понедељак, 19. јул 2021

Задатак 1. Нека је $n \geqslant 100$ природан број. Иван записује сваки од бројева $n, n+1, \ldots, 2n$ на различиту карту. Он затим промеша ових $n+1$ карата и подели их на две гомиле. Доказати да барем једна од ових гомила садржи две карте такве да је збир бројева написаних на њима потпун квадрат.

Задатак 2. Доказати да неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

важи за све реалне бројеве $x_1, \ldots, x_n$.

Задатак 3. Дата је тачка D у унутрашњости оштроуглог троугла ABC у коме је $AB > AC$ таква да важи $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAD$. Тачка E на дужи AC је таква да је $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCD$, тачка F на дужи AB је таква да је $\sphericalangle FDA = \sphericalangle DBC$, док је тачка X на правој AC таква да је $CX = BX$. Нека су тачке O_1 и O_2 центри описаних кружница троуглова ADC и EXD, редом. Доказати да се праве BC, EF, и O_1O_2 секу у једној тачки.

Време за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

уторак, 20. јул 2021

Задатак 4. Нека је Γ кружница са центром у тачки I и нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да свака од дужи AB, BC, CD и DA додирује кружницу Γ. Нека је Ω кружница описана око троугла AIC. Продужетак странице BA преко A сече кружницу Ω у тачки X, а продужетак странице BC преко C сече кружницу Ω у тачки Z. Продужеци страница AD и CD преко D секу кружницу Ω у тачкама Y и T, редом. Доказати:

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Задатак 5. Две веверице, Збуниша и Радиша, сакупиле су 2021 жир за зиму. Радиша је обележио жирове бројевима од 1 до 2021 и ископао 2021 рупу поређану укруг око њиховог омиљеног дрвета. Следећег јутра, Радиша је приметио да је Збуниша распоредио по један жир у сваку рупу, али да није узимао у обзир бројеве на жировима. Несрећан због тога, Радиша је одлучио да прераспореди жирове спровођењем низа од 2021 потеза. У k-том потезу, Радиша размењује позиције два жира суседна жиру обележеном бројем k. Доказати да постоји k такво да у k-том потезу Радиша размењује жирове са бројевима a и b за које важи $a < k < b$.

Задатак 6. Дат је природан број $m \geqslant 2$. Нека је A коначан скуп (не обавезно позитивних) целих бројева и нека су $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ неки његови подскупови. Претпоставимо да је, за свако $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, збир елемената скупа B_k једнак m^k. Доказати да скуп A садржи барем $m/2$ елемената.

Време за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.