Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

14. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Први дан

24. август 2020.

1. Наћи све моничне полиноме $P(x)$ такве да је полином $P(x)^2 - 1$ дељив полиномом $P(x+1)$. *(Душан Ђукић)*

2. Дат је конвексан полиедар са бар 5 темена у чијем се сваком темену састају тачно по три ивице. Доказати да је могуће доделити сваком темену тог полиедра неки рационалан број тако да буду задовољени следећи услови:

(i) бар један од додељених бројева је једнак 2020;

(ii) за сваку страну полиедра, производ бројева у свим теменима те стране је једнак 1. *(Бојан Башић са сарадницима)*

3. Дат је троугао ABC. Тачке D и E на правој AB су такве да је $AD = AC$ и $BE = BC$, уз распоред $D - A - B - E$. Описане кружнице троуглова DBC и EAC секу се у тачки $X \neq C$, а описане кружнице троуглова DEC и ABC секу се у тачки $Y \neq C$. Ако важи $DY + EY = 2XY$, одредити $\sphericalangle ACB$. *(Милош Милосављевић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

14. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Други дан

25. август 2020.

4. У трапезу $ABCD$ чији унутрашњи углови нису прави, дијагонале AC и BD секу се у тачки E. Нека су P и Q редом подножја нормала из темена A и B на праве BC и AD. Описане кружнице троуглова CEQ и DEP секу се у тачки $F \neq E$. Доказати да се праве AP, BQ и EF секу у једној тачки или су паралелне. *(Душан Ђукић)*

5. За природан број n, са $v_2(n)$ означавамо највећи цео број $k \geqslant 0$ такав да $2^k \mid n$. Претпоставимо да функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задовољава услове:

(i) $f(x) \leqslant 3x$ за све $x \in \mathbb{N}$;

(ii) $v_2\big(f(x) + f(y)\big) = v_2(x + y)$ за све $x, y \in \mathbb{N}$.

Доказати да за сваки природан број a постоји тачно један природан број x такав да је $f(x) = 3a$. *(Душан Ђукић)*

6. Дат је природан број k. Посматрајмо следећу игру на бесконачној једнодимензионалној табли. На почетку игре, на поља постављамо укупно n жетона, при чему може бити више жетона на истом пољу. Након тога, у сваком потезу извршавамо једну од следећих операција:

(1°) бирамо два суседна поља која су оба непразна и са једног од њих преносимо све жетоне на друго;

(2°) бирамо поље са бар два жетона и са њега премештамо по један жетон k поља улево и k поља удесно.

(а) Ако је $n \leqslant k+1$, доказати да ће се извршити само коначно много потеза.

(б) За које вредности k се може одабрати n и поставити n жетона тако да буде могућ бесконачан низ потеза? *(Никола Пет̄ровић)*

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

РЕШЕЊА

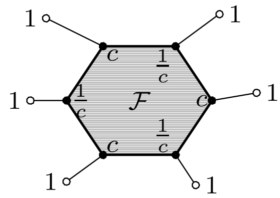
1. Једина решења су полиноми $P(x) = 1$ и $P(x) = x - c$, где је c константа.

Ако је P неконстантан полином, запишимо га као $P(x) = (x-c)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, при чему је c она нула полинома P која има најмањи реалан део.

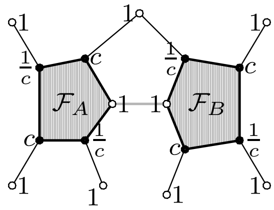
По услову задатка, $x+1-c$ дели $P(x)^2-1$, па је $P(c-1) = \pm 1$. С друге стране, како је $1 = |P(c-1)| = \prod_{i=2}^{n} |c-1-x_i|$, а $|c-1-x_i| \geqslant 1$ по избору нуле c, мора бити $|c-1-x_i| = 1$ за све i, што је могуће само ако је $x_i = c$ за све i. Следи да је $P(x) = (x-c)^n$. Међутим, $P(x+c)^2 - 1 = x^{2n} - 1$ није дељиво са $P(x+c+1) = (x+1)^n$ ако је $n \geqslant 2$, па је једина могућност $n = 1$.

