17^{th} International Zhautykov Olympiad in Mathematics

Almaty , January 7-12, 2021

Први дан – 8.1.2021.

1. Доказати да постоји природан број n за који је остатак при дељењу броја 3^n бројем 2^n већи од 10^{2021}.

2. У конвексном тетивном шестоуглу $ABCDEF$ важи $BC = EF$ и $CD = FA$. Дијагонале FB и AC се секу у тачки Q, а дијагонале CE и DF се секу у тачки P. Тачке R и S су одабране редом на дужима DF и BF тако да је $FR = DP$ и $FS = BQ$. Дужи QR и PS секу се у тачки T. Доказати да права CT полови дијагоналу BD.

3. Дата је таблица $n \times n$ $(n \geqslant 2)$ попуњена реалним бројевима (у сваком пољу по један број). Скуп n поља која су сва у различитим врстама и у различитим колонама зовемо *топовским скупом*. У почетку је збир n бројева у сваком топовском скупу поља таблице ненегативан.

У сваком потезу Елвин бира по једну врсту и колону и реалан број a и сваком броју у изабраној врсти додаје a, а од сваког броја у изабраној колони одузима a (тиме ће број у пресеку изабране врсте и колоне остати непромењен). Доказати да он може да изврши низ потеза тако да у таблици не остане ниједан негативан број.

Други дан – 9.1.2021.

4. У троугао ABC је уписан круг полупречника r. Кругови полупречника r_1, r_2 и r_3 $(r_1, r_2, r_3 < r)$ уписани су у углове у теменима A, B и C тако да споља додирују уписани круг. Доказати да је $r_1 + r_2 + r_3 \geqslant r$.

5. На забави има 99 столица распоређених по кругу и 99 гостију који у почетку сви стоје. Домаћини Ана и Бобан играју игру са наизменичним потезима; Ана игра прва. Играч на потезу позива неког госта који стоји да седне на неку слободну столицу c, а затим, ако нису обе суседне столице слободне, позива тачно једног од гостију који седе на њима да устане (што гости одмах и цине). Анин циљ је да постигне да у неком тренутку бар k столица буде заузето. За које највеће k она може да постигне циљ ма како Бобан играо?

6. Дат је неконстантан полином $P(x)$ степена n с рационалним коефицијентима који се не може записати као производ два неконстантна полинома с рационалним коефицијентима. Доказати да полинома $Q(x)$ степена мањег од n с рационалним коефицијентима за које је $P(Q(x))$ дељиво са $P(x)$ има

(а) коначно много;
(б) не више од n.

Време за рад: 270 минута сваког дана.
Сваки задатак вреди 7 поена.