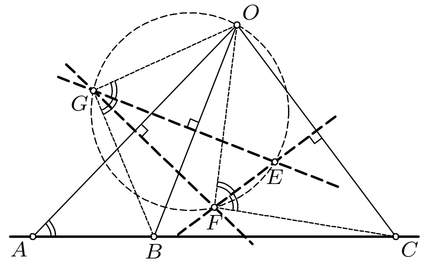
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА 2019/2020.

Решења

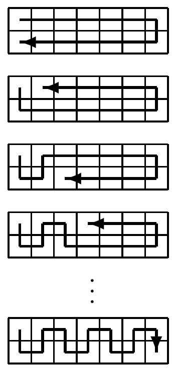
1A.1. Не умањујући општост, претпостављамо да је тачка B између A и C. Темена троугла EFG су центри описаних кругова троуглова OBC, OAC и OAB - нека су то редом тачке E, F и G. Тада је $\sphericalangle OGE = \frac{1}{2}\sphericalangle OGB = \sphericalangle OAB = \sphericalangle OAC = \frac{1}{2}\sphericalangle OFC = \sphericalangle OFE$, одакле следи тврђење задатка.



Друго решење. Средишта A', B' и C' дужи OA, OB и OC, редом, су колинеарна. Како су A', B' и C' подножја нормала из O на странице троугла EFG, тврђење задатка следи из *теореме о Симсоновој правој*:

- Подножја нормала из тачке P на странице троугла ABC су колинеарна ако и само ако P лежи на описаној кружници $\triangle ABC$.

1A.2. Докажимо индукцијом по n да змија има тачно n могућих путања. Ово је тривијално тачно за $n = 1$. Претпоставимо да тврђење важи за таблицу $2 \times (n-1)$, где је $n > 1$, и посматрајмо таблицу $2 \times n$. Разликујемо два случаја:



(1°) Ако у првом кораку змија иде десно, она у другом не сме ићи доле, дакле опет иде десно; у трећем кораку мора да настави десно, итд. до горњег десног поља таблице. Тако у овом случају змија има само једну могућу путању.

(2°) Ако у првом кораку змија иде доле, онда у другом иде десно. Надаље змија треба да обиђе сва поља преостале таблице $2 \times (n-1)$ полазећи из угаоног поља, а по индуктивној претпоставци она то може извести на $n - 1$ начина.

Према томе, змија има укупно $(n - 1) + 1 = n$ могућих путања.

1A.3. Нека је $A = \{3, X, Y\}$. Како $3 \notin \mathcal{P}(A)$, оба елемента X и Y морају се налазити у $\mathcal{P}(A)$, тј. морају бити подскупови скупа A. Пошто не може да важи истовремено $X \in Y$ и $Y \in X$, сматраћемо без смањења општости да $Y \notin X$. Такође, $X \notin X$, па важи $X \subseteq \{3\}$. Даље, пошто $Y \notin Y$, важи $Y \subseteq A \setminus Y = \{3, X\}$. Дакле, имамо следеће могућности.

(1°) $X = \emptyset$. Тада је $Y \subset \{3, \emptyset\}$, а A је један од скупова $\{3, \emptyset, \{3\}\}$, $\{3, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ и $\{3, \emptyset, \{3,\emptyset\}\}$. Сви они задовољавају услов задатка.

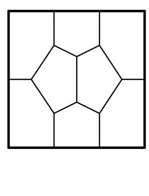
(2°) $X = \{3\}$. Тада је $Y \subset \{3, \{3\}\}$, а A је један од скупова $\{3, \{3\}, \{\{3\}\}\}$, $\{3, \{3\}, \{3,\{3\}\}\}$ и $\{3, \{3\}, \emptyset\}$. Сви они задовољавају услов задатка, али овај трећи нам је већ познат.

