

Среда, 8. септембар 2021.

1. задатак.

У троуглу ABC важи $AB < AC$. Кружница ω пролази кроз тачке B и C и садржи тачку A у унутрашњости. Тачке X и Y на кружници ω су такве да је $\sphericalangle BXA = \sphericalangle AYC$. При томе су тачке X и C са различитих страна праве AB , а тачке Y и B са различитих страна праве AC .

Доказати да за све могуће положаје тачака X и Y на кружници ω праве XY имају заједничку тачку.

2. задатак.

Одредити све функције $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да за све $x, y \in (0, +\infty)$ важи

$$f(x + f(x) + f(y)) = 2f(x) + y.$$

3. задатак.

Нека су a , b и c природни бројеви за које важи једнакост

$$(a, b) + [a, b] = 2021^c.$$

Ако је $|a - b|$ прост број, доказати да је број $(a + b)^2 + 4$ сложен.

(Са (m, n) се означава највећи заједнички делилац, а са $[m, n]$ најмањи заједнички садржалац природних бројева m и n .)

4. задатак.

У Миљановом складишту у почетку има 100 гомила са по 100 комада отпада. Сваког јутра Миљан чини један од следећих потеза:

(1°) уклања сав отпад са једне гомиле;

(2°) уклања по један комад отпада са сваке гомиле.

Међутим, сваке вечери зли ђубретар се ушуња у складиште и чини један од следећих потеза:

(I) додаје по један комад отпада на сваку непразну гомилу;

(II) прави нову гомилу са једним комадом отпада.

Колико најмање потеза треба Миљану да би уклонио сав отпад из складишта независно од потеза злог ђубретара?

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 10 бодова.