Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

15. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Први дан

11. мај 2021.

1. Дати су природни бројеви $a > 1$ и c и цео број $b \neq 0$. Доказати да постоји природан број n такав да број $a^n + b$ има делилац облика $cx + 1$ $(x \in \mathbb{N})$.

(Душан Ђукић)

2. У некој земљи има 100 градова, означених бројевима од 1 до 100. Два града су *суседна* ако су повезана путем; никоја два пута не повезују исти пар градова. Инострани туриста Пера 100 пута обилази земљу. За $i = 1, 2, \ldots, 100$, Пера започиње i-ти обилазак из града i и сваког дана путује у суседни град с најмањим редним бројем, под условом да тај град постоји и да га није већ обишао у овом обиласку; у супротном се враћа право у своју земљу.

Испоставило се да је након свих 100 обилазака Пера посетио сваки град исти број пута. Колико највише путева може бити у овој земљи?

(Милош Милосављевић)

3. У оштроуглом троуглу ABC најкраћа страница је AB. Тачке X и Y на описаној кружници троугла ABC су такве да важи

$$CX = AX + BX \quad \text{и} \quad CY = AY + BY.$$

Доказати да је $\sphericalangle XCY < 60^\circ$.

(Милош Милосављевић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

15. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Други дан

12. мај 2021.

4. Конвексан четвороугао $ABCD$ називамо *бахатим* уколико постоји конвексан четвороугао $PQRS$ чија су сва темена у унутрашњости или на страницама четвороугла $ABCD$, а чији је збир дијагонала већи од збира дијагонала четвороугла $ABCD$.

Нека је $r > 0$. Претпоставимо да конвексан четвороугао $ABCD$ није бахат, али за сваку тачку $A' \neq A$ такву да је $AA' \leqslant r$ четвороугао $A'BCD$ јесте бахат. Наћи све могуће вредности највећег угла четвороугла $ABCD$.

(Бојан Башић)

5. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xf(y) + x^2 + y) = f(x)f(y) + xf(x) + f(y).$$

(Никола Петровић)

6. Дат је коначан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Подниз $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_\ell$ $(0 \leqslant k < \ell \leqslant n)$ је *репетиција* ако постоји природан број $p \leqslant \frac{\ell-k}{2}$ такав да једнакост $a_i = a_{i+p}$ важи за $k+1 \leqslant i \leqslant \ell - p$, али не важи за $i = k$ (ако је $k > 0$), нити за $i = \ell - p + 1$ (ако је $\ell < n$).

Доказати да има мање од n репетиција. *(Бојан Башић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Потражићемо природне бројеве m и n такве да је

$$\frac{a^n+b}{a^m+b} = 1 + \frac{a^m(a^{n-m}-1)}{a^m+b}$$

цео број облика $cx+1$ ($x \in \mathbb{N}$), тј. такве да $c(a^m+b) \mid a^m(a^{n-m}-1)$.

Напишимо број bc у облику $bc = dM$, где је $(M,a)=1$, а сви прости делиоци броја d деле a. Постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да $d \mid a^k = dA$. Одаберимо $m > k$. Тада је $Ac(a^m+b) = a^k(Aca^{m-k}{+}M)$, при чему је $(Aca^{m-k}{+}M, a) = 1$, тако да по Ојлеровој теореми $Aca^{m-k}{+}M \mid a^r - 1$ за неки природан број r. Сада $Ac(a^m+b) \mid a^m(a^r-1)$, па је довољно узети $n = m+r$.

2. Одговор је $50^2 = 2500$. Доказујемо индукцијом да у аналогном задатку са $2n$ градова има највише n^2 путева. За $n=1$ то је тривијално.

Нека је Пера посетио сваки град тачно k пута. Ако је $k=1$, у земљи нема путева; зато надаље сматрамо да је $k \geqslant 2$.

Испитајмо посете граду $2n$. Осим у $2n$-том обиласку, Пера је тај град посетио бар још једном, и то путем из неког града i коме је град $2n$ сусед с најмањим редним бројем, тј. *једини* сусед. Међутим, ако је $k \geqslant 3$, онда постоје два града, рецимо $i < j$, којима је град $2n$ једини сусед, а град j ће онда бити посећен само једном, што је немогуће. Према томе, $k=2$.

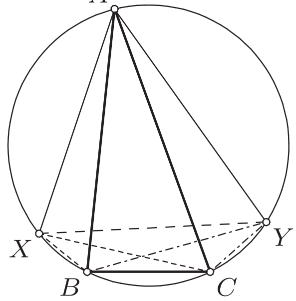
Из градова $2n$ и i укупно полази највише $2n-1$ путева. Уклањањем ових двају градова и свих путева из њих не реметимо услов задатка. Остаје $2n-2$ градова међу којима по индуктивној претпоставци постоји највише $(n{-}1)^2$ путева. Дакле, укупно има највише $(n{-}1)^2 + 2n{-}1 = n^2$ путева.

