62. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санкт Петербург, Русија ≪*на даљину*≫ – понедељак, 19. јул 2021.

1. Нека је $n \geqslant 100$ природан број. Иван записује сваки од бројева $n, n+1, \ldots, 2n$ на различиту карту. Он затим промеша ових $n+1$ карата и подели их на две гомиле. Доказати да бар једна од ових гомила садржи две карте такве да је збир бројева написаних на њима потпун квадрат. *(Аустралија)*

2. Доказати да за све реалне бројеве $x_1, \ldots, x_n$ важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

(Канада)

3. Дата је тачка D у унутрашњости оштроуглог троугла ABC у коме је $AB > AC$ таква да важи $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$. Тачка E на дужи AC је таква да је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$, тачка F на дужи AB таква да је $\sphericalangle FDA = \sphericalangle DBC$, а тачка X на правој AC таква да је $CX = BX$. Нека су тачке O_1 и O_2 центри описаних кружница троуглова ADC и EXD, редом. Доказати да се праве BC, EF и O_1O_2 секу у једној тачки.
(Украјина)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

62. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санкт Петербург, Русија ≪*на даљину*≫ – уторак, 20. јул 2021.

4. Нека је Γ кружница са ценром у тачки I и нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да свака од дужи AB, BC, CD и DA додирује кружницу Γ. Нека је Ω кружница описана око троугла AIC. Продужетак странице BA преко A сече кружницу Ω у тачки X, а продужетак странице BC преко C сече кружницу Ω у тачки Z. Продужеци страница AD и CD преко D секу кружницу Ω у тачкама Y и T, редом. Доказати да важи

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

(Пољска)

5. Две веверице, Збуниша и Радиша, сакупиле су 2021 жир за зиму. Радиша је обележио жирове бројевима од 1 до 2021 и ископао 2021 рупа поређаних укруг око њиховог омиљеног дрвета. Следећег јутра Радиша је приметио да је Збуниша распоредио по један жир у сваку рупу, али да није узимао у обзир бројеве на жировима. Несрећан због тога, Радиша је одлучио да прераспореди жирове спровођењем низа од 2021 потеза. У k-том потезу Радиша размењује позиције два жира суседна жиру обележеном бројем k. Доказати да постоји k такво да у k-том потезу Радиша размењује жирове са бројевима a и b за које важи $a < k < b$. *(Шпанија)*

6. Дат је природан број $m \geqslant 2$. Нека је A коначан скуп (не обавезно позитивних) целих бројева и нека су $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ неки његови подскупови. Претпоставимо да је, за свако $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, збир елемената скупа B_k једнак m^k. Доказати да скуп A садржи бар $m/2$ елемената. *(Аустрија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. Довољно је пронаћи три различита броја $a, b, c \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$ таква да су збирови $a+b$, $a+c$ и $b+c$ потпуни квадрати: два од ових бројева биће у истој гомили. Подешавањем $a+b=(2k-1)^2$, $a+c=(2k)^2$ и $b+c=(2k+1)^2$ добићемо

$$a = 2k^2-4k, \quad b = 2k^2+1, \quad c = 2k^2+4k,$$

па још треба одабрати $k \in \mathbb{N}$ тако да је $2k^2-4k \geqslant n$ и $2k^2+4k \leqslant 2n$, што се своди на $n \in I_k = [k^2+2k, 2k^2-4k]$. Међутим, пошто за $k \geqslant 9$ важи $2k^2-4k < (k+1)^2+2(k+1)$, интервали I_k и I_{k+1} се преклапају, па интервали I_k за $k \geqslant 9$ покривају цео интервал $[99, +\infty)$, чиме је тврђење задатка доказано за $n \geqslant 99$.

Напомена. Тврђње не важи за $n = 98$. Контрапример је када прва гомила садржи бројеве $98, 100, 102, \dots, 126$, $129, 131, 133, \dots, 161$, $162, 164, 166, \dots, 196$.