Све у свему, задатак има пет решења:

$$\{3, \emptyset, \{3\}\}, \quad \{3, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{3, \{3\}, \{\{3\}\}\}, \quad \{3, \emptyset, \{3,\emptyset\}\}, \quad \{3, \{3\}, \{3,\{3\}\}\}.$$

1A.4. Претпоставимо да такав низ постоји. У том низу мора да постоји број који је дељив са 2^m. Тај број мора бити једнак 2^m, јер би у супротном имао више од m простих фактора. Међутим, тада се у низу мора налазити и бар један од бројева 2^{m-1} и $5 \cdot 2^{m-2}$, а оба имају само по $m - 1$ простих фактора. Ова контрадикција завршава доказ.

1A.5. Могуће је. Једно решење је приказано на слици десно.



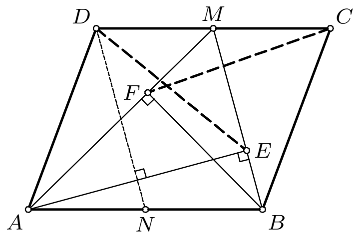
2A.1. Нека су дужине ивица квадра $p+2<q+2<r+2$. Из постојања необојене коцке следи да су $p,q,r>0$. Коцкица са ниједном, једном и две црвене стране тада има редом pqr, $2(pq+pr+qr)$ и $4(p+q+r)$.

По услову задатка важи $4(p+q+r)>2(pq+pr+qr)$. Међутим, ако је $p\geqslant 2$, онда је

$$2p>(pq+pr+qr)-2(q+r)=(p-2)(q+r)+qr>(p-2)\cdot 2p+p^2,$$

тј. $4p>3p^2$, што је немогуће. Дакле, $p=1$. Сада је $2(q+r+1)>q+r+qr$, тј. $qr-q-r<2$ и одатле $(q-1)(r-1)<3$, што као једину могућност даје $q=2$ и $r=3$.

Према томе, дужине ивица квадра су 3, 4 и 5.



2A.2. Нека је N средиште странице AB. Тада је $NB=DM$, па је $BMDN$ паралелограм и отуда $DN\parallel BM$, тј. $DN\parallel BE$. Следи да је DN средња линија у (правоуглом) троуглу ABE, што је уједно и симетрала дужи AE, па је $DE=DA$. Аналогно је $CF=CB$, па како је $CB=DA$, тврђење задатка је доказано.

2A.3. Нека има k плавокапих патуљака којима је претходио зеленокапи. Кад год се неки од ових плавокапих патуљака појавио, ред није био празан - дакле, чекао је неки зеленокапи, а он га је избацио. Следи да је бар k зеленокапих патуљака истерано и одатле $k\leqslant 2$.

Ако је $k=0$, примљене су 4 плаве капе, а за њима највише 4 зелене (неки зелени патуљци могли су бити избачени). У овом случају има 5 могућих распореда.

Ако је $k=1$, примљене су 4 плаве капе у једној или две групе, за шта има 4 могућности (0+4, 1+3, 2+2, 3+1) и једна зелена капа пре последње групе плавих. Остају још највише две зелене капе које су могле бити предате пре или после друге групе плавих, а за то има 6 могућности (2+0, 1+1, 0+2, 1+0, 0+1, 0+0). Ово даје укупно $4\cdot 6=24$ распореда.

Ако је $k=2$, примљене су 4 плаве капе у две или три групе (зашта има 6 могућности) и две зелене капе, по једна пре последње две групе плавих. То даје 6 распореда.

Укупан број могућих распореда капа је $5+24+6=35$.

2A.4. Како је

$$(a+103b)+101(a-b)=2(51a+b)=103(a+b)-(a+101b),$$

из услова задатка следи да је $51a+b$ дељиво са 101 и 103, те је дељиво и са $101\cdot 103=10403$ и одатле $51a+b\geqslant 10403$.

С друге стране, ако је $51a+b=10403$ (нпр. за $a=1$ и $b=10352$), из горњих једнакости одмах следи да $103\mid a+101b$ и $101\mid a+103b$. Према томе, одговор је 10403.

