Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Први дан

25. мај 2021.

1. Доказати да за сваки непаран природан број n постоје реални бројеви a_1, $a_2, \ldots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ такви да је полином

$$P(x,y,z) = x^n + y^n + z^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k x^k y^k z^{n-2k}$$

дељив полиномом $x+y+z$. *(Душан Ђукић)*

2. Нека је D произвољна тачка на страници BC троугла ABC. Тачке E и F на полуправим CA и BA редом су такве да је $CD = CE$ и $BD = BF$. Праве BE и CF се секу у тачки P. Доказати да, када тачка D варира дуж странице BC, све праве PD имају заједничку тачку. *(Павле Мартиновић)*

3. Дат је прост број p. Колико има уређених четворки (a,b,c,d) природних бројева који нису дељиви са p и задовољавају једначине

$$ac + bd = p(a+c) \quad \text{и} \quad bc - ad = p(b-d)?$$

(Душан Ђукић)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Други дан

26. мај 2021.

4. Ако је $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ низ целих бројева, колико највише може бити поднизова облика $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2020)$ са збиром чланова 2021?

(Милош Милосављевић)

5. На природним бројевима могу се спроводити следеће операције: ако је број паран, он се дели са 2, а ако је непаран, множи се неким степеном броја 3 (већим од 3^0) и затим увећава за 1. Доказати да се, за ма који почетни број $n \in \mathbb{N}$, поновљеном применом оваквих операција може добити број 1.

(Бојан Башић)

6. Дат је скуп $S = \{1, 2, \ldots, 10^{10}\}$. Колико има пресликавања $f : S \to S$ таквих да важи

$$f(x+1) \equiv f(f(x)) + 1 \pmod{10^{10}} \quad \text{за свако } x \in S?$$

(За $x = 10^{10}$ подразумевамо да је $f(x+1) = f(1)$.) *(Душан Ђукић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

1. Услов задатка је еквивалентан са $P(x,y,z)=0$ кад год је $x+y+z=0$, што се дељењем са z^n своди на $P(t,1-t,-1)=0$ за $t=-x/z$, тј.

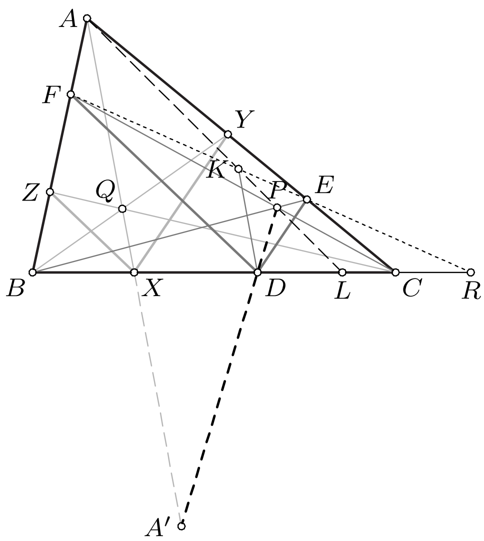
$$f_n(t)=t^n+(1-t)^n-1=\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor} a_k(t-t^2)^k.$$

Према томе, довољно је доказати да за свако $n\in\mathbb{N}$ постоји полином $Q_n(x)$ дељив са x такав да је $f_n(t)=Q_n(t-t^2)$. Али ово следи једноставном индукцијом по n, јер је $f_1(t)=0,\ f_2(t)=-2(t-t^2)$ и

$$f_n(t)=f_{n-1}(t)-(t-t^2)(f_{n-2}(t)+1)\ \text{ за } n\geqslant 3.$$

2. Тврђење задатка је специјалан случај следећег тврђења када су X, Y и Z додирне тачке уписаног круга троугла ABC са његовим страницама (а Q Жергонова тачка). Зато је довољно доказати ово тврђење:

- Дата је тачка Q у равни троугла ABC. Праве AQ,BQ,CQ секу странице BC,CA,AB редом у тачкама X,Y,Z. Тачке D,E,F на правим BC,CA,AB су такве да је $DE\parallel XY$ и $DF\parallel XZ$. Праве BE и CF секу се у тачки P. Тада тачка A', симетрична тачки A у односу на X, лежи на правој DP (ако $D\neq P$).



