ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 14. новембар 2020.

1. У свакој од 4 боје има по 6 оловака. Свако од шесторо деце је добило по 4 оловке. За које најмање k увек можемо одабрати k деце и украсти њихове оловке тако да у свакој боји имамо бар по једну?

2. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да је $a^2+f(a)f(b)$ дељиво са $f(a)+b$ за све природне бројеве a и b.

3. У троуглу ABC ($AB \neq AC$) тачка M је средиште странице AB, а N је средиште лука BAC описаног круга. Симетрала угла BAC сече описани круг троугла AMN у тачки $K \neq A$. Доказати да је $KA = KC$.

4. Нека су a, b и c три различита реална броја. Наћи најмању могућу вредност израза

$$\left|\frac{a}{b-c}\right| + \left|\frac{b}{c-a}\right| + \left|\frac{c}{a-b}\right|$$

ако она постоји, као и све тројке (a, b, c) за које се та вредност достиже.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

1. Означимо боје бројевима од 1 до 4. Ако је распоред оловка међу децом

$$(1,1,1,1),\quad (2,2,2,2),\quad (3,3,3,3),\quad (1,1,4,4),\quad (2,2,4,4),\quad (3,3,4,4),$$

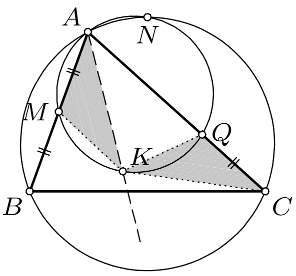
свако дете има само једну од боја $1,2,3$, па нам треба бар троје деце.

С друге стране, $k=3$ је довољно: бар једно дете има оловке у две боје, а преостале две боје наћи ћемо код двоје друге деце.

2. Замена $a=b=1$ даје $f(1)+1 \mid f(1)^2+1 \equiv 2 \pmod{f(1)+1}$, па мора бити $f(1)=1$. Сада за $a=1$ имамо $b+1 \mid f(b)+1$. Дакле, $f(b) \equiv -1 \pmod{b+1}$, те је $f(b) \geqslant b$.

С друге стране, за $b=f(a)$ полазна релација даје $2f(a) \mid a^2+f(a)f(f(a))$, одакле $f(a) \mid a^2$. Међутим, имамо $\frac{a^2}{f(a)} \equiv \frac{1}{-1} = -1 \pmod{a+1}$, па је $\frac{a^2}{f(a)} \geqslant a$. Како је и $f(a) \geqslant a$, једино је могуће да је $f(a)=a$.

3. Одаберимо тачку Q на полуправој CA тако да је $CQ=AM$. Из $NC=NB$ и $\sphericalangle NCQ = \sphericalangle NBM$ следи да су троуглови NCQ и NBM подударни. Одавде је $\sphericalangle NQA = \sphericalangle NMA$, па тачка Q лежи на кругу AMN. Најзад, како је $\sphericalangle CQK = 180^\circ - \sphericalangle KQA = \sphericalangle AMK$ и притом $CQ=AM$ и $KQ=KM$, следи да је $\triangle CQK \cong \triangle AMK$ и одатле $CK=AK$.



4. Ако означимо $x=\frac{a}{b-c}$, $y=\frac{b}{c-a}$ и $z=\frac{c}{a-b}$, имамо $x-1=\frac{a-b+c}{b-c}$, $x+1=\frac{a+b-c}{b-c}$ итд, одакле закључујемо да је

$$(x-1)(y-1)(z-1)=(x+1)(y+1)(z+1), \quad \text{тј.} \quad xy+yz+zx=-1.$$

Тада је $|xy|+|yz|+|zx| \geqslant 1$, одакле следи

$$\big(|x|+|y|+|z|\big)^2 = (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)+2(|xy|+|yz|+|zx|) \geqslant 0+2+2=4,$$

тј. $|x|+|y|+|z| \geqslant 2$.

Једнакост важи само ако је $x+y+z=0$. Како је $|x|+|y|+|z| = \pm x \pm y \pm z = 2$, сабирањем следи да је један од бројева x,y,z, рецимо z, једнак ± 1.

- Ако је $z=1$, то значи да је $a=b+c$ и одатле $y=-1$, па мора бити $x=0$, тј. $a=0$.
- Слично, ако је $z=-1$, добићемо $b=a+c$, $x=1$ и $y=0$, тј. $b=0$.

Према томе, најмања вредност датог израза је 2 и достиже се када је један од бројева једнак нули и збир преостала два је нула.