Овај број се достиже ако је град i ($1 \leqslant i \leqslant n$) повезан путем са свим градовима $j \geqslant 100-i$, а других путева нема. Заиста, тада су за $1 \leqslant i \leqslant n$ градови i и $100{-}i$ посећени двапут, и то у i-том и $(100{-}i)$-том обиласку.

3. Из услова задатка следи $CX + CY = AX + AY + BX + BY \geqslant 2XY$, па је

$$XY^2 \leqslant \frac{1}{4}(CX^2 + 2CX \cdot CY + CY^2) \leqslant CX^2 - CX \cdot CY + CY^2,$$

што је по косинусној теореми еквивалентно са $\sphericalangle XCY < 60°$.



<u>*Друго решење.*</u> Означимо $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Прво приметимо да постоје највише две тачке Z на описаној кружници $\triangle ABC$ такве да је $CZ = AZ + BZ$. Заиста, таква тачка Z није на краћем луку AB, јер би онда по Птоломејевој теореми за четвороугао $ACBZ$ било $AZ + BZ = CZ = \frac{b \cdot BZ + a \cdot AZ}{c} > AZ + BZ$. С друге стране, ако је Z на краћем луку AC (аналогно за лук BC), онда је $AZ{+}BZ =$

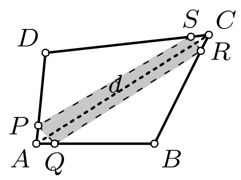
$CZ = \frac{b\cdot BZ - a\cdot AZ}{c}$, тј. $\frac{AZ}{BZ} = \frac{b-c}{a+c}$. па је Z на Аполонијевој кружници за тачке A и C са односом $\frac{b-c}{a+c}$ која сече лук AC у тачно једној тачки. Зато можемо да сматрамо да су X и Y редом на краћим луковима AC и BC.

Нека је $AX = a_1$, $BX = b_1$, $AY = a_2$, $BY = b_2$ и $XY = d$. Птоломејева теорема на четвороугловима $AXCY$ и $BXCY$ нам даје $bd = a_1c_2 + a_2c_1$ и $ad = b_1c_2 + b_2c_1$, одакле сабирањем добијамо $d = \frac{2c_1c_2}{a+b} < \frac{2c_1c_2}{c_1+c_2}$ (због $\sphericalangle AXZ, \sphericalangle BXZ > 90^\circ$ важи $a > c_2$ и $b > c_1$). Сада је

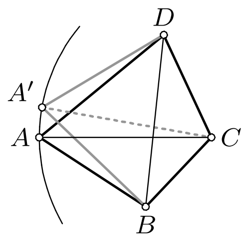
$$\cos\sphericalangle XCY = \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_1c_2} - \frac{d^2}{2c_1c_2} > \frac{c_1^2 + c_2^2}{2c_1c_2} - \frac{2c_1c_2}{(c_1+c_2)^2} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

Напомена. Може се доказати да је $\operatorname{tg}\frac{\sphericalangle XCY}{2} \leqslant \frac{1}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$, уз једнакост за $a = b$.

4. *Дијаметар* d датог четвороугла $ABCD$ је његова најдужа дијагонала или страница. За сваки четвороугао $PQRS$ садржан у њему, збир $PR + QS$ није већи од $2d$, али може бити произвољно близак $2d$ (заиста, ако су M и N темена четворугла $ABCD$ таква да је $MN = d$, довољно је узети P и Q близу M, а R и S близу N). Према томе, четвороугао $ABCD$ *није* бахат ако и само ако је $AC + BD = 2d$, тј.



$$\max\{AB, BC, CD, DA\} \leqslant d = AC = BD.$$



Претпоставимо да у четвороуглу $ABCD$ из задатка важи $AB < AC = BD$. Одаберимо тачку A' на кружници $k(C, CA)$, са оне стране праве CA с које је тачка D, тако да је AA' довољно мало. Тада је $DA' < DA$ и $A'B < AC$, тј. и даље важи $\max\{A'B, BC, CD, DA'\} \leqslant AC = BD$, тако да ни четвороугао $A'BCD$ није бахат, противно услову задатка.

Према томе, мора бити $AB = BD$. Аналогно важи и $AD = BD$, па је троугао ABD једнакостраничан. Пошто је $AB = AC = AD$, углови CDA, DAB и ABC су оштри, а највећи угао је $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 150^\circ$.

5. Заменом $x = y = 0$ у полазну једначину $(*)$ добијамо $f(0) = 0$. Сада $(*)$ за $y = 0$ даје

$$f(x^2) = xf(x). \qquad (\spadesuit)$$

Одавде заменом x са $-x$ следи да је $f(-x) = -f(x)$.

