16^{th} International Zhautykov Olympiad in Mathematics

Almaty , January 8-14, 2020

Први дан – 10.1.2020.

1. Природан број n је такав да број $2^a 3^b + 1$ није дељив са n ни за које природне бројеве a и b. Доказати да ни број $2^c + 3^d$ није дељив са n ни за које природне бројеве c и d.

2. Изабрано је $2k+1$ различитих 7-елементних подскупова датог 20-елементног скупа тако да сваки од њих има непразан пресек са тачно k других изабраних подскупова. За које највеће $k \in \mathbb{N}$ је ово могуће?

3. Конвексан шестоугао $ABCDEF$ је уписан у круг. Доказати неједнакост

$$AC \cdot BD \cdot CE \cdot DF \cdot EA \cdot FB \geqslant 27 \cdot AB \cdot BC \cdot CD \cdot DE \cdot EF \cdot FA.$$

Други дан – 11.1.2020.

4. Тачка I је центар уписаног круга неједнакокраког троугла ABC. Симетрала угла код темена C сече страницу AB у тачки N и поново сече описани круг троугла ABC у тачки M. Права ℓ је тангента на уписани круг троугла ABC паралелна правој AB и различита од ње. Тачка R на правој ℓ је таква да је $CI \perp IR$. Описани круг троугла MNR поново сече праву IR у тачки S. Доказати да је $AS = BS$.

5. Са $\mathbb{Z}$ означавамо скуп свих целих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да важи

$$f(4x + 3y) = f(3x + y) + f(x + 2y)$$

за све целе бројеве x и y.

6. Дат је природан број $n > 2$. Нека поља квадратне табле $n \times n$ су црна, а остала бела. У свако бело поље уписан је број црних поља која с њим имају бар једно заједничко теме. Наћи највећу могућу вредност збира свих уписаних бројева.

Време за рад: 270 минута сваког дана.

Сваки задатак вреди 7 поена.