Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. април 2021.

Први разред – А категорија

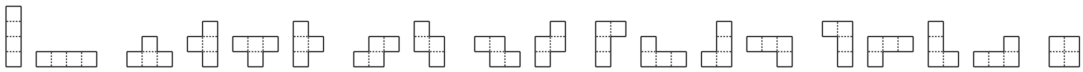
1. Бројеви $1, 2, 3, 4, 4, 5, 9, 16, 25$ уписани су у таблицу 3×3 неким редом. Означимо са P_i производ бројева у i-тој врсти. Одредити најмању могућу вредност збира $P_1 + P_2 + P_3$.

2. Одредити све тројке природних бројева (x, y, z) такве да је сваки од бројева

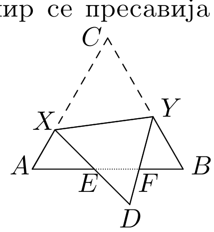
$$x^2 - 1, \quad y^2 - 2 \quad \text{и} \quad z^2 - 4$$

дељив збиром $x + y + z$.

3. На слици су приказане тетромине, при чему две тетромине које се разликују за ротацију или рефлексију сматрамо различитим. Да ли се од ових тетромина транслацијом може саставити правоугаоник?



4. Дат је лист папира у облику једнакостраничног троугла ABC. Папир се пресавија по некој дужи XY, где тачке X и Y редом леже на страницама CA и CB. При томе се теме C слика у тачку D, а дужи DX и DY редом секу дуж AB у тачкама E и F. Да ли је могуће одабрати тачке X и Y тако да површине троуглова AEX, EFD и FBY буду једнаке, али да праве XY и AB не буду паралелне?



Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. април 2021.

Други разред – А категорија

1. Дати су природан број n и реални бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ различити од нуле. Сваком непразном подскупу A скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ придружен је количник $\frac{P(A)}{|P(A)|}$, где $P(A)$ означава производ свих елемената скупа A. Доказати да збир свих придружених бројева (по свим могућим подскуповима A) није мањи од -1. Када се достиже једнакост?

2. Наћи све природне бројеве n који се могу представити у облику

$$n = a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a,$$

где су a, b и c природни бројеви.

3. Дат је природан број n. У свако поље квадратне табле $2n \times 2n$ уписана је стрелица која је усмерена налево, надесно, нагоре или надоле. Четири поља A_1, A_2, A_3 и A_4 чине *циклус* ако њихови центри чине (недегенерисани) правоугаоник и при томе се од поља A_i до поља A_{i+1} може стићи кретањем у смеру стрелице у пољу A_i (где је $A_5 \equiv A_1$). Наћи највећи могући број циклуса.

4. У унутрашњости једнакостраничног троугла ABC уочен је једнакостраничан троугао $A_1B_1C_1$. При томе су A и A_1 са различитих страна праве B_1C_1, B и B_1 са различитих страна праве C_1A_1, а C и C_1 са различитих страна праве A_1B_1. Ако је $\sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle C_1BA_1 = \sphericalangle A_1CB_1$, доказати да се тежишта троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ поклапају.

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. април 2021.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је природан број $n \geqslant 2$. Потребно је обојити све непразне подскупове скупа $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ у две боје тако да следећи услов буде испуњен:

> Сваки подскуп $A \subseteq N$ са бар два елемента може се представити као унија неколико подскупова боје различите од боје скупа A.

Колико различитих бојења постоји?

2. Ако су $c_0, c_1, \ldots, c_8$ различити бројеви из скупа $\{1, 2, \ldots, 9\}$, доказати да важи

$$\sin c_0^\circ \cdot \sin(10^\circ + c_1^\circ) \cdot \sin(20^\circ + c_2^\circ) \cdots \sin(80^\circ + c_8^\circ) \leqslant \frac{\sqrt{10}}{512}.$$

3. Са $\omega(x)$ означавамо број различитих простих делилаца природног броја x.