2A.5. Претпоставимо да се скуп A састоји од само четири цифре. Тада збирови по две цифре из A, којих има укупно 10, морају да дају све могуће остатке при дељењу са 10. Међутим, ако у скупу A има k парних и $4-k$ непарних цифара, онда се међу збировима по две цифре из A може наћи највише $k(4-k)\leqslant 4$ непарних, што је контрадикција. Дакле, скуп A садржи бар 5 цифара.

С друге стране, нпр. скуп $A=\{0,1,2,3,6\}$ задовољава услове. Заиста, свака цифра се може написати као збир две цифре из скупа A. Према томе, одговор је 5.

3A.1. Израз је дефинисан за $x\neq 0$ и $x\neq\frac{1}{2}$. Разликоваћемо два случаја.

(1°) $x<0$ или $x>\frac{1}{2}$. Тада је неједначина еквивалентна са $(6-3^{x+1})(2x-1)>10x$, што се своди на

$$f(x)=(1-2x)(3^{x+1}-1)>5.$$

За $x<-1$ или $x>\frac{1}{2}$ важи $f(x)<0$. Остаје да испитамо случај $-1\leqslant x<0$. Тада је $0<3^{x+1}-1<2$, па мора бити $1-2x>\frac{5}{2}$, тј. $x<-\frac{3}{4}$. Међутим, тада је $3^{x+1}-1<\sqrt[4]{3}-1<\frac{1}{3}$, па због $1-2x<3$ следи $f(x)<1$. Дакле, у овом случају нема решења.

(2°) $0 < x < \frac{1}{2}$. У овом случају неједначина се своди на $f(x) < 5$, али на овом интервалу свакако важи $|1-2x| < 1$ и $|3^{x+1}-1| < \sqrt{27}-1 < 5$, па је $f(x) < 5$, тј. свако $x \in (0, \frac{1}{2})$ је решење, а то је и укупно решење задатка.

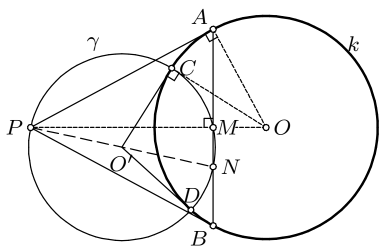
3A.2. Ако је $p = q$, онда је $\frac{p^q+q^p}{pq} = 2p^{p-2}$ паран број.

Нека је $p \neq q$. По Фермаовој теореми је $p^q \equiv p \pmod{q}$, па $pq \mid p^q - p$. Слично, $pq \mid q^p - q$. Дакле, $pq \mid p^q + q^p - p - q$, што је паран број. Како је $p + q < pq$, имамо

$$\left\lfloor \frac{p^q+q^p}{pq} \right\rfloor = \frac{p^q+q^p-p-q}{pq},$$

а то је парно.

3A.3. Означимо са O и O' редом центре кругова k и γ. Троуглови OMA и OAP су слични, па је $OM \cdot OP = OA^2 = OC^2$. Одавде следи да је OC тангента на круг γ. Аналогно је и OD тангента на γ. Према томе, важи $\sphericalangle OCO' = \sphericalangle ODO' = 90^\circ$, што значи да се тангенте на k у тачкама C и D секу у тачки O', тј. средишту дужи NP.



Друго решење. Инверзија у односу на круг k слика тачке M и P једну у другу, па она фиксира круг γ. Следи да су кругови k и γ ортогонални, па се тангенте на k у C и D секу у центру круга γ.

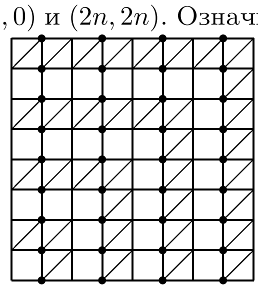
3A.4. *Одговор:* Сви парови (a, b), $1 < a < b$.

Тражени скуп се може конструисати на следећи начин. Узмимо произвољних b природних бројева, нпр. $x_1, x_2, \ldots, x_b$, и означимо

$$N = \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_a \leqslant b} (x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_a}).$$

Тада скуп $\{Nx_1, Nx_2, \ldots, Nx_b\}$ има жељено својство.

