## ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ТАКМИЧЕЊУ „Romanian Master of Mathematics”

**26. јануар 2020.**

**1.** Дат је природан број $n$. Доказати да за произвољне реалне бројеве $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{2n}$ важи неједнакост

$$a_1a_{n+1} + a_2a_{n+2} + \cdots + a_na_{2n} \leqslant \frac{1}{4n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})^2.$$

**2.** Троугао $ABC$ у коме је $AB = AC$ уписан је у круг над пречником $AM$. Тачке $D$, $E$ и $F$ су дате редом на страницама $BC$, $AC$ и $AB$ тако да је четвороугао $AEDF$ паралелограм. Симетрала угла $EDF$ и права $MD$ секу праву $EF$ редом у тачкама $P$ и $Q$. Доказати да тачке $B$, $C$, $P$ и $Q$ леже на истом кругу.

**3.** Наћи најмањи природан број $k$ за који важи следеће тврђење:

Ако је $G$ прост повезан граф са 2020 темена у коме свако теме има степен бар 3, онда се од сваког темена до сваког другог може стићи путем дужине највише $k$.

**4.** Означимо са $\sigma_2(n)$ збир квадрата свих делилаца природног броја $n$. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева $n$ таквих да $n \mid \sigma_2(n)$.

Време за рад 270 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

## РЕШЕЊА

**1.** Посматрајмо квадратне триноме $P_i(x) = (x - a_i)(x - a_{i+n})$ за $i = 1, \dots, n$ и

$$P(x) = P_1(x) + \dots + P_n(x) = nx^2 - (a_1 + \dots + a_{2n})x + a_1a_{n+1} + \dots + a_na_{2n}.$$

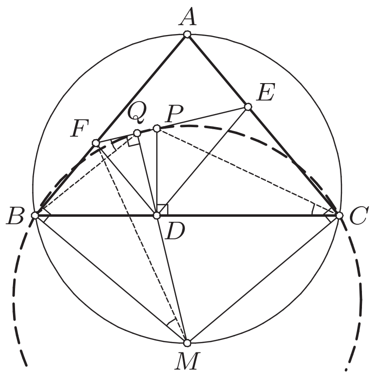
Треба доказати да је дискриминанта

$$D = (a_1 + \dots + a_{2n})^2 - 4n(a_1a_{n+1} + \dots + a_na_{2n})$$

полинома $P(x)$ ненегативна, тј. да $P(x)$ има реалну нулу. То јесте тачно, јер за $a_n \leqslant x \leqslant a_{n+1}$ важи $P_i(x) \leqslant 0$ за све $i$, и самим тим $P(x) \leqslant 0$.

*Друго решење.* $\sum_{i=1}^n a_ia_{n+i} = a_n\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_i(a_{n+i} - a_n) \leqslant a_n\sum_{i=1}^n a_i + a_n\sum_{i=1}^n(a_{n+i} - a_n) = \frac{1}{n}na_n(S - na_n) \leqslant \frac{1}{4n}S^2$, где је $S = \sum_{i=1}^{2n} a_i$.

**2.** Нека је $P$ између тачака $E$ и $Q$. Из $\triangle FBD \sim \triangle EDC \sim \triangle ABC$ следи да је $CE = DE$ и $BF = DF$. Како је $ME^2 - MF^2 = (MC^2 + CE^2) - (MB^2 + BF^2) = CE^2 - BF^2 = DE^2 - DF^2$, важи $MD \perp EF$, тј. $MD \perp FP$. Такође је $CD \perp DP$ и $CM \perp AC \parallel DF$, па су троуглови $CMD$ и $DFP$слични. Одавде је $\frac{CD}{DP} = \frac{CM}{DF} = \frac{MB}{BF}$, па су и правоугли троуглови $CDP$ и $MBF$ слични. Према томе, $\sphericalangle BCP = \sphericalangle BMF$.