Нека су a, b и c произвољни природни бројеви. Доказати да постоји природан број n такав да је

$$\omega(an + c) \geqslant \omega(bn + c).$$

4. Оштроугли троугао ABC је уписан у кружницу Γ. Приписана кружница Ω овог троугла наспрам темена A, са центром I_a, сече кружницу Γ у тачкама K и L. Кружнице AI_aL и AI_aK секу кружницу Ω редом у тачкама $G \neq L$ и $H \neq K$. Доказати да је права GH паралелна правој BC.

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

27. април 2021.

Четврти разред – А категорија

1. Дата је таблица $n \times m$. Означимо са (i, j) поље i-те врсте и j-те колоне. Нека поља ове таблице су обојена тако да, кад год су $1 \leqslant a < b \leqslant n$ и $1 \leqslant c < d \leqslant m$, бар једно од поља (a, c), (a, d) и (b, c) није обојено. Колико највише може бити обојених поља?

2. Дат је природан број $n > 1$. Да ли постоје два различита n-тоцифрена природна броја x и y чије су све цифре у декадном запису у скупу $\{1, 2, 3\}$ и за које је $x - y$ дељиво са 3^n?

3. У троуглу ABC, симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки D. Симетрала дужи AD сече праву BC у тачки E. Кружница Γ са центром E садржи теме A и сече описану кружницу k троугла ABC у тачки $F \neq A$. Права AF сече праву BC у тачки P. Тачка Q на кружници Γ унутар троугла ABC је таква да је $\sphericalangle QBC = \sphericalangle QAB$. Ако се праве CQ и AB секу у тачки R, доказати да тачке A, C, P и R леже на истој кружници.

4. Дат је непаран природан број n. Доказати да је збир свих решења једначине

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} nx = 2$$

у интервалу $(-\pi/2, \pi/2)$ једнак $\pi/4$.

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. мај 2021.

Први разред – Б категорија

1. При дељењу полинома $P(x)$ полиномом

$$Q(x) = 2x^{2021} - x^2 - 3x + 2$$

добија се остатак $R(x) = 23x^2 + 5x + 2021$.

Одредити збир свих коефицијената полинома $P(x)$.

2. На колико начина се бројеви

$$23^{2020},\ 5^{2020},\ 2021^{2020},\ 23^{2021},\ 5^{2021},\ 2021^{2021},\ 23^{2022},\ 5^{2022},\ 2021^{2022}$$

могу распоредити у таблицу 3×3 тако да производ бројева у свакој врсти, свакој колони и обема дијагоналама даје остатак 1 при дељењу са 3?

3. Нека су $2, 3, 5, 7, \ldots, p_n$ првих n простих бројева. Може ли се одабрати природан број $n \geqslant 3$ тако да производ

$$(2+1)! \cdot (3+1)! \cdot (5+1)! \cdot (7+1)! \cdots (p_n+1)!$$

буде квадрат природног броја?

4. На свакој од 100 карата на столу написан је по један природан број. Испоставило се да, ма како одабрали природан број $k \leqslant 100$ и узели k карата са стола, збир вредности на тим картама имаће збир цифара једнак k. Колико најмање може да износи збир бројева на свим картама на столу?

5. Дат је правилан шестоугао $ABCDEF$. На страницама AB и CD редом дате су тачке X и Y такве да је

$$AX : XB = CY : YD = 3 : 1.$$

Симетрала дужи XY сече страницу EF у тачки Z. У ком односу тачка Z дели дуж EF?

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. мај 2021.

Други разред – Б категорија

1. Колико има природних бројева $n \geqslant 2$ за које важи неједнакост

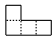
$$\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<2021?$$

2. Реални бројеви a, b и c задовољавају услове

$$c>0, \quad a-2b+4c<0, \quad a^5+a^2b+c=0.$$

Доказати да је $b>a+c$.

3. Правоугаона табла $m\times n$, где су m и n природни бројеви и m је непаран, поплочана је фигурама следећа два типа, састављеним од четири јединична квадрата:

K :  и L :  ,

при чему се фигуре могу обртати и окретати. Доказати да је употребљено бар $\frac{n}{2}$ фигура типа L.

