Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Први разред – А категорија

1. Одредити све вредности реалног параметра a за које је полином

$$P(x) = x^{2021} - 2x^2 + x + a^3 - a$$

дељив полиномом $Q(x) = x^2 - (a+1)x + a$.

2. Наћи најмањи природан број n за који постоје природни бројеви a и b чији су збирови цифара редом 28 и 21 и притом је

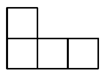
$$a + b = \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n}.$$

3. На страницама AB и BC једнакостраничног троугла ABC уочене су редом тачке Z и X тако да је

$$AZ : ZB = BX : XC = 2021 : 2020.$$

Симетрала дужи XZ сече страницу AC у тачки Y. Одредити однос $AY : YC$.

4. Поља квадратне табле 4×4 треба обојити са неколико боја тако да су у свакој фигури која је подударна фигури



сва поља различитих боја. Колико је најмање боја потребно?

5. Наћи све природне бројеве n за које је број $n \cdot 2^n + 4$ квадрат целог броја.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Други разред – А категорија

1. Наћи све парове реалних бројева (x, y) таквих да је $x \geqslant y \geqslant 1$ и

$$2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0.$$

2. У паралелограму $ABCD$ са оштрим углом у темену A, подножја нормала из темена C на праве AB, BD и AD су редом P, Q и R. Доказати да пресек дијагонала паралелограма O лежи на описаној кружници троугла PQR.

3. Скуп X има 11 елемената. Подскупови $A_1, A_2, \ldots, A_n$ скупа X су такви да важи:

(i) $4 \leqslant |A_i| \leqslant 10$ за свако $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) за свака три елемента скупа X постоји јединствен скуп A_i коме они припадају.

Доказати да за бар једно i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ важи $|A_i| = 7$.

4. Одредити све природне бројеве $n \geqslant 2$ за које једначина

$$(2 + \cos x)(3 + \cos x) \cdots (n + \cos x) = (1 + \cos^2 x)(1 + \cos^3 x) \cdots (1 + \cos^n x)$$

има бар једно реално решење.

5. Означимо са $S_3(x)$ збир цифара природног броја x када се он запише у бројевном систему са основом 3 (нпр. $11 = (102)_3$, па је $S_3(11) = 1 + 0 + 2 = 3$). Доказати да за сваки природан број n међу бројевима

$$S_3(2^n), S_3(2^{n+1}), S_3(2^{n+2}), \ldots, S_3(2^{3n})$$

постоје два једнака.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Трећи разред – А категорија

1. У трапезу $ABCD$ ($AB \parallel CD$) дијагонале AC и BD секу се у тачки E, а праве AD и BC у тачки F. Тачка $G \neq E$ је одабрана на кружници BCE тако да је $EG \parallel AD$. Доказати да је $\sphericalangle AFG = \sphericalangle BFE$.

2. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева $x = \overline{a_k \ldots a_1}$ (где је $a_k \neq 0$) таквих да бројеви x и x^2 имају исти k-тоцифрени завршетак.

3. Скуп $\{1, 2, \ldots, 49, 51, 52, \ldots, 99\}$ треба поделити у неуређене парове тако да се у сваком пару елементи разликују за 24 или 25. Колико има таквих подела?

4. Дат је прост број p облика $4k+3$. Нека су a и x цели бројеви који нису дељиви са pтакви да важи $a \equiv x^2 \pmod{p}$. Доказати да постоји цео број b такав да важи $a \equiv b^4 \pmod{p}$.

5. Колико има комплексних бројева z за које важи једнакост

$$|z^{2020} - 1| = |z^{2021} - 1|\,?$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Четврти разред – А категорија

1. Одредити све могуће вредност реалног параметра $t \geqslant 0$ за које се решења једначине

$$x^3 - tx^2 - 16x - 4\sqrt{2t} = 0$$

могу означити са x_1, x_2 и x_3 тако да је x_1 позитиван реалан број и

$$x_2^2 x_3^2 = \sqrt{x_1^3} + (x_2 + x_3 + 9)\sqrt{x_1} - \frac{288}{x_1^2}.$$

2. Дато је неколико међусобно различитих црвених, плавих и белих корпи (бар по једна у свакој боји). Потребно је распоредити n различитих оловака у корпе. Ферма је бројао такве распореде у којима су бар по једна црвена и плава корпа непразне. С друге стране, Вајлс је бројао распореде у којима су све црвене и плаве корпе празне. Испоставило се да су Фермаов и Вајлсов резултат исти. Ако има тачно 2020 корпи у најзаступљенијој боји, колико укупно има корпи?