2. Додавањем фиксног броја t свим променљивим x_i лева страна L дате неједнакости се не мења, док десна страна

$$D(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j+2t|}$$

зависи од t. Тачке $a_{ij} = -\frac{x_i+x_j}{2}$ деле реалну праву на интервале (укључујући два бесконачна) на којима је функција $D(t)$ конкавна, јер је таква и свака функција облика $f(t) = \sqrt{|a_{ij}+2t|}$. Пошто $D(t) \to +\infty$ када $t \to \pm\infty$, следи да функција $D(t)$ достиже минимум у једном од крајева ових интервала, тј. у тачки $t = a_{rs} = -\frac{x_r+x_s}{2}$ за неке $1 \leqslant r, s \leqslant n$. Зато је довољно доказати да је $L \leqslant D(a_{rs})$, тј. полазну неједнакост за бројеве $x_i' = x_i + a_{rs}$ за које важи $x_r' + x_s' = 0$.

Међутим, ако је $x_r + x_s = 0$, онда је $|x_i \pm x_r| = |x_i \mp x_s|$ за све i, па се уклањањем бројева x_r и x_s обе стране полазне неједнакости смањују за исту величину, чиме се неједнакост своди на аналогну за $n-1$ или $n-2$ променљивих. Тако тврђење задатка, будући тривијално за $n=0$ и $n=1$, одмах следи индукцијом.

Друго решење. Простор $L^2(\mathbb{R}^+)$ функција $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ таквих да је $f(x)^2$ интеграбилна функција на $\mathbb{R}^+$ је *унитаран*: на њему се може увести *скаларни производ* формулом $\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$. Из особина скаларног производа следи да ако је $f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i(x)$, где су y_i константе и $f_i \in L^2(\mathbb{R}^+)$, онда је

$$0 \leqslant \langle f, f\rangle = \sum_{i,j}\langle f_i, f_j\rangle y_i y_j.$$

Сада ћемо одабрати функције f_i тако да важи $\langle f_i, f_j\rangle = \alpha\cdot(\sqrt{|x_i+x_j|} - \sqrt{|x_i-x_j|})$ за неку константу α. Тражена неједнакост ће одмах следити за $y_i = 1$.

Посматрајмо (очигледно конвергентан) интеграл $I(a) = \int_0^{+\infty}\frac{1-\cos at}{t^{3/2}}dt$. Смена $u = at$ даје $I(a) = I(1)\sqrt{|a|}$. Како је $\cos(x_i-x_j)t - \cos(x_i+x_j)t = 2\sin(x_i t)\sin(x_j t)$, имамо

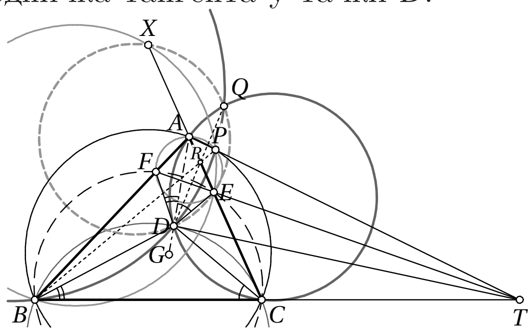
$$I(x_i-x_j)-I(x_i+x_j)=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x_i t)}{t^{3/4}}\cdot\frac{\sin(x_j t)}{t^{3/4}}dt,$$

па можемо узети $f_i(t)=\frac{\sin(x_i t)}{t^{3/4}}$, јер је тада $\langle f_i,f_j\rangle=(\sqrt{|x_i+x_j|}-\sqrt{|x_i-x_j|})\cdot\frac{1}{2}I(1)$.

Напомена. Општија неједнакост $\sum_{i,j}|x_i-x_j|^p\leqslant\sum_{i,j}|x_i+x_j|^p$ важи за свако $0\leqslant p\leqslant 2$. Прво решење пролази без измене за $p\in[0,1]$, док друго пролази за $p\in(0,2)$ одабиром $f_i(t)=t^{-\frac{p+1}{2}}\sin(x_i t)$; случајеви $p=0$ и $p=2$ се једноставно проверавају. Вредност $I(1)$ из другог решења се може експлицитно израчунати: $I(1)=\sqrt{2\pi}$.

3. Тачка D лежи на симетрали угла BAC, а такође и њој изогонално спрегнута тачка G. Пошто је $\sphericalangle GBF=\sphericalangle CBD=\sphericalangle ADF$, тачке B,F,D,G су концикличне; аналогно, и тачке C,E,D,G су концикличне. Из потенције тачке A следи да је $AB\cdot AF=AD\cdot AG=AC\cdot AE$, што значи да су и тачке B,C,E,F концикличне.