4. У конвексном четвороуглу површине $\frac{1}{3}$ једна дијагонала дели другу у односу $2:1$. Доказати да се овај четвороугао може прекрити троуглом површине $\frac{1}{2}$.

5. Постоје ли цифре a и b ($a\neq 0$) такве да је број $\overline{abbabbaabaab}$ у декадном запису квадрат природног броја?

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. мај 2021.

Трећи разред – Б категорија

1. Одредити најмањи природан број n за који је тачна неједначина

$$\sin 1 < \log_3 \sqrt{n^2-2}.$$

(Аргумент синуса на левој страни неједнакости је у радијанима.)

2. Браћа Дуле и Марко наследили су парцелу у облику петоугла $ABCDE$ са бунаром у тачки F. Геометар Бојан измерио је да темена имају координате $A(-10,-10)$, $B(10,-10)$, $C(20,20)$, $D(10,30)$ и $E(-30,30)$, док бунар има координате $F(0,0)$.

Дуле и Марко траже од Бојана да подели парцелу правом линијом на два дела једнаких површина, али тако да линија деобе садржи бунар (како би обојица имала приступ). Одредити бар један начин на који то Бојан може учинити - другим речима, наћи једначину линије деобе и координате тачака у којима она сече границу парцеле.

3. У скупу реалних бројева решити систем једначина

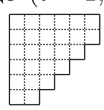
$$\begin{cases} x^4+6x^2y^2+y^4 = x^3+y^3+4x^2+4y^2+x+y-1, \\ x^2+y^2 = \frac{3}{4}(x+y)+2. \end{cases}$$

4. Колико има уређених парова природних бројева (a,b) за које важи

$$\text{нзд}(a,b)^{\text{нзс}(a,b)} \cdot \text{нзс}(a,b)^{\text{нзд}(a,b)} = 2020^{2021}?$$

5. *Крња табла реда* n за $n \geqslant 3$ је квадратна табла $n \times n$ из чије је i-те врсте одоздо ($i=1,2,\ldots,n-2$) уклоњено $n-1-i$ поља здесна.

Наћи све вредности n за које је крњу таблу реда n могуће попунити природним бројевима од 1 до $n^2-(1+2+\cdots+(n-2))$ тако да збир бројева у свим врстама и свим колонама буде исти.



крња табла
реда 6

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. мај 2021.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да за свако $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи неједнакост

$$\frac{x - \mathrm{tg}x}{\sin x - x} > 2.$$

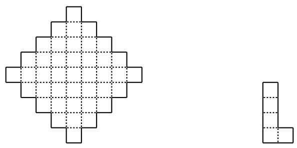
2. Наћи све комплексне бројеве z такве да за сваки природан број n важи $|z| \geqslant |z^n - 2|$.

3. Дата је пирамида $SABC$ запремине 1. Тачке A', B' и C' на ивицама SA, SB и SC редом су такве да је $A'B' \parallel AB$, $BC \parallel B'C'$ и $C'A' \parallel CA$. Тачке A'', B'' и C'' у равни троугла ABC су такве да је $A'B'C'A''B''C''$ призма. Одредити највећу могућу запремину ове призме.

4. *Дијамант* реда n је водоравно и усправно осносиметрична фигура која се састоји од $2n+1$ редова са $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2n+1, 2n-1, \ldots, 5, 3, 1$ јединичних квадратића. *Удица* дужине k ($k \geqslant 2$) је фигура која се добија од правоугаоне колоне $k \times 1$ додавањем једног квадратића у последњој врсти. Удице је дозвољено окретати и обртати.

(а) Доказати да се дијамант реда n не може поплочати удицама дужине 2 ни за једно n.

(б) Постоје ли природни бројеви n и $k > 2$ за које је могуће поплочати дијамант реда n удицама дужине k?



дијамант реда 4 удица дужине 4

5. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) за које важи

$$a^{a!} + b^{b!} = 21c^2 + 17.$$

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.