Ако је $XY\cap AB=\{J\}$, из четворотеменика $CXQY$ следи да је четворка тачака $(J,Z;A,B)$ хармонијска, тј. $\mathcal{H}(J,Z;A,B)$ и одатле $\mathcal{H}(XY,XZ;XA,XB)$.

С друге стране, ако права AP сече EF и BC редом у тачкама K и L, из четворотеменика $AEPF$ следи $\mathcal{H}(B,C;L,R)$, одакле пројекцијом из тачке P следи $\mathcal{H}(E,F;K,R)$, тј. $\mathcal{H}(DE,DF;DK,DR)$. Како је $DE\parallel XY$, $DF\parallel XZ$ и $DC\parallel XB$, хармонијски прамен $(DE,DF;DK,DC)$ је транслат хармонијског прамена $(XY,XZ;XA,XB)$, па важи и $DK\parallel XA$.

Најзад, ако је $DP\cap AX=\{\bar{A}'\}$, из $\mathcal{H}(E,F;\,K,R)$ пројектовањем из B следи $\mathcal{H}(P,A;\,K,L)$, а затим пројектовањем из D следи $\mathcal{H}(A,\bar{A}';\infty,X)$, где је ∞ бесконачна тачка правца AX. Одавде је X средиште дужи $A\bar{A}'$, тј. $\bar{A}'\equiv A'$.

3. Друга једначина гласи $(a-p)d=(c-p)b$. Из прве једначине имамо $p^2=(a-p)(c-p)+bd=(a-p)^2\frac{d}{b}+bd$, тј. $p^2b=((a-p)^2+b^2)d$, одакле следи $d\mid b$. Аналогно важи $p^2d=((c-p)^2+d^2)b$, па и $b\mid d$. Следи да је $b=d$, а из друге једначине и $a=c$.

Прва једначина се своди на $a^2+b^2=2pa$, тј. $(a-p)^2+b^2=p^2$, што значи да је $(|a-p|,b,p)$ Питагорина тројка. Према томе, за неке природне бројеве

$m \geqslant n$ важи $p = m^2 + n^2$ и $\{|a-p|, b\} = \{m^2-n^2, 2mn\}$. Знамо да овакви m и n постоје (и јединствени су) ако и само ако је $p = 2$ или $p \equiv 1 \pmod 4$. Тада имамо четири случаја који нам дају четири различита решења:

(1) $a = c = 2m^2, \quad b = d = 2mn$; (3) $a = c = (m+n)^2, \quad b = d = m^2-n^2$;
(2) $a = c = 2n^2, \quad b = d = 2mn$; (4) $a = c = (m-n)^2, \quad b = d = m^2-n^2$.

За $p = 2$ бројеви a, b, c, d су парни, па овај случај отпада. Тако дати систем има тачно 4 решења за $p \equiv 1 \pmod 4$, а ниједно у супротном.

Друго решење. Дати систем је еквивалентан једначини $(a + bi)(c - di) = p(a + c + bi - di)$ у скупу Гаусових целих бројева $\mathbb{Z}[i]$ (где је $i^2 = -1$), тј.

$$(z - p)(w - p) = p^2 \quad \text{за} \quad z = a + bi, \text{ и } w = c - di.$$

Ако је $p \equiv 3 \pmod 4$, онда је p прост број и у скупу $\mathbb{Z}[i]$, па $p \mid z$ (тј. $p \mid a, b$) или $p \mid w$ (тј. $p \mid c, d$). Дакле, у овом случају нема решења.

