38. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кипар (онлајн) – 8. септембар 2021.

1. У троуглу ABC важи $AB < AC$. Кружница ω пролази кроз тачке B и C и садржи тачку A у унутрашњости. Тачке X и Y на кружници ω су такве да је $\sphericalangle BXA = \sphericalangle AYC$. При томе су тачке X и C са различитих страна праве AB, а тачке Y и B са различитих страна праве AC.

Доказати да за све могуће положаје тачака X и Y на кружници ω праве XY имају заједничку тачку. *(Уједињено Краљевство)*

2. Одредити све функције $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ такве да за све $x,y\in(0,+\infty)$ важи

$$f(x+f(x)+f(y)) = 2f(x)+y.$$

(Грчка)

3. Нека су a, b и c природни бројеви за које важи једнакост

$$(a,b)+[a,b] = 2021^c.$$

Ако је $|a-b|$ прост број, доказати да је број $(a+b)^2+4$ сложен.

(Са (m,n) се означава највећи заједнички делилац, а са $[m,n]$ најмањи заједнички садржалац природних бројева m и n.) *(Србија)*

4. У Миљановом складишту у почетку има 100 гомила са по 100 комада отпада. Сваког јутра Миљан чини један од следећих потеза:

(1°) уклања сав отпад са једне гомиле;

(2°) уклања по један комад отпада са сваке гомиле.

Међутим, сваке вечери зли ђубретар се ушуња у складиште и чини један од следећих потеза:

(I) додаје по један комад отпада на сваку непразну гомилу;

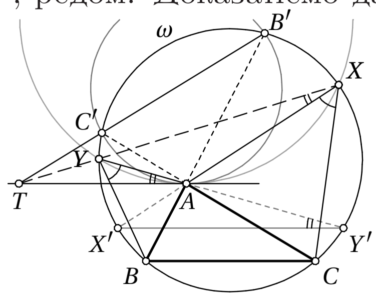
(II) прави нову гомилу са једним комадом отпада.

Колико најмање потеза треба Миљану да би уклонио сав отпад из складишта независно од потеза злог ђубретара? *(Уједињено Краљевство)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Означимо са p праву кроз тачку A паралелну правој BC. Нека праве BA, CA, XA и YA поново секу кружницу ω у тачкама B', C', X', Y', редом. Доказаћемо да је тражена тачка пресек T правих $B'C'$ и p.



Из $\sphericalangle BYY' = \sphericalangle X'XC$ следи $BY' = X'C$, па је $BCX'Y'$ једнакокраки трапез и $X'Y' \parallel BC$. Сада је $\sphericalangle YAT = \sphericalangle YY'X' = \sphericalangle YXA$, што значи да права p додирује кружницу XAY у тачки A.

Аналогно ($\sphericalangle C'AT = \sphericalangle C'CB = \sphericalangle C'B'A$), права p додирује и кружницу $B'AC'$ у тачки A, те је $TB' \cdot TC' = TA^2$. Следи да тачка T има једнаку потенцију у односу на кружнице ω и XAY, што значи да она лежи на њиховој радикалној оси, тј. правој XY.

2. За произвољне $x, y > 0$ посматрајмо број $z = x + f(x) + f(y)$. При томе је $f(z) = 2f(x) + y$, па заменом $y = z$ у дату једначину $(*)$ добијамо

$$f(y+D) = f(y) + D, \quad \text{где је} \quad D = x + 3f(x). \tag{$\spadesuit$}$$

С друге стране, замена $x = z$ у $(*)$ даје $f(y + 2f(y) + D) = 4f(x) + 3y$, што због $(\spadesuit)$ постаје

$$f(y + 2f(y)) = 3y + f(x) - x \quad \text{за све } x, y > 0.$$

Како лева страна не зависи од x, закључујемо да је $f(x) - x = c$ константно, тј. $f(x) = x + c$. Једноставном провером следи да је функција $f(x) = x$ једино решење.