Како је $\sphericalangle CBD+\sphericalangle DFE=\sphericalangle ADF+\sphericalangle DFE=\sphericalangle DAE+\sphericalangle AEF=\sphericalangle BAD+\sphericalangle CBA=\sphericalangle CDA-\sphericalangle DCB=\sphericalangle CDA-\sphericalangle EDA=\sphericalangle CDE$, кружнице BDC и EDF се додирују у тачки D. Пресек T правих BC и EF има једнаку потенцију у односу на обе кружнице, па лежи на њиховој радикалној оси, а то је заједничка тангента у тачки D.

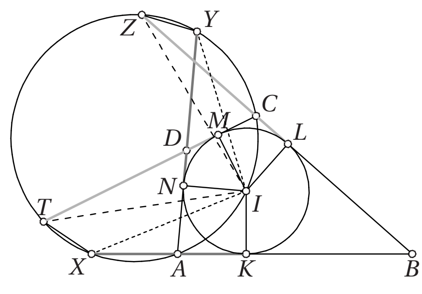


Нека права TA поново сече кружницу ABC у тачки $P\neq A$. Како је $TE\cdot TF=TD^2=TB\cdot TC=TA\cdot TP$, тачка P лежи на кружници AEF. Даље је $\sphericalangle BPE=\sphericalangle APE-\sphericalangle APB=180^\circ-\sphericalangle EFA-\sphericalangle ACB=180^\circ-2\sphericalangle ACB=\sphericalangle BXE$, па тачке B,E,P,X леже на истој кружници.

Инверзија са центром T и полупречником TD слика кружницу ADC у кружницу PDB. Ако се ове две кружнице секу у тачкама D и Q, њихови центри и тачка T леже на симетрали дужи DQ. Остаје да се докаже да и центар кружнице DEX лежи на симетрали дужи DQ, тј. да тачка Q лежи на овој кружници.

Радикалне осе кружница ABC, ADC и BDP су праве AC, BP и DQ, па оне имају заједничку тачку R. Тада је $RE\cdot RX=RB\cdot RP=RD\cdot RQ$, тј. тачке D,Q,E,X су концикличне, чиме је доказ завршен.

4. Означимо са K,L,M,N редом тачке додира круга Γ са страницама AB,BC,CD,DA. Како је $\sphericalangle IMT=\sphericalangle ILZ=90^\circ$ и $\sphericalangle IZL=\sphericalangle IZC=\sphericalangle ITC=\sphericalangle ITM$, троуглови ILZ и IMT су подударни. Аналогно су и троуглови IKX и INY подударни.



Из наведених подударности следи $IX=IY$ и $IZ=IT$, па су троуглови IXT и IYZ симетрични у односу на праву кроз центре кругова Γ и Ω; одатле је $XT=YZ$.

Такође важи $KX = NY$ и $MT = LZ$. Пошто је притом $AK = AN$, $CL = CM$ и $DM = DN$, добијамо

$$\begin{aligned} XA+AD+DT+TX &= (XA+AN)+(ND+DT)+TX = XK+MT+TX \\ &= ZL+NY+YZ = (ZC+CM)+(MD+DY)+YZ = ZC+CD+DY+YZ. \end{aligned}$$

5. Претпоставимо супротно: кад год у k-том потезу жирови a и b замене места, важи или $a,b<k$, или $a,b>k$. После k-тог потеза, *печеним* зовемо сваки жир са бројем не већим од k. После првог потеза само жир 1 је печен.

У општем случају, после k-тог потеза печени жирови чине групе од по неколико суседних, раздвојене „непеченим" жировима. Доказујемо индукцијом по k да се свака од ових група састоји од непарног броја жирова. Претпостављамо да је то тачно после $k-1$ потеза, а да у k-том жирови a и b мењају места.

(1°) Ако су $a,b>k$, онда након k-тог потеза само жир k постаје печен (суседи остају непечени), те он чини засебну групу.

(2°) Ако су $a,b<k$, онда су суседи жетона k печени и припадају групама дужина $2i-1$ и $2j-1$, редом. Како у k-том потезу жир k, који их раздваја, постаје печен, ове две групе се спајају у једну са $2(i+j)-1$ жирова.

Индукција је готова. Међутим, након 2020 потеза само жир 2021 није печен, те печени жирови чине групу дужине 2020, што је контрадикција.