У случају $p = 2$ важи $2^2 = -(1 + i)^4$, па је бар један од $z - 2, w - 2$ дељив са $(1 + i)^2 = 2i$, а тада опет $2 \mid a, b$ или $2 \mid c, d$.

Најзад, ако је $p \equiv 1 \pmod 4$, онда је p сложен број у $\mathbb{Z}[i]$, тј. $p = \pi\bar{\pi}$ за неко $\pi = m + ni$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тада је $p^2 = \pi^2\bar{\pi}^2$, па како $z - p$ и $w - p$ нису дељиви са $\pi\bar{\pi} = p$, мора бити $z - p \in \{\pm\pi^2, \pm\bar{\pi}^2, \pm i\pi^2, \pm i\bar{\pi}^2\}$, што даје четири позитивна (и четири негативна) решења.

4. Одговор је $1010 \cdot 1011$. Овај број се достиже за низ $0, \dots, 0, 2021, 0, \dots, 0$, где је члан 2021 на 1010-тој позицији.

Остаје да докажемо да тражених поднизова не може бити више од $1010 \cdot 1011$. Означимо $S_0 = 0$ и $S_k = a_1 + \cdots + a_k$ за $k = 1, 2, \dots, n$. Уведимо граф G чија су темена бројеви $0, 1, \dots, 2020$, а темена i и j $(i < j)$ су спојена граном ако је $S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j = 2021$. Тражени поднизови одговарају гранама графа G.

Приметимо да у графу G нема циклуса непарне дужине. Заиста, ако је $n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1} \equiv n_1$ циклус, онда је разлика $S_{n_{i+1}} - S_{n_i} = \pm 2021$ непарна за све i, па број k мора бити паран. Закључујемо да је G бипартитан граф. Ако његове партиције имају x и $2021 - x$ темена, онда је број грана највише $x(2021 - x) < \lfloor \frac{2021^2}{4} \rfloor = 1010 \cdot 1011$.

5. Можемо да сматрамо да је $n = n_0$ непаран број. За $i \geqslant 1$, од броја n_{i-1} добиће се број n_i такав да је $2^{r_i} n_i = 3^{s_i} n_{i-1} + 1$ за неке $r_i, s_i > 0$. Комбиновањем ових једнакости за $1 \leqslant i \leqslant k$, услов $n_k = 1$ можемо записати као

$$m = 2^{a_{k-1}} 3^{b_0} + 2^{a_{k-2}} 3^{b_1} + \cdots + 2^{a_0} 3^{b_{k-1}}, \qquad (*)$$

где су $a_0 = b_0 = 0$, $a_i = r_1 + \cdots + r_i$, $b_i = s_k + \cdots + s_{k+1-i}$ и $m = 2^{a_k} - 3^{b_k} n$.

Лема. Сваки природан број m се може представити у облику $(*)$ за неке целе бројеве $0 \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1}$ и $0 \leqslant b_0 < b_1 < \cdots < b_{k-1}$.

Доказ. Користимо индукцију по m с базом $m = 1 = 2^0 3^0$. Претпоставимо да је $n > 1$ и да тврђење важи за свако $m < n$.

(1°) Ако $2 \mid n$, довољно је наћи одговарајуће представљање броја $\frac{1}{2}n$ и сваки сабирак помножити са 2.

(2°) Ако $2 \nmid n$, одаберимо $b = \lfloor \log_3 n \rfloor$. Како је $0 \leqslant \frac{1}{2}(n-3^b) < 3^b$, довољно је наћи одговарајуће представљање броја $\frac{1}{2}(n-3^b)$, помножити сабирке са 2 и додати 3^b. $\square$

Да бисмо обезбедили да важе и услови $a_{k-1} < a_k$ и $b_{k-1} < b_k$, довољно је да одаберемо a_k и b_k тако да важи $0 < m = 2^{a_k} - 3^{b_k}n < 3^{b_k}$, тј. $b_k + \log_3 n < a_k \log_3 2 < b_k + \log_3(n+1)$. Овакав одабир је могућ због ирационалности броја $\log_3 2$: заиста, за неко a_k важи $\{\log_3 n\} < \{a_k \log_3 2\} < \{\log_3(n+1)\}$.