Напомена. Ако се искључи услов моничности, има и нетривијалних решења. На пример, до на замену променљиве x са $x+c$, (једина) решења степена 3 и 4 су $P(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}(x^3 - 3x^2 + 8x)$, односно $P(x) = \frac{1}{36}(x^4 - 2x^3 - x^2 - 10x - 12)$ и $P(x) = \frac{i\sqrt{2}}{36}(x^4 - 2x^3 + 8x^2 - x + \frac{33}{4})$, док решења степена 2 нема.

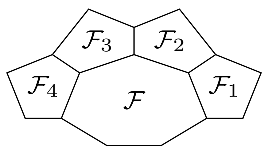
2. Означимо $c = 2020$. Прво размотримо случај када постоји страна $\mathcal{F}$ са парним бројем темена. Тада је довољно доделити теменима стране $\mathcal{F}$ наизменично бројеве c и $\frac{1}{c}$, а свим осталим теменима полиедра број 1. Заиста, производ бројева на страни $\mathcal{F}$ је једнак 1, а свака друга страна или дели ивицу са страном $\mathcal{F}$ (а на њој је производ 1) или нема ниједно заједничко теме са $\mathcal{F}$ (тада су сви бројеви на њој јединице).



Надаље сматрамо да све стране имају непаран број темена. Посматрајмо две дисјунктне стране полиедра $\mathcal{F}_A$ и $\mathcal{F}_B$ и темена A и B на њима, редом, тако да је AB ивица полиедра. Теменима ових двеју страна, изузев A и B, доделићемо наизменично бројеве c и $\frac{1}{c}$ као на слици, а свим осталим теменима полиедра број 1. И у овом случају се лако види да је услов задатка испуњен.



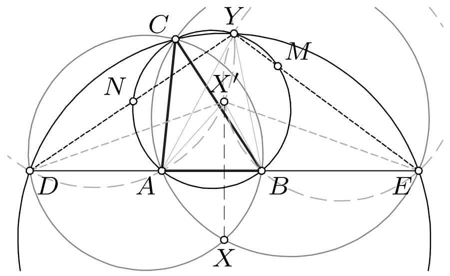
Најзад, уверимо се да се овакве стране $\mathcal{F}_A$ и $\mathcal{F}_B$ увек могу наћи. Постоји страна $\mathcal{F}$ која није троугао (иначе би дати полиедар био тетраедар). Посматрајмо четири узастопне њој суседне стране $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}_4$. Ако су стране $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_3$ дисјунктне, узмимо њих, а ако нису, онда оне имају заједничку целу ивицу, па три стране $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_3$ и $\mathcal{F}$ чине појас који раздваја $\mathcal{F}_2$ од $\mathcal{F}_4$, те у том случају можемо узети $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_4$.



Напомена. Делује примамљиво поставити систем линеарних једначина по логаритмима уписаних бројева, јер он има више једначина него непознатих, што гарантује постојање нетривијалног целобројног решења. Ипак, да би уписани бројеви били рационални, једна од променљивих у том решењу мора бити једнака ± 1, што није јасно зашто се може постићи.

3. Нека је I_c центар приписаног круга $\triangle ABC$ наспрам темена C. Тада је AI_c

симетрала угла CAD, одакле је $\triangle I_cAD \cong \triangle I_cAC$. Следи да је $\sphericalangle I_cDB = \sphericalangle I_cDA = \sphericalangle I_cCA = \sphericalangle I_cCB$, па I_c лежи на кругу BCD. Слично, I_c лежи на кругу ACE, што значи да је $X \equiv I_c$. Такође, како је $XD = XC$ и аналогно $XE = XC$, тачка X је центар круга $CDEY$.



Даље, $\sphericalangle DYA = \sphericalangle CYA - \sphericalangle CYD = \sphericalangle CBA - \sphericalangle CED = \sphericalangle CED = \sphericalangle CXA = \sphericalangle DXA$ и слично $\sphericalangle EYB = \sphericalangle EXB$. Зато посматрајмо тачку X' симетричну тачки X у односу на AB. Због $\sphericalangle DX'A = \sphericalangle DYA$ ова тачка лежи на кругу ADY, а аналогно и на кругу BEY.