3. Сматраћемо да је $a - b = p > 0$. Број $d = (a, b)$ дели $a - b = p$, па је $d = 1$ или $d = p$. Како d дели $[a, b] + (a, b) = 2021^c = 43^c \cdot 47^c$, мора бити $d = 1$ или $d = p \in \{43, 47\}$.

(1°) Прво испитајмо случај $(a, b) = 1$. Тада је $(a, b) + [a, b] = ab + 1 = 2021^c$.

Познато нам је да сваки прост број $q \equiv 1 \pmod 4$ има тачно једно представљање у облику збира два квадрата (до на поредак). Међутим, ако је c парно, онда број

$$(a+b)^2 + 4 = (a-b)^2 + 4 \cdot 2021^c$$

има два таква представљања (приметимо да је $a - b \neq 2$), те зато мора бити сложен.

Остаје случај непарног c. Тада имамо $ab = 2021^c - 1 \equiv 1 \pmod 3$, одакле је $a \equiv b \pmod 3$, тј. $3 \mid p$. Следи да је $p = 3$ и $2021^c = ab + 1 = a^2 - 3a + 1$ и одатле $(2a-3)^2 = 4 \cdot 2021^c + 5 \equiv 5 \pmod{43}$. Међутим, ово је немогуће јер 5 није квадратни остатак по модулу 43: заиста, $\left(\frac{5}{43}\right) = \left(\frac{43}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1$.

(2°) Нека је сада $(a, b) = a - b = p \in \{43, 47\}$. Ако је $a = px$, онда је $b = p(x-1)$ и

$$2021^c = (a, b) + [a, b] = p + px(x-1) = p(x^2 - x + 1).$$

Међутим, број $x^2 - x + 1$ не може бити дељив са 47 (заиста, у супротном је $(2x-1)^2 \equiv -3 \pmod{47}$, а то је немогуће јер је $\left(\frac{-3}{47}\right) = \left(\frac{47}{-3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$). Зато је једина могућност $c = 1$, $p = 47$ и $x^2 - x + 1 = 43$. Тада је $x = 7$, $a = 7 \cdot 47$ и $b = 6 \cdot 47$, а тада је број $(a+b)^2 + 4 = (13 \cdot 47)^2 + 4 \equiv 0 \pmod 5$ сложен.

4. Гомилу ћемо звати *малом* ако се састоји од само једног комада отпада, а *великом* у супротном.

(а) Миљан у првом потезу уклања једну гомилу, остављајући још 99 гомила. Следећа стратегија омогућиће му да у највише два потеза смањи број гомила за један. Овако ће очистити складиште најкасније 199-тог јутра.

(1°) Ако ђубретар допуни све постојеће гомиле, Миљан уклања једну гомилу.

(2°) Ако ђубретар направи једну малу гомилу, Миљан уклања једну од старих гомила. Наредне вечери, ако ђубретар направи још једну малу гомилу, Миљан уклања са сваке по један комад отпада; ако пак ђубретар само допуни постојеће гомиле, Миљан уклања једну. Овако у сваком случају остаје највише $n-1$ гомила.

(б) С друге стране, ако једне ноћи има n великих гомила, ђубретар може да обезбеди да две ноћи касније буде $n-1$ великих гомила. Пошто „нулте” ноћи има 100 великих гомила, Миљан неће очистити складиште пре 199-тог потеза.

(1°) Ако Миљан ујутру уклони са сваке гомиле по један комад, ђубретар их изнова допуњује. Сада опет има n великих гомила.

(2°) Ако Миљан ујутру уклони једну гомилу, ђубретар прави једну малу гомилу. Наредног јутра, ако Миљан уклони још једну гомилу, ђубретар допуњује све гомиле; ако пак Миљан са сваке гомиле уклони по један комад (тиме остаје бар $n-1$ гомила), ђубретар на сваку додаје по један комад. Тако у оба случаја има бар $n-1$ великих гомила.

Према томе, одговор је 199.