3A.5. Нека два наспрамна темена великог квадрата имају координате $(0,0)$ и $(2n, 2n)$. Означимо све тачке (x, y) у којима је $0 < x < 2n$ непарно и $0 \leqslant y \leqslant 2n$. Означено је укупно $n(2n+1)$ тачака. Свака нацртана дијагонала има бар једно теме у означеној тачки, али никоје две немају заједничко теме. Следи да не може бити нацртано више од $n(2n+1)$ дијагонала.

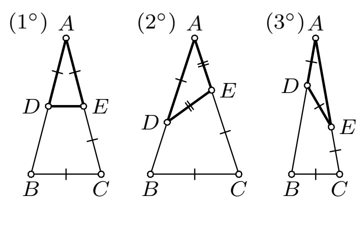


С друге стране, ако нацртамо све дијагонале AB са теменима $A(x, y)$ и $B(x+1, y+1)$ у којима је $\max\{x, y\}$ непарно, то ће бити укупно $n(2n+1)$ дијагонала без заједничких тачака. Заиста, темена $A(x, y)$ у којима је $\max\{x, y\} = k$ има $2k-1$, тако да је укупно нацртано $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n-1) = n(2n+1)$ дијагонала.

4A.1. Означимо $\sphericalangle BAC = \alpha$. Имамо три могућности.

(1°) $AD = AE$. Тада је $AE = CE = BC$, тј. $AC = 2BC$, одакле одмах следи $\alpha = 2 \arcsin \frac{1}{4}$.

(2°) $AE = DE$. Тада је и $BD = DE$. Како је такође $BC = CE$, четвороугао $CBDE$ је делтоид, па је $90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle DBC = \sphericalangle DEC = 180^\circ - \sphericalangle AED = 2\alpha$, па је $\alpha = 36^\circ$.



(3°) $AD = DE$. Ако је M средиште дужи AE, онда је $\sphericalangle AMD = 90^\circ$, па је овај случај еквивалентан са $BD = AE = 2AM = 2AD \cos\alpha$. Даље важи $AB = AD + BD =$

$AD(1+2\cos\alpha) = 2AB(1+2\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2}$. Према томе, $\frac{1}{2} = (1+2\cos\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} = (3-4\sin^2\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{3\alpha}{2}$. Следи да је $\alpha = 20^\circ$ или $\alpha = 100^\circ$, при чему друго решење очигледно отпада.

Дакле, могуће вредности угла BAC су $2\arcsin\frac{1}{4}$, 36° и 20°.

4А.2. Број у i-тој врсти и j-тој колони ($1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant n$) означићемо са $a_{i,j}$. Додефинисаћемо $a_{i,j} = 0$ за све остале парове индекса i, j.

Нека је $d_{i,0} = d_{i,n+1} = 0$ и $d_{i,j} = a_{i-1,j} - a_{i,j} + a_{i+1,j}$ за $1 \leqslant j \leqslant n$. Услов задатка нам даје

$$d_{i,j-1} - d_{i,j} + d_{i,j+1} = 0 \quad \text{за} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \ \text{ и } \ 1 \leqslant j \leqslant n \tag{$*$}$$

и важи

$$a_{1,j} = d_{2,j} + d_{3,j}, \quad a_{2,j} = d_{1,j} + d_{2,j} + d_{3,j}, \quad a_{3,j} = d_{1,j} + d_{2,j}.$$

Ако је $d_{1,1} = d_{2,1} = d_{3,1} = 0$, следи да је $d_{i,j} = 0$ и одатле $a_{i,j} = 0$ за све i, j. Према томе, услов задатка се своди на одабир бројева $d_{i,j}$ који нису сви нула и задовољавају $(*)$. Међутим, из $(*)$ следи да низ $d_{i,j}$ $(j = 0, 1, \dots)$ има облик $0, x, x, 0, -x, -x, 0, x, x, 0, \dots$, па како је $d_{i,n+1} = 0$, то може да не буде нула-низ само ако $3 \mid n+1$.

