Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Први дан

25. мај 2021.

1. Доказати да за сваки непаран природан број n постоје реални бројеви a_1, $a_2, \ldots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ такви да је полином

$$P(x,y,z) = x^n + y^n + z^n + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k x^k y^k z^{n-2k}$$

дељив полиномом $x+y+z$.

2. Нека је D произвољна тачка на страници BC троугла ABC. Тачке E и F на полуправим CA и BA редом су такве да је $CD = CE$ и $BD = BF$. Праве BE и CF се секу у тачки P. Доказати да, када тачка D варира дуж странице BC, све праве PD имају заједничку тачку.

3. Дат је прост број p. Колико има уређених четворки (a,b,c,d) природних бројева који нису дељиви са p и задовољавају једначине

$$ac + bd = p(a+c) \quad \text{и} \quad bc - ad = p(b-d)?$$

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ НА МЕЂУНАРОДНОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Други дан

26. мај 2021.

4. Ако је $a_1, a_2, \ldots, a_{2020}$ низ целих бројева, колико највише може бити поднизова облика $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 2020)$ са збиром чланова 2021?

5. На природним бројевима могу се спроводити следеће операције: ако је број паран, он се дели са 2, а ако је непаран, множи се неким степеном броја 3 (већим од 3^0) и затим увећава за 1. Доказати да се, за ма који почетни број $n \in \mathbb{N}$, поновљеном применом оваквих операција може добити број 1.

6. Дат је скуп $S = \{1, 2, \ldots, 10^{10}\}$. Колико има пресликавања $f : S \to S$ таквих да важи
$$f(x+1) \equiv f(f(x)) + 1 \pmod{10^{10}} \quad \text{за свако } x \in S?$$
(За $x = 10^{10}$ подразумевамо да је $f(x+1) = f(1)$.)

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.