

22. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Источно Сарајево, 13. и 14. мај 2017.

1. Кружница уписана у троугао ABC, са центром у тачки I, додирује странице AB и AC у тачкама P и Q, редом. Праве BI и CI секу праву PQ у тачкама K и L, редом. Доказати да кружница описана око троугла ILK додирује кружницу уписану у троугао ABC ако и само ако је $AB+AC=3BC$.

2. Нека је $\mathbb{N}$ скуп природних бројева. Наћи све функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такве да, за све природне бројеве m и n, број $f(m)+f(n)-mn$ је различит од нуле и дели $mf(m)+nf(n)$.

3. Наћи све реалне бројеве c за које постоји строго растући низ $a_1, a_2, \ldots$ природних бројева такав да је

$$\frac{a_{2n-1}+a_{2n}}{a_n}=c$$

за све природне бројеве n.

4. Нека је n природан број. На конференцији се налази $6n+4$ математичара. Одржава се $2n+1$ састанака. На сваком састанку математичари седе за једним округлим столом са 4 места и n округлих столова са 6 места. Растојања између свака два суседна места за једним столом су једнака. Кажемо да су два математичара у *специјалној* позицији ако седе за истим столом и ако су суседи или су на дијаметрално супротним позицијама. За које природне бројеве n је могуће да, након што се заврше сви састанци, никоја два математичара нису била у специјалној позицији више од једном?

5. Наћи најмању реалну константу C такву да је за било које позитивне реалне бројеве a_1, a_2, a_3, a_4 и a_5 (не нужно различите) могуће одабрати различите индексе i, j, k и l тако да важи

$$\left|\frac{a_i}{a_j}-\frac{a_k}{a_l}\right|\leqslant C.$$

6. Нека је ABC оштроугли троугао. Тачка M је произвољна тачка на страници AB, а N је средиште странице AC. Нека су P и Q подножја нормала из темена A на праве MC и MN, редом. Доказати да центар кружнице описане око троугла PQN лежи на фиксној правој док се M креће по страници AB.

23. МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
БОСНЕ И ХЕРЦЕГОВИНЕ

Сарајево, 21. и 22. април 2018.

1. У оштроуглом троуглу ABC ($AB < AC$) тачке D, E и F су подножја висина из темена A, B и C, редом. Нека су P и Q тачке на правој EF такве да је $DP \perp EF$ и $BQ = CQ$. Доказати да је $\sphericalangle ADP = \sphericalangle PBQ$.

2. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$, k и M природни бројеви за које важи

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{и} \quad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$

Ако је $M > 1$, доказати да израз

$$M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

није једнак нули ни за један позитиван реалан број x.

3. Одредити све парове природних бројева a и b за које се у темена правилног $(a+b)$-тоугла може поставити a јединица и b нула тако да је задовољен следећи услов:

Уписане бројеве је могуће заротирати за неки угао тако да, у односу на почетни положај, једна суседна јединица и нула замене места, а бројеви у свим осталим теменима остану непромењени.

4. Сви квадратићи табле 1000×1000 су обојени црно или бело. Познато је да постоји квадрат 10×10 чији су сви квадратићи црни, као и квадрат 10×10 чији су сви квадратићи бели. За сваки квадрат K димензије 10×10 дефинишемо његову *моћ* $m(K)$ као апсолутну вредност разлике бројева црних и белих поља у квадрату K. Нека је T квадрат 10×10 који има најмању моћ. Одредити највећу могућу вредност $m(T)$.

5. Нека је p прост број и нека је $M = a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$. Играчи A и B играју следећу игру. Они играју наизменично, при чему A игра први. Играч на потезу бира број i из скупа $\{0, 1, \dots, p-1\}$ који није раније одабран и уместо a_i уписује неку цифру (могуће и нулу). Циљ играча A је да по завршетку игре број M буде дељив са p. Доказати да он има победничку стратегију.

6. Нека је O центар описаног круга оштроуглог неједнакокраког троугла ABC. Права OA сече висине троугла ABC из темена B и C редом у тачкама P и Q. Ако је H ортоцентар троугла ABC, доказати да центар описаног круга троугла PQH лежи на тежишној линији троугла ABC повученој из темена A.