Према томе, одговор су сви бројеви n облика $n = 3k-1$, $k \in \mathbb{N}$.

4А.3. Растојањем даме од ивице зовемо растојање од центра свог тренутног поља до центра најближег ивичног поља. Доказаћемо индукцијом по k да дама која је на растојању $k \geqslant 1$ од ивице има $8 \cdot 9^{k-1}$ начина да стигне до ивице.

Ако је $k = 1$, дама може доћи до ивице потезом у било ком од 8 могућих смерова, што даје 8 начина. Нека је $k > 1$. Дама има 8 начина да стигне до ивице у једном потезу. Осим тога, за свако $i = 1, \dots, k-1$, има 8 начина да стигне до поља које је на растојању i од ивице, а одатле $8 \cdot 9^{i-1}$ начина до ивице. То јој укупно даје $8 + 8\sum_{i=1}^{k-1} 8 \cdot 9^{i-1} = 8 + 8(9^{k-1} - 1) = 8 \cdot 9^k$ начина, чиме је индукција закључена.

Централно поље је на растојању n од ивице, те тада дама има $8 \cdot 9^{n-1}$ начина.

4А.4. Не умањујући општост, претпоставићемо да је НЗД$(a, b, c, d) = 1$.

Сабирањем датих једначина и одузимањем $2(ab+cd)$ од обеју страна добијамо

$$(a-b)^2 + (c-d)^2 = 3(ab+cd).$$

Одавде следи да су $a-b$ и $c-d$ дељиви са 3, а тада је десна страна дељива са 9, тј. $3 \mid ab + cd \equiv a^2 + c^2 \pmod 3$. Међутим, сада и a и c, а самим тим и b и d, морају бити дељиви са 3, што је противно полазној претпоставци.

4А.5. Нека је $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = x_n a_{n+1}$ за $n \in \mathbb{N}$, где су по услову x_n непарни бројеви. Тада је $x_n a_{n+1} = (a_1 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = x_{n-1}a_n + a_n = (x_{n-1}+1)a_n$, тј. $a_{n+1} = \frac{x_{n-1}+1}{x_n} \cdot a_n$. Индукцијом следи

$$a_{n+1} = \frac{(x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_{n-1}+1)}{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot a_1 = \frac{2^{n-1}}{x_n} \cdot \frac{\frac{x_1+1}{2} \cdot \frac{x_2+1}{2} \cdots \frac{x_{n-1}+1}{2}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}} \cdot a_1.$$

Како је бројилац $x_1 z_2 \cdots x_n$ непаран и бројеви $\frac{x_1+1}{2}, \dots, \frac{x_{n-1}+1}{2}$ цели, следи да $2^{n-1} \mid a_{n+1}$, те је

$$y_n = \frac{x_n a_{n+1}}{2^{n-1}} = a_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{x_i + 1}{2x_i}$$

природан број. Међутим, како је $\frac{x_i+1}{2x_i} \leqslant 1$ за све i, низ (y_n) не расте, одакле закључујемо да је он почев од неког члана константан. Дакле, за свако довољно велико i, нпр. за $i \geqslant N$, важи $\frac{x_i+1}{2x_i} = 1$, тј. $x_i = 1$, што је еквивалентно са $a_{n+1} = 2a_n$.

1Б.1. Претпоставимо да је $x^2 = 2020\dots202$ за неки природан број x. Број x мора бити паран, тј.

$x = 2y$, па имамо $4y^2 = 2020\ldots202$. Дељењем са 2 следи $2y^2 = 1010\ldots101$, што је немогуће, јер је лева страна парна, а десна непарна.

Друго решење. Квадрат целог броја увек се завршава једном од цифара 0, 1, 4, 9, 6 или 5. Никад се не завршава цифром 2.