Друго решење. Опет претпостављамо супротно. Жир k зовемо *великим* ако су ознаке на његовим суседима у k-том потезу мање од k, а *малим* ако су те ознаке веће од k. Као и у првом решењу, казаћемо да Радиша у k-том потезу *пече* жир k; након k-тог потеза жир k је *печен.*

У сваком потезу места мењају или два печена, или два непечена жира. Дакле, ако се једном у некој рупи нађе печен жир, онда ће се у тој рупи и надаље увек налазити печен жир. То значи и да се у свакој рупи жир може пећи највише једном, и према томе тачно једном.

Посматрајмо две суседне рупе A и B у којима су се испекли жирови a и b ($a<b$). Ако је жир a мали, онда се у b-том потезу у рупи A и даље налазио печен жир, дакле ознаке мање од b, па је жир b велики. Слично, ако је жир b велики, жир a мора бити мали. Следи да се рупе у којима се пеку мали и велики жирови ређају наизменично, што је немогуће јер је 2021 непаран број.

Напомена. Тврђење није тачно ако има $2n$ жирова. На пример, ако су у почетку жирови $1,2,\dots,n$ на непарним позицијама, а $n+1,\dots,2n$ на парним, онда ће се то својство очувати, те ће у сваком тренутку жир на непарној (односно парној) позицији бити мањи (односно већи) од оба своја суседа.

6. Претпоставимо да скуп A има $k \leqslant \frac{m}{2}$ елемената. Посматрајмо m^m збирова облика $c_1 m + c_2 m^2 + \cdots + c_m m^m$, где су $c_1, \dots, c_m \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Сви ови збирови су међусобно различити. С друге стране, они се могу представити и као

$$c_1 m + c_2 m^2 + \cdots + c_m m^m = c_1 \sum_{a \in B_1} a + c_2 \sum_{a \in B_2} a + \cdots + c_m \sum_{a \in B_m} a = \sum_{a \in A} n_a a, \qquad (\spadesuit)$$

где је $n_a = \sum_{a \in B_i} c_i$. Како је $n_a \leqslant m^2 - m$, следи да ови збирови узимају највише $(m^2 - m + 1)^k < m^m$ различитих вредности, чиме смо добили контрадикцију.

Напомена. Показаћемо да је у ствари $k \geqslant \left(\frac{2}{3} - o(1)\right) m$. Следеће тврђење је варијанта *Азумине неједнакости* из теорије вероватноће:

> Нека су $X_1, \dots, X_m$ случајне променљиве, при чему је $0 \leqslant X_i \leqslant b_i$. Ако је $X = X_1 + \cdots + X_m$, онда је $\mathrm{P}\big(X - \mathrm{E}(X) \geqslant \varepsilon\big) \leqslant e^{-2\varepsilon^2/B}$, где је $B = b_1^2 + \cdots + b_m^2$.

Коефицијенте c_i у једнакости $(\spadesuit)$ можемо да сматрамо случајним променљивим са равномерном расподелом. Тада је $b_i = m - 1$ и $B = m(m-1)^2 < m^3$. За одабир $\varepsilon = m^{3/2}\sqrt{\ln m}$ Азумина неједнакост нам даје

$$\mathrm{P}\big(|n_a - \mathrm{E}(n_a)| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant 2e^{-2\varepsilon^2/B} = \frac{2}{m^2}.$$

Према томе, вероватноћа да за свако a важи $|n_a - \mathrm{E}(n_a)| < \varepsilon$ већа је од $(1 - \frac{2}{m^2})^k > 1 - \frac{2}{m}$. Другим речима, међу свим могућим изразима $S = c_1 m + \cdots + c_m m^m$ из $(\spadesuit)$, за бар $(1 - \frac{2}{m}) m^m$ њих важиће $|n_a - \mathrm{E}(n_a)| < \varepsilon$ за све a.

С друге стране, таквих израза S има мање од $(2\varepsilon + 1)^k$, па је $(2\varepsilon + 1)^k > (1 - \frac{2}{m}) m^m$, тј. $(1 + o(1)) m^{3k/2} (4 \ln m)^{k/2} > m^m$. Следи да је $k \geqslant \left(\frac{2}{3} - o(1)\right) m$ за довољно велико m.