



EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: Serbian

Day: 1

nedelja, 11.4.2021.

Zadatak 1. Broj 2021 je *fantastičan*. Ako je za bilo koji prirodan broj m neki element skupa $\{m, 2m + 1, 3m\}$ fantastičan, onda su svi elementi tog skupa fantastični. Da li iz navedenog sledi da je broj 2021^{2021} fantastičan?

Zadatak 2. Odrediti sve funkcije $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ takve da jednakost

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

važi za sve racionalne brojeve x i y .

Napomena: Sa \mathbb{Q} označavamo skup svih racionalnih brojeva.

Zadatak 3. Neka je ABC trougao sa tupim uglom kod temena A . Neka su E i F preseči spoljne simetrale ugla kod temena A sa visinama trougla ABC iz B i C , redom. Neka su M i N tačke na dužima EC i FB , redom, tako da $\angle EMA = \angle BCA$ i $\angle ANF = \angle ABC$. Dokazati da tačke E , F , N , M pripadaju jednoj kružnici.

Language: Serbian

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.

Da bi takmicenje proteklo u fer uslovima, molimo vas da ne pominjete zadatke na internetu ili društvenim mrežama do utorka 13.04. u 14:00.



EGMO 2021
GEORGIA
KUTAISI

Language: Serbian

Day: 2

ponedeljak, 12.4.2021.

Zadatak 4. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC i neka je D proizvoljna tačka na stranici BC . Neka prava koja sadrži tačku D i ortogonalna je na BI seče CI u tački E . Neka prava koja sadrži tačku D i ortogonalna je na CI seče BI u tački F . Dokazati da tačka simetrična tački A u odnosu na pravu EF pripada pravoj BC .

Zadatak 5. U ravni je izabrana posebna tačka O koju zovemo koordinatni početak. Neka je P skup koji sadrži 2021 tačku u ravni tako da važi

- (i) nikoje tri tačke iz P ne leže na istoj pravoj, i
- (ii) nikoje dve tačke iz P ne leže na pravoj koja prolazi kroz koordinatni početak.

Trougao čija su temena iz skupa P je *debeo* ako je tačka O u strogoj unutrašnjosti tog trougla. Naći maksimalan broj debelih trouglova.

Zadatak 6. Da li postoji nenegativan ceo broj a za koji jednačina

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ima više od milion različitih rešenja (m, n) , gde su m i n prirodni brojevi?

Napomena: Izraz $\lfloor x \rfloor$ označava ceo deo realnog broja x . Tako je, na primer, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ i $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Language: Serbian

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.

Da bi takmicenje proteklo u fer uslovima, molimo vas da ne pominjete zadatke na internetu ili društvenim mrežama do utorka 13.04. u 14:00.