1Б.2. У првом кругу одиграно је 500 мечева (након чега остаје 501 ученик), у другом 250 (остаје 251 ученик), у трећем 125 (остаје 126 ученика), у четвртом 63, а надаље редом $31, 16, 8, 4, 2, 1$ мечева. Укупан број мечева је $500+250+125+63+31+16+8+4+2+1 = 1000$.

Друго решење. У сваком мечу испада по један ученик. Да би остао само један ученик, треба да их испадне 1000, тј. да буде одиграно 1000 мечева.

1Б.3. Ако први монах лаже понедељком, из његове изјаве тада следи да недељом говори истину, што значи да уторком лаже. У том случају изјава другог монаха је истинита, па и он лаже понедељком, што је немогуће. Према томе, први монах заиста јесте лагао у недељу, а пошто у понедељак није лагао, јесте у суботу.

Други монах је у уторак рекао да лаже понедељком. Ако је то истина, онда он лаже и недељом, што је немогуће. Према томе, он је лагао у уторак, а лаже и средом. За трећег монаха остаје као једина могућност да лаже четвртком и петком. Понедељком не лаже ниједан.

1Б.4. Леву страну једнакости означићемо са $\mathcal{L}$, а десну са $\mathcal{R}$. За $X \subseteq U = A \cup B \cup C \cup D$, са $\overline{X} = U \setminus X$ означавамо комплемент скупа X (у односу на U). Тада за $X, Y \subseteq U$ важи $X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$. Користећи познате особине комплемената имамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (A \cup B) \cap \overline{(C \cap D)} \cap \overline{\big((A \cup C) \cap \overline{(B \cap D)}\big)} = (A \cup B) \cap (\overline{C} \cup \overline{D}) \cap \big(\overline{(A \cup C)} \cup (B \cap D)\big) \\
&= (A \cup B) \cap \big[\big((\overline{C} \cup \overline{D}) \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big) \cup \big((\overline{C} \cup \overline{D}) \cap (B \cap D)\big)\big] \\
&= (A \cup B) \cap \big[(\overline{A} \cap \overline{C}) \cup (\overline{C} \cap B \cap D)\big] = \big((A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C})\big) \cup \big((A \cup B) \cap (\overline{C} \cap B \cap D)\big) \\
&= \big(\overline{C} \cap B \cap \overline{A}\big) \cup \big(\overline{C} \cap B \cap D\big) = \big(\overline{C} \cap B\big) \cap \big(\overline{A} \cup D\big) = (B \setminus C) \cap \overline{(A \setminus D)} = \mathcal{R}.
\end{aligned}$$

Друго решење. Једнакост доказујемо помоћу таблице припадности:

A	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
B	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
C	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
D	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$A \cup B$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$C \cap D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$A \cup C$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$B \cap D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$(A{\cup}B) \setminus (C{\cap}D)$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$(A{\cup}C) \setminus (B{\cap}D)$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\boldsymbol{\mathcal{L}}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$
$B \setminus C$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$A \setminus D$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\boldsymbol{\mathcal{R}}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\in}$	$\boldsymbol{\notin}$	$\boldsymbol{\notin}$

1Б.5. Подсетимо се да је троугао са страницама a, b и c, где је $a \leqslant b \leqslant c$:

- оштроугли ако је $a^2 + b^2 > c^2$;
- правоугли ако је $a^2 + b^2 = c^2$;
- тупоугли ако је $a^2 + b^2 < c^2$.

Означимо са P површину датог троугла, а са a, b и c редом странице које одговарају висинама 5, 4 и 3. Тада је $5 \cdot a = 4 \cdot b = 3 \cdot c = 2P$, тј. $a = \frac{2P}{5}$, $b = \frac{2P}{4}$ и $c = \frac{2P}{3}$. При томе је $a < b < c$. Како је

$$a^2 + b^2 = \frac{4P^2}{25} + \frac{4P^2}{16} = \frac{41P^2}{100} < \frac{4P^2}{9} = c^2,$$

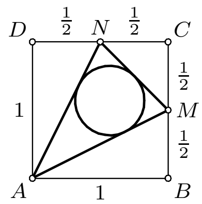
дати троугао је тупоугли.

