12-то такмичење „Румунски мастер из математике“

Први дан: Букурешт - петак, 28. фебруар 2020.

Language: Serbian

1. задатак. Дат је троугао ABC са правим углом у темену C. Означимо са I центар уписаног круга ω троугла ABC, а са D подножје висине из темена C. Круг ω додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама A_1, B_1 и C_1. Тачке E и F су редом симетричне тачки C у односу на праве C_1A_1 и C_1B_1. Тачке K и L су редом симетричне тачки D у односу на праве C_1A_1 и C_1B_1.

Доказати да описане кружнице троуглова A_1EI, B_1FI и C_1KL имају заједничку тачку.

2. задатак. Нека су $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_N)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N)$ низови ненегативних целих бројева, где је $N \geqslant 2$ природан број. За сваки цео број $i \notin \{1, \ldots, N\}$ дефинишемо $a_i = a_k$ и $b_i = b_k$, где је $k \in \{1, \ldots, N\}$ такво да је $i - k$ дељиво са N. За низ $\mathbf{a}$ кажемо да је $\mathbf{b}$-*хармонијски* ако за сваки члан a_i важи

$$a_i = \frac{1}{2b_i + 1} \sum_{s=-b_i}^{b_i} a_{i+s}.$$

Претпоставимо да је низ $\mathbf{a}$ $\mathbf{b}$-хармонијски и да је низ $\mathbf{b}$ $\mathbf{a}$-хармонијски, при чему ниједан од низова $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ није константан.

Доказати да је међу бројевима $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ бар $N + 1$ бројева једнако нули.

3. задатак. Дат је природан број $n \geqslant 3$. У некој земљи постоји n градова и n авиокомпанија које у понуди имају двосмерне директне линије између неких парова градова. При томе, за сваку авиокомпанију постоји m различитих градова $c_1, \ldots, c_m$, где је $m \geqslant 3$ непаран број, тако да су сви летови те авиокомпаније они између градова c_1 и c_2, c_2 и c_3, $\ldots$, c_{m-1} и c_m, c_m и c_1.

Доказати да постоји затворена кружна путања која се састоји од непарног броја летова који сви припадају међусобно различитим авиокомпанијама.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сата.

12-то такмичење „Румунски мастер из математике“

Други дан: Букурешт - субота, 29. фебруар 2020.

Language: Serbian

4. задатак. Подскуп A скупа $\mathbb{N}$ називамо *безбирним* ако, кад год су x и y елементи скупа A (не нужно различити), збир $x+y$ не припада скупу A.

Одредити све сурјективне функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да, кад год је A безбиран подскуп скупа $\mathbb{N}$, његова слика $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ је такође безбиран скуп.

(Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ је *сурјективна* ако за сваки природан број n постоји природан број m такав да је $f(m) = n$.)

5. задатак. *Решетка* у координатној равни је скуп свих тачака чије су обе координате цели бројеви. *Многоугао на решетки* је многоугао чија сва темена припадају решетки.

Нека је Γ конвексан многоугао на решетки. Доказати да постоји конвексан многоугао Ω на решетки који садржи многоугао Γ, при чему сва темена многоугла Γ леже на граници многоугла Ω и тачно једно теме многоугла Ω није теме многоугла Γ.

6. задатак. Са $F(n)$ означавамо највећи прост делилац природног броја $n \geqslant 2$. *Чудан пар* је пар различитих простих бројева p и q такав да не постоји природан број $n \geqslant 2$ за који важи $F(n)F(n+1) = pq$.

Доказати да постоји бесконачно много чудних парова.

Сваки задатак вреди 7 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сата.