Даље, заменом (x, y) са $(-x, -y)$ у $(*)$ добијамо $f(xf(y) + x^2 - y) = f(x)f(y) + xf(x) - f(y)$, па је $f(z + 2y) = f(z) + 2f(y)$, где је $z = xf(y) + x^2 - y$. Како за дато $y \geqslant 0$ варирањем x израз z узима (бар) све ненегативне вредности, једнакост $f(z + 2y) = f(z) + 2f(y)$ важи за све $z, y \geqslant 0$. За $z = 0$ добијамо $f(2y) = 2f(y)$, па узимањем $w = 2y$ следи

$$f(z + w) = f(z) + f(w) \quad \text{за све} \quad z, w \geqslant 0.$$

Сада за $x \geqslant 0$ замена x са $x+1$ у $(\spadesuit)$ даје $f(x^2) + 2f(x) + f(1) = (x+1)(f(x) + f(1))$, па одузимањем $(\spadesuit)$ остаје $f(x) = ax$, где је $a = f(1)$. Ова једнакост важи и за $x < 0$, јер је $f(-x) = -f(x)$.

Функција $f(x) = ax$ задовољава $(*)$ за свако $a \in \mathbb{R}$, па је то решење задатка.

Друго решење. Као и у првом решењу, $f(x^2) = xf(x)$, $f(0) = 0$ и $f(-x) = -f(x)$. Кад год је $f(y) \neq 0$, заменом $x = -\frac{y}{f(y)}$ добијамо $f(-\frac{y}{f(y)}) = -1$. Међутим, ако је $f(a) = f(b) = -1$ за неке a и b, онда је $f(a^2) = af(a) = -a$ и $f(b^2) = -b$, па $(*)$ за $(x,y) = (a,b^2)$ и $(x,y) = (b,a^2)$ даје $f(a^2-ab+b^2) = -a = -b$, тј. $a = b$. Према томе, израз $-\frac{y}{f(y)}$ за $f(y) \neq 0$ узима само једну вредност, тј. постоји константа c таква да је $f(y) \in \{cy, 0\}$ за свако y.

Најзад, претпоставимо да је $c \neq 0$ и да за неке $x \neq 0$ и $y \neq 0$ важи $f(x) = cx$ и $f(y) = 0$. Тада $(*)$ даје $f(x^2+y) = cx^2 \in \{0, c(x^2+y)\}$, што је немогуће.

Према томе, $f(x) = cx$ за неко $c \in \mathbb{R}$. Ова функција задовољава $(*)$.

6. Допунимо низ елементом $a_{n+1} = 0$. Репетицију $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_\ell)$ с периодом p зовемо *растућом* ако је $a_{\ell+1} > a_{\ell-p+1}$, а *опадајућом* ако је $a_{\ell+1} < a_{\ell-p+1}$.

На низовима је дефинисан *лексикографски поредак*: низ $(x_1, \ldots, x_m)$ је *мањи* од низа $(y_1, \ldots, y_n)$ ако је $x_i = y_i$ за $i = 1, \ldots, k$, али $x_{k+1} < y_{k+1}$ или $k = m < n$.

Свакој опадајућој репетицији $(a_{k+1}, \ldots, a_\ell)$ с најмањим периодом p придружимо индекс i $(k+1 \leqslant i \leqslant \ell-p+1)$ за који је низ $\mathbf{s}_i = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n+1})$ лексикографски најмањи. Тада је $\mathbf{s}_i < \mathbf{s}_{i+1}, \mathbf{s}_{i+2}, \ldots, \mathbf{s}_{i+p-1}$, али $\mathbf{s}_i > \mathbf{s}_{i+p}$ због услова $a_{\ell-p+1} > a_{\ell+1}$. Овако индекс i највише једнозначно одређује период p, а самим тим и опадајућу репетицију $(a_{k+1}, \ldots, a_\ell)$. Јасно је и да је $i \neq k+1$.

Слично, свакој растућој репетицији $(a_{k+1}, \ldots, a_\ell)$ придружујемо индекс i $(k+1 \leqslant i \leqslant \ell-p+1)$ за који је низ $\mathbf{s}_i$ лексикографски највећи. Опет i једнозначно одређује растућу репетицију којој је придружен, при чему је $i \neq k+1$.

Претпоставимо да је неки индекс i придружен двама различитим репетицијама; једна од њих мора бити растућа, а друга опадајућа. Нека је без смањења општости $\mathbf{s}_i > \mathbf{s}_{i+1}$. Тада је период опадајуће репетиције 1, па је $a_i = a_{i-1}$, али онда је $\mathbf{s}_{i-1} < \mathbf{s}_i$, противно одабиру индекса i. Према томе, сваки индекс $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ је придружен највише једној репетицији, па репетиција нема више од $n-1$.

Напомена. Најбоља оцена нам није позната, али за свако $c < \frac{5+\sqrt{13}}{12} \approx 0{,}7171$ могу се конструисати низови са више од $c \cdot n$ репетиција.