2Б.1. Веће је 4^{100}. Заиста, $2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100} < \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot 3^{100} < \left(\frac{4}{3}\right)^{100} \cdot 3^{100} = 4^{100}$.

2Б.2. Са $P_{\mathcal{A}}$ означаваћемо површину многоугла $\mathcal{A}$, а са $O_{\mathcal{A}}$ његов обим.

По Питагориној теореми је $AM = AN = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ и $MN = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, па је $O_{AMN} = \frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$, док је $P_{AMN} = P_{ABCD} - P_{AMB} - P_{AND} - P_{CMN} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Следи да је

$$r = \frac{2P_{AMN}}{O_{AMN}} = \frac{3/2}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{12}\ .$$



2Б.3. Апсциса x пресечне тачке задовољава једначину $3x - m = (m+1)x^2 + x + 1$, тј.

$$(m+1)x^2 - 2x + m + 1 = 0. \qquad (*)$$

Дакле, ова једначина треба да има само једно реално решење.

(1°) Ако је $m \neq -1$, онда дискриминанта $D = 4 - 4(m+1)^2$ једначине $(*)$ мора да буде нула, одакле је $m = 0$ или $m = -2$.

За $m = 0$ дате функције су $y = 3x$ и $y = x^2 + x + 1$, а додирна тачка $(1, 3)$;

за $m = -2$ то су $y = 3x + 2$ и $y = -x^2 + x + 1$, а додирна тачка $(-1, -1)$.

(2°) Ако је $m = -1$, дате функције су $y = 3x + 1$ и $y = x + 1$, а (једини) пресек тачка $(0, 1)$.

Према томе, одговор је $m \in \{-2, -1, 0\}$.

2Б.4. Означимо $d = \text{НЗД}(a, b)$ и $a = da_1$, $b = db_1$, при чему је $\text{НЗД}(a_1, b_1) = 1$. Тада је $\text{НЗС}(a, b) = da_1b_1$, па дата једначина постаје $da_1b_1 - d = 2019$, тј. $d(a_1b_1 - 1) = 2019 = 3 \cdot 673$ (број 673 је прост). Имамо следеће могућности.

(1°) $d = 1$, $a_1b_1 = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Пошто је $\text{НЗД}(a_1, b_1) = 1$, пар $(a_1, b_1) = (a, b)$ може бити $(2020, 1)$, $(505, 4)$, $(404, 5)$ или $(101, 20)$.

(2°) $d = 3$, $a_1b_1 = 674 = 2 \cdot 337$. Пар (a_1, b_1) може бити $(674, 1)$ или $(337, 2)$, а одговарајући парови (a, b) су $(2022, 3)$ и $(1011, 6)$.

(3°) $d = 673$, $a_1b_1 = 4$. Мора бити $(a_1, b_1) = (4, 1)$, па је $(a, b) = (2692, 673)$.

(4°) $d = 2019$, $a_1b_1 = 2$. Мора бити $(a_1, b_1) = (2, 1)$, па је $(a, b) = (4038, 2019)$.

Укупно има 8 решења: $(2020, 1)$, $(505, 4)$, $(404, 5)$, $(101, 20)$, $(2022, 3)$, $(1011, 6)$, $(2692, 673)$ и $(4038, 2019)$.

2Б.5. Истинитост изјаве се мења само приликом оглашавања лажљивог папагаја. Приликом 2019 изјава након прве (закључно са 2020-том) сваки папагај (па и лажљиви) би се огласио тачно $\frac{2019}{3} = 673$ пута, те ће 2020-та изјава представљати негацију прве - "Пера није лажов". Међутим, то значи да је папагај који је изрекао 2020-ту изјаву негирао 2019-ту, те је он лажов, а то је исти онај папагај који је започео игру.

Остаје да приметимо да Пера није онај који је започео игру. Наиме, Пера за себе не би рекао да је лажов, био он лажов или не. Према томе, Пера није лажов.