3. Наћи највећи реалан број α за који постоји низ непарних природних бројева $a_0 = 1 < a_1 < a_2 < \dots$ са следећим својством:

за свако n, a_n је највећи природан број строго мањи од $\alpha \cdot a_{n+1}$.

4. Наћи најмањи природан број k са следећим својством:

међу ма којих k целих бројева постоје различити бројеви a и b такви да је број

$$a^2 + 2ab - 3b^2 - 2a + 2b$$

дељив са 28.

5. Око кружнице полупречника r описан је четвороугао $ABCD$ у коме је $AB = 4$, $BC = 3$ и $CD = 2$. Доказати да је $1 < r \leqslant \sqrt{2}$.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да је за сваку цифру a број $\overline{2a2a2a21}$ сложен.

2. **(а)** Дат је ненегативан реалан број a. У скупу реалних бројева решити једначину

$$2021(x+|x|)=|x+a|.$$

(б) Може ли се број a одабрати тако да дата једначина има тачно једно реално решење?

3. У једном реду биоскопа је $2n$ седишта. Треба означити n седишта на којима ће седење бити дозвољено, при чему правило дистанце налаже да два посетиоца не смеју да седе један до другог. На колико начина се то може учинити?

4. На страницама AB и AC троугла ABC дате су тачке D и E, редом. Дужи BE и CD секу се у тачки P. Ако је $CE=CP$ и $AE=2\cdot DP$, доказати да је D средиште странице AB.

5. Наћи све природне бројеве n за које је $n\cdot 2^{n-3}+3$ квадрат целог броја.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Други разред – Б категорија

1. Дат је негативан цео број c. Решити неједначину

$$\frac{-2x^2+2x+c}{x^2-3|x|+2}>0.$$

2. Ако су a, b и c дужине страница неког троугла, доказати неједнакост

$$2a^2+2b^2>c^2.$$

3. У затвору има 29 затвореника, заведених под редним бројевима од 1 до 29. Свака два затвореника са збиром редних бројева 30 су у сукобу, док су остали парови у добрим односима. На колико начина се може одабрати затворска фудбалска екипа од 11 затвореника међу којима никоја два нису у сукобу?

4. Дат је једнакостраничан троугао ABC странице 2. Тачка D на страници BC и тачка E на страници AC су такве да је $CD+CE=3$. Ако је M средиште странице AB, израчунати угао DME.

5. **(а)** Колико (позитивних) делилаца има број $2^{28}\cdot 5^{49}$, укључујући број 1 и њега самог?

(б) Колико има природних бројева дељивих са 2021 који имају тачно 2021 делилаца?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Трећи разред – Б категорија

1. У једном реду биоскопа је 9 седишта. Треба означити 4 седишта на којима ће седење бити дозвољено, при чему правило дистанце налаже да два посетиоца не смеју да седе један до другог. На колико начина се то може учинити?

2. У зависности од реалног параметра a у скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$\begin{cases} \ln x + \ln y^2 + \ln z^3 = 0 \\ \ln x^2 + \ln y^3 + \ln z = a \\ \ln x^3 + \ln y^5 + a \ln z = 2a - 4. \end{cases}$$

3. Доказати да за свако $x \in \mathbb{R}$ важи неједнакост

$$\cos^{2020} x + \sin^{2021} x + \cos^{2022} x \leqslant 2.$$

4. Дат је једнакостраничан троугао ABC странице 1. Тачка D на страници BC је таква да је $BD = \frac{2}{3}$, а тачка E на страници AC таква да је $\sphericalangle ADE = 30^\circ$. Израчунати дужину дужи AE.

5. Одредити све парове природних бројева (x, y) такве да је

$$x^2 - 4y^2 = x - 2y + 2^{2021}.$$

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. фебруар 2021.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да је број $2020^{2020} + 2021^{2021}$ сложен.

2. Дато нам је шест различитих лопти и три кутије. У прву кутију може да стане једна лопта, у другу три, а у трећу пет. На колико начина се ове лопте могу распоредити у кутије?

3. Доказати да једначина $x^{2021} = \sin x$ има тачно три реална решења.

4. Тачке P, A, B и C су такве да је $PA = 1$, $PB = 2$, $PC = 4$ и $\sphericalangle APB = \sphericalangle BPC < 90^\circ$. Права AP сече описану кружницу троугла ABC у тачки D различитој од A и C. Одредити дужину дужи AD.

5. Колико реалних решења (x, y) има систем једначина

$$\begin{cases} x^2 = 8y - 4a \\ y^2 = x - a \end{cases}$$

у зависности од реалног параметра a?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.