Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

15. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Први дан

11. мај 2021.

1. Дати су природни бројеви $a > 1$ и c и цео број $b \neq 0$. Доказати да постоји природан број n такав да број $a^n + b$ има делилац облика $cx + 1$ ($x \in \mathbb{N}$).

2. У некој земљи има 100 градова, означених бројевима од 1 до 100. Два града су *суседна* ако су повезана путем; никоја два пута не повезују исти пар градова. Инострани туриста Пера 100 пута обилази земљу. За $i = 1, 2, \ldots, 100$, Пера започиње i-ти обилазак из града i и сваког дана путује у суседни град с најмањим редним бројем, под условом да тај град постоји и да га није већ обишао у овом обиласку; у супротном се враћа право у своју земљу.

Испоставило се да је након свих 100 обилазака Пера посетио сваки град исти број пута. Колико највише путева може бити у овој земљи?

3. У оштроуглом троуглу ABC најкраћа страница је AB. Тачке X и Y на описаној кружници троугла ABC су такве да важи

$$CX = AX + BX \quad \text{и} \quad CY = AY + BY.$$

Доказати да је $\sphericalangle XCY < 60^\circ$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

15. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Други дан

12. мај 2021.

4. Конвексан четвороугао $ABCD$ називамо *бахатим* уколико постоји конвексан четвороугао $PQRS$ чија су сва темена у унутрашњости или на страницама четвороугла $ABCD$, а чији је збир дијагонала већи од збира дијагонала четвороугла $ABCD$.

Нека је $r > 0$. Претпоставимо да конвексан четвороугао $ABCD$ није бахат, али за сваку тачку $A' \neq A$ такву да је $AA' \leqslant r$ четвороугао $A'BCD$ јесте бахат. Наћи све могуће вредности највећег угла четвороугла $ABCD$.

5. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(xf(y) + x^2 + y) = f(x)f(y) + xf(x) + f(y).$$

6. Дат је коначан низ природних бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$. Подниз $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_\ell$ $(0 \leqslant k < \ell \leqslant n)$ је *репетиција* ако постоји природан број $p \leqslant \frac{\ell-k}{2}$ такав да једнакост $a_i = a_{i+p}$ важи за $k+1 \leqslant i \leqslant \ell - p$, али не важи за $i = k$ (ако је $k > 0$), нити за $i = \ell - p + 1$ (ако је $\ell < n$).

Доказати да има мање од n репетиција.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.