3Б.1. Ако је $|A| = k$, онда је $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$ и одатле $1 = |\mathcal{P}(A) \setminus A| \geqslant |2^k - k|$.

Међутим, за $k \geqslant 2$ важи $2^k - k \geqslant 2$. Ово се лако доказује индукцијом по k, јер је $2^2 - 2 = 2$ и $2^{k+1} - (k+1) = (2^k - k) + (2^k - 1) > 2^k - k$ за све k. Према томе, $k \geqslant 2$ је немогуће, те мора бити $k \leqslant 1$.

3Б.2. По услову задатка је разлика $x^2 - x$ дељива са 10^k. Следи да је, за свако $n = 2, 3, \dots$, разлика $x^{n+1} - x^n = x^{n-1}(x^2 - x)$ такође дељива са 10^k, што значи да бројеви x^n и x^{n+1} имају исти k-тоцифрени завршетак. Одавде следи (нпр. индукцијом по n) да сви бројеви $x, x^2, x^3, x^4, \dots$ имају исти k-тоцифрени завршетак.

3Б.3. Из дате једначине квадрирањем следи $(4\sin^3 x - \sin x)^2 = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, што након развијања даје једначину по $\sin x$:

$$0 = 16\sin^6 x - 8\sin^4 x + 2\sin^2 - 1 = (2\sin^2 x - 1)(8\sin^4 x + 1).$$

Други фактор је строго позитиван, па мора бити $2\sin^2 x - 1 = 0$, тј. $\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(1°) У случају $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ полазна једначина даје $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$;

(2°) у случају $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ полазна једначина даје $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, тј. $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Према томе, опште решење је $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Друго решење. Дељењем са $\cos x$ дату једначину можемо записати као $\operatorname{tg} x(4\sin^2 x - 1) = 1$. Како је $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$, одавде добијамо еквивалентну једначину по $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x\left(\frac{4\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + 1} - 1\right) = 1, \quad \text{тј.} \quad 3\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

што се факторише као $(\operatorname{tg} x - 1)(3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 1) = 0$. Једино реално решење је $\operatorname{tg} x = 1$, тј. $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$.

3Б.4. (б) У сваком мечу испада по један ученик. Да би остао само један ученик, треба да их испадне $n - 1$, тј. да буде одиграно $n - 1$ мечева.

Одавде следи и део (а): за $n = 2020$ биће одиграно 2019 мечева.

Друго решење дела (а). У првом кругу бива одиграно 1010 мечева, а пролази 1010 ученика. У другом кругу биће одиграно 505 мечева и остаће исто толико ученика. У наредним круговима биће одиграно редом 252, 126, 63, 32, 16, 8, 4, 2 и 1 мечева, што је укупно 2019.

3Б.5. Нека се праве BM и CD секу у тачки E. Троуглови MAB и MCE су подударни (једнаки углови и $MA = MC$), па је $CE = AB = 2CD$, тј. $DE = CD$. Следи да је тачка N тежиште троугла ACE, па је $EN = \frac{2}{3}EM$.

Ако је сада $P(MAB) = P(MCE) = P$, имамо $P(EDN) = \frac{2}{3}P(EDM) = \frac{1}{3}P(ECM) = \frac{1}{3}P$ и $P(CDNM) = P(ECM) - P(EDN) = \frac{2}{3}P$, одакле следи тврђење.

4Б.1. Углове троугла означавамо уобичајено са α, β, γ, а странице наспрам њих редом a, b, c. По косинусној теореми је $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, а по синусној $\sin\alpha = \frac{a}{2R}$. Одавде је

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{R}{2abc}(b^2+c^2-a^2) \quad \text{и слично} \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{R}{2abc}(c^2+a^2-b^2), \;\; \operatorname{ctg}\gamma = \frac{R}{2abc}(a^2+b^2-c^2).$$

Сада, ако је нпр. $\operatorname{ctg}\gamma - \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha$, тј. $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma = 2\operatorname{ctg}\beta$, множењем са $\frac{2abc}{R}$ добијамо $