Ако је $\sphericalangle C < 60^\circ$, онда је $\sphericalangle AX'B = \sphericalangle AXB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle C > \sphericalangle C = \sphericalangle AYB$, па тачка X' лежи унутар $\triangle ABY$, а самим тим и унутар $\triangle DEY$. Следи да је $DY + EY > DX' + EX' = DX + EX = 2XY$. Слично, ако је $\sphericalangle C > 60^\circ$, тачка Y лежи унутар $\triangle DEX$, те је тада $DY + EY < 2XY$. Према томе, ако је $DY + EY = 2XY$, мора бити $\sphericalangle C = 60^\circ$, а тада је $X' \equiv Y$ па заиста важи једнакост.

Друго решење. Углове троугла ABC означавамо уобичајено са α, β, γ. Као у првом решењу, тачке C, D, E, Y леже на кругу са центром X. Такође, због $\sphericalangle CYD = \sphericalangle CED = \frac{\beta}{2}$, права DY садржи средиште N лука AC круга ABC.

Означимо $\sphericalangle YDE = x$ и $\sphericalangle YED = y$. Услов $DY + EY = 2XY$ даје $\sin x + \sin y = \sin x + \sin(90^\circ - \frac{\gamma}{2} - x) = 1$, тј.

$$\left(1 - \sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin x + \cos\frac{\gamma}{2}\cos x = 1. \qquad (*)$$

С друге стране, синусна теорема у $\triangle ADN$ даје $2\sin x \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos(\frac{\alpha-\gamma}{2} - x)$, одакле следи $\operatorname{tg} x = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}$. Одавде налазимо

$$\sin x = \frac{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sqrt{3 - 2\cos\gamma + 4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\varphi}}, \quad \cos x = \frac{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sqrt{3 - 2\cos\gamma + 4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\varphi}},$$

где је $\varphi = \alpha + \frac{\gamma}{2} - 90^\circ = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Заменом у једначину $(*)$ добијамо

$$2\cos\frac{3\gamma - 180^\circ}{4}\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{3 - 2\cos\gamma + 4\sin\frac{\gamma}{2}\cos\varphi},$$

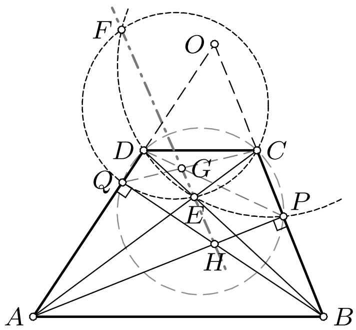
што се након квадрирања своди на

$$\cos\varphi = \frac{2 - 2\cos\gamma - \sin\frac{3\gamma}{2}}{1 - 4\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{3\gamma}{2}} = \frac{-3t + 4t^2 + 4t^3}{1 - t - 4t^3}, \quad \text{где је} \quad t = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ако је $\gamma \neq 60^\circ$, скраћивање $2t - 1 \neq 0$ даје $\cos\varphi = -\frac{2t^2+3t}{2t^2+t+1} < 0$, што је немогуће. Према томе, мора бити $\gamma = 60^\circ$.

4. Случај када је $AD \parallel BC$ је једноставан. Наиме, тада је E средиште дијагонале AC, те је $EA = EC = EP$, а слично важи и $EB = ED = EQ$. Одатле следи да су кругови CEQ и DEP симетрични у односу на симетралу дужи CP и DQ, те је $EF \perp CP$, тј. $EF \parallel AP \parallel BQ$.

Означимо са O тачку пресека правих AD и BC. Троуглови OAP и OBQ су слични, па је $\frac{OP}{OQ} = \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC}$, тј. $OC \cdot OP = OD \cdot OQ$, одакле следи да тачке C, D, P и Q леже на неком кругу γ.



Нека се праве AP и BQ секу у тачки H, а праве DP и CQ у тачки G. Како је $GC \cdot GQ = GD \cdot GP$, тачка G има једнаку потенцију у односу на кругове CEQ и DEP, па она лежи на њиховој радикалној оси EF. С друге стране, тачке E, G и H су колинеарне на основу Папосове теореме за тројке тачака B, C, P и A, D, Q. Следи да су све четири тачке H, E, G и F колинеарне.

5. Заменом $x = y$ добијамо $v_2(f(x)) = v_2(x)$. Ако је $v_2(a) = k > 0$, посматрањем функције $g(x) = f(2^k x)/2^k$ тврђење сводимо на случај непарног a. Зато надаље сматрамо да $2 \nmid a$.

Приметимо да, ако је $x \not\equiv y \pmod{2^k}$, онда је $f(x) \not\equiv f(y) \pmod{2^k}$. Заиста, ако је $z \equiv -x \pmod{2^k}$, онда $2^k \nmid z + y$, па је $f(y) \not\equiv -f(z) \equiv f(x) \pmod{2^k}$. Одавде такође следи да је функција f инјективна.

Нека је $2^{k-1} < 3a < 2^k$, где је $k \in \mathbb{N}$. Како су $f(1), f(3), \dots, f(2^k - 1)$ међусобно различити по модулу 2^k, постоји непаран број $x < 2^k$ такав да је $f(x) \equiv 3a \pmod{2^k}$. Претпоставимо да је $f(x) \neq 3a$. Тада је $f(x) > 2^k$, па из $f(x) + f(2^k - x) \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$ следи да је $f(x) + f(2^k - x) \geqslant 3 \cdot 2^k$. Међутим, с друге стране је $f(x) + f(2^k - x) \leqslant 3(x + (2^k - x)) = 3 \cdot 2^k$, па је то могуће једино ако је $f(x) = 3x$. Одавде је $x \equiv a \pmod{2^k}$, па је $x = a$, тј. опет је $f(x) = 3a$.

6. **(a)** Потезе врсте (1°) зваћемо *скупљањем*, а потезе врсте (2°) *сејањем*. Поља нумеришемо редом бројевима $\dots, -1, 0, 1, 2, \dots$. Поља се могу поделити на k класа по модулу k, тако да при сејању жетони не мењају своју класу.

Претпоставимо прво да у једној од класа нема ниједног жетона. Поља ове класе деле таблу на блокове дужине $k-1$, које опет нумеришемо целим бројевима. Како приликом скупљања ниједан жетон не излази из свог блока, унутар сваког блока може се извршити само коначно много узастопних скупљања. С друге стране, при сваком сејању се из неког блока i пребацује по један жетон у блокове $i-1$ и $i+1$. Овако се задатак своди на следећи.

Лема. Нека се у сваком кораку бира i и из блока i премешта по један жетон у блокове $i-1$ и $i+1$. Тада се игра завршава у коначно много корака.

Доказ. Кад год нека два суседна блока x и $x+1$ по први пут размене жетон, доделимо овом жетону број x. Приликом сваке следеће размене између ових двају блокова можемо сматрати да се размењује тај исти жетон. Овако сваки жетон само циркулише између два суседна блока. Следи да ће највише n парова блокова икада разменити жетоне. Међутим, ако неки блок сеје жетоне бесконачно много пута, онда то мора да важи и за суседне блокове (иначе би се у њима гомилало бесконачно много жетона), а индукцијом и за све блокове, што је немогуће. $\square$

Остаје случај када се ниједна класа поља никад не испразни. Тада се увек у једној класи налазе два жетона, а у осталима по један. Сејања и скупљања се врше из класе са два жетона. Нека се у неком тренутку сеје са поља p у i-тој класи (на коме су два жетона) на поља $p-k$ и $p+k$. Следи скупљање, и то без смањења општости удесно ка $(i+1)$-тој класи - са поља $p\pm k$ на поље $p\pm k+1$. Затим се из овог поља сеје на поља $p+1$ и $p\pm 2k+1$. Следи скупљање из $(i+1)$-те класе, али не у i-ту, јер је у њој једини жетон остао на пољу $p\mp k$. Дакле, сада се скупља у $(i+2)$-ту класу. Закључујемо да се наизменично сеје и скупља, при чему се класа из које се сеје и скупља циклично помера за један удесно. Може се сматрати без умањења општости да је жетон који се скупља увек исти - назовимо га *црним*. Црни жетон периодично учествује у сејању из сваке класе, дакле са свим осталим жетонима.

