Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

14. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Први дан

24. август 2020.

1. Наћи све моничне полиноме $P(x)$ такве да је полином $P(x)^2 - 1$ дељив полиномом $P(x+1)$.

2. Дат је полиедар са бар 5 темена у чијем се сваком темену састају тачно по три ивице. Доказати да је могуће доделити сваком темену тог полиедра неки рационалан број тако да буду задовољени следећи услови:

(i) бар један од додељених бројева је једнак 2020;

(ii) за сваку страну полиедра, производ бројева у свим теменима те стране је једнак 1.

3. Дат је троугао ABC. Тачке D и E на правој AB су такве да је $AD = AC$ и $BE = BC$, уз распоред $D - A - B - E$. Описане кружнице троуглова DBC и EAC секу се у тачки $X \neq C$, а описане кружнице троуглова DEC и ABC секу се у тачки $Y \neq C$. Ако важи $DY + EY = 2XY$, одредити $\sphericalangle ACB$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

14. СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Други дан

25. август 2020.

4. У трапезу $ABCD$ чији унутрашњи углови нису прави, дијагонале AC и BD секу се у тачки E. Нека су P и Q редом подножја нормала из темена A и B на праве BC и AD. Описане кружнице троуглова CEQ и DEP секу се у тачки $F \neq E$. Доказати да се праве AP, BQ и EF секу у једној тачки или су паралелне.

5. За природан број n, са $v_2(n)$ означавамо највећи цео број $k \geqslant 0$ такав да $2^k \mid n$. Претпоставимо да функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задовољава услове:

(i) $f(x) \leqslant 3x$ за све $x \in \mathbb{N}$;

(ii) $v_2\big(f(x) + f(y)\big) = v_2(x + y)$ за све $x, y \in \mathbb{N}$.

Доказати да за сваки природан број a постоји тачно један природан број x такав да је $f(x) = 3a$.

6. Дат је природан број k. Посматрајмо следећу игру на бесконачној једнодимензионалној табли. На почетку игре, на поља постављамо укупно n жетона, при чему може бити више жетона на истом пољу. Након тога, у сваком потезу извршавамо једну од следећих операција:

(1°) бирамо два суседна поља која су оба непразна и са једног од њих преносимо све жетоне на друго;

(2°) бирамо поље са бар два жетона и са њега премештамо по један жетон k поља улево и k поља удесно.

(а) Ако је $n \leqslant k+1$, доказати да ће се извршити само коначно много потеза.

(б) За које вредности k се може одабрати n и поставити n жетона тако да буде могућ бесконачан низ потеза?

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 бодова.