Најзад, за овако одабране a_k и b_k, бројеве a_i и b_i $(0 \leqslant i < k)$ налазимо по Леми за $m = 2^{a_k} - 3^{b_k}n$ и узимамо $r_i = a_i - a_{i-1}$ и $s_i = b_{k+1-i} - b_{k-i}$.

6. Може се сматрати да f слика скуп $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ остатака по модулу $m = 10^{10}$ у себе. Означавамо $f^k = f \circ \cdots \circ f$ (f примењено k пута). Функција f је сурјективна, тј. пермутација скупа $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: заиста, ако је $y = f(x)$ у слици f, онда је то и $y - 1 = f^2(x-1)$. Индукцијом по n се показује да важи

$$f^k(x+n) = f^{k \cdot 2^n}(x) + n. \qquad (\spadesuit)$$

База $n = 1$ следи поновљеном применом једнакости из задатка, док је корак индукције $f^k(x+n) = f^{2k}(x+n-1) + 1 = f^{2k \cdot 2^{n-1}}(x) + (n-1) + 1 = f^{k \cdot 2^n}(x) + n$.

Нека је $1 \leqslant d \leqslant m$ најмањи природан број такав да за неко r важи $f^r(0) = -d$. По $(\spadesuit)$, за $a \leqslant 0$ важи $f^{2^{-a}r}(a) = a - d$. Индукција по k даје

$$f^{2^{-a}e_k}(a) = a - kd, \quad \text{где је} \quad e_k = r(1 + 2^d + \cdots + 2^{(k-1)d}) = r \cdot \frac{2^{kd}-1}{2^d - 1}. \qquad (\diamondsuit)$$

То значи да $a - kd$ припада орбити елемента a за свако k, па због минималности броја d важи $m = \ell d$ за неко ℓ и све орбите имају дужину ℓ. Како $(\spadesuit)$ даје $f^{2^m}(x) = f(x)$, имамо и $\ell \mid 2^m - 1$, па је ℓ непарно, тј. $\ell = 5^t$ и $d = 2^{10}5^{10-t}$ за неко $0 \leqslant t \leqslant 10$. Због $(\diamondsuit)$, експоненти e_n за $n = 1, 2, \ldots, \ell$ дају све остатке по модулу ℓ, па мора бити $(r, \ell) = 1$. Према томе, за свако x важи

$$f(x) = x - kd, \quad \text{где је } k = k(x) \text{ такво да је} \quad e_k \equiv 2^x \pmod{\ell}. \qquad (\heartsuit)$$

За дато $\ell = 5^t$, за број r има $\varphi(\ell)$ могућности. Остаје да покажемо да за сваку од њих $(\heartsuit)$ одређује по једну функцију f. По Леми о дизању експонента је $v_5(2^{nd}-1) = v_5(2^d-1) + v_5(n)$, па $\ell \mid e_n$ ако и само ако $\ell \mid n$, што значи да бројеви e_n чине потпун систем остатака по модулу ℓ, тј. $(\heartsuit)$ добро дефинише функцију. Најзад, важи $f(x) = x - kd$ и $f(f(x)) = f(x) - jd = x - (k+j)d$, где су j и k такви да је $e_k \equiv 2^x$ и $e_j \equiv 2^{x-kd} \pmod{\ell}$, а тада је $e_{k+j} = e_k + 2^{kd}e_j \equiv 2^{x+1} \pmod{\ell}$, па је и услов задатка испуњен: $f(x+1) = f(f(x)) + 1 = x + 1 - (k+j)d$.

Према томе, укупан број посматраних функција f је $\sum_{s=0}^{10} \varphi(5^t) = 5^{10}$.