При сваком сејању црни жетон баца други жетон k поља на једну страну, а себе k поља на другу. Тако се у сваком циклусу од k сејања позиција најлевљег жетона помера бар k поља улево, а најдешњег бар k поља удесно, те се опсег игре увећава за бар $2k$. Међутим, у току једног циклуса црни жетон не може прећи пут дужи од $k(k+1)$, па након $\frac{k+1}{2}$ циклуса он више не може стићи од најлевљег до најдешњег, што је коначна контрадикција.

(б) За свако k даћемо пример периодичне (и самим тим бесконачне) игре. Посматрајмо $5k-1$ узастопних поља означених редом бројевима $1,\dots,5k-1$ и поставимо на поље $2k$ *катапулт* са $2km$ жетона ($m\in\mathbb{N}$; видећемо да нам треба $m\geqslant 2k-2$), на поље $3k$ *амбар* са $(k+1)m$ жетона, а на поље $2k+i$ за $i=1,\dots,k-1$ још $2i$ жетона. Поља k, $2k$, $3k$ и $4k$ су уоквирена.

$$-,-,\dots,-\ \boxed{-}\ -,-,\dots,-\ \boxed{2km}\ 2,4,\dots,2k-2\ \boxed{(k+1)m}\ -,-,\dots,-\ \boxed{-}\ -,-,\dots,-$$

Почињемо сејањем km пута из катапулта. Даље потезе делимо на блокове.

$$-,-,\dots,-\ \boxed{km}\ -,-,\dots,-\ \boxed{-}\ 2,4,\dots,2k-2\ \boxed{(2k+1)m}\ -,-,\dots,-\ \boxed{-}\ -,-,\dots,-$$

За $i=0,1,\dots,k-1$, $(i+1)$-ти блок се састоји из следећих операција:

- прво скупљамо жетоне са поља $2k,\dots,k+i+1$ на поље $k+i$, а са поља $4k,\dots,3k+i+1$ на поље $3k+i$ (осим за $i=0$, када су ова поља празна):

$$1,2,\dots,i-1,-,\dots,-\ \boxed{km}\qquad\boxed{-}\ 2,4,\dots,2i-2,0,2,\dots,2k-2-2i\ \boxed{(2k+1-2i)m}\qquad\boxed{-}\ 1,2,\dots,i-1,-,\dots,-$$
$$\overbrace{m+k-3,m+k-6,\dots,m+k-3i+3,m+k-i,-,\dots,-}\qquad\overbrace{m+k-3,m+k-6,\dots,m+k-3i+3,m+k-i,-,\dots,-}$$

- затим сејемо m пута из амбара и по једном из свих поља $2k+i+1,\dots,3k-1$ (са изузетком $i=k-1$, када је то празан скуп);
- најзад, сејемо i пута са поља $k+i$ и $3k+i$:

$$1,2,\dots,i,-,\dots,-\ \boxed{km}\qquad\boxed{m}\ 2,4,\dots,2i,0,2,\dots,2k-4-2i\ \boxed{(2k-1-2i)m}\qquad\boxed{m}\ 1,2,\dots,i,-,\dots,-$$
$$\overbrace{m+k-3,m+k-6,\dots,m+k-3i,1,\dots,1}\qquad\overbrace{m+k-3,m+k-6,\dots,m+k-3i,1,\dots,1}$$

Преостаје да након k-тог блока скупимо жетоне са поља $1,\dots,2k-1$ на поље $2k$, а са поља $5k-1,\dots,3k+1$ на поље $3k$. Добијена конфигурација је идентична полазној, те се игра може настављати до бесконачности.