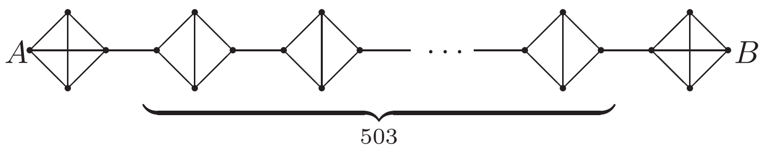



С друге стране, како је $\sphericalangle MQF = 90^\circ = \sphericalangle MDF$, четвороугао $BMQF$ је тетиван, па је $\sphericalangle BQF = \sphericalangle BMF = \sphericalangle BCP$, тј. $\sphericalangle BQP = 180^\circ - \sphericalangle BCP$, што значи да је $BCPQ$ тетиван четвороугао.

*Друго решење.* Ако је $EF \parallel BC$, онда је $P \equiv Q$ и тврђење је тривијално. Нека се сада праве $EF$ и $BC$ секу у тачки $K$.

Као и у првом решењу, имамо $ME^2 - MF^2 = (MC^2 + CE^2) - (MB^2 + BF^2) = CE^2 - BF^2 = DE^2 - DF^2$, па је $MD \perp EF$, тј. $\sphericalangle KQD = \sphericalangle KDP = 90^\circ$. Одавде је $\triangle KQD \sim \triangle KDP$ и $KP \cdot KQ = KD^2$. С друге стране, по Талесовој теореми имамо $\frac{KB}{KD} = \frac{KF}{KE} = \frac{KD}{KC}$, па је $KD^2 = KB \cdot KC$. Дакле, $KP \cdot KQ = KB \cdot KC$, одакле следи тврђење.

**3.** Одговор је $k = 1512$. Овај број се достиже у примеру на слици за темена $A$ и $B$.



Докажимо тврђење за $k = 1512$. Нека је $s = A_0A_1A_2\dots A_n$ најкраћи пут од темена $A = A_0$ до $B = A_n$. За $1 \leqslant i \leqslant n-1$ теме $A_i$ је, осим са $A_{i-1}$ и $A_{i+1}$, повезано с још бар једним теменом $B_i$. Темена $A_0$ и $A_n$ су, осим са $A_1$ и $A_{n-1}$, повезана с још бар два темена: $B_0$ и $C_0$, односно $B_n$ и $C_n$.

Ниједно од темена $B_i$, $C_0$ или $C_n$ не поклапа се са $A_j$ за $j < i-1$ или $j > i+1$, јер би се у супротном пут $s$ могао скратити. Слично, свих $[\frac{n-3}{3}]+4$ темена $B_0, C_0, B_3, B_6, \dots, B_{3[\frac{n-3}{3}]}, B_n, C_n$ су међусобно различита, иначе би се пут $s$ могао скратити. Све у свему, граф $G$ има бар $n+1+[\frac{n-3}{3}]+4 \geqslant \frac{4n+10}{3}$ темена. Следи да је $\frac{4n-10}{3} \leqslant 2020$, тј. $n \leqslant 1512$.

**4.** За $n = p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ имамо

$$\sigma_2(n) = \sum_{(\forall i) r_i \leqslant \alpha_i} p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k} = \prod_{i=1}^{k}(1+p_i^2+\cdots+p_i^{2\alpha_i}).$$

Примећујемо и да је функција $\sigma_2$ мултипликативна, тј. $\sigma_2(ab) = \sigma_2(a)\sigma_2(b)$ кад год је нзд$(a,b) = 1$.

Број $n = 10$ задовољава услов задатка јер $10 \mid \sigma_2(10) = 130$. Показаћемо да из било ког решења $n$ можемо добити веће, одакле ће следити тврђење.

Са $v_p(x)$ означавамо највеће $i$ такво да $p^i \mid x$. Како је $\sigma_2(n) > n^2$, постоји прост број $p$ такав да је $v_p(n) = r$ и $v_p(\sigma_2(n)) > 2r$, тј. $p^{r+1} \mid \sigma_2(n)/n$. Нека је $n = p^r m$, $p \nmid m$. Пошто је $\sigma_2(p^{2r+1}) = (p^{2r+2}+1)\sigma_2(p^r)$, имамо

$$p^{r+1}n \mid \sigma_2(n) = \sigma_2(p^r)\sigma_2(m) \mid \sigma_2(p^{2r+1})\sigma_2(m) = \sigma_2(p^{2r+1}m) = \sigma_2(p^{r+1}n),$$

па је и број $p^{r+1}n$ решење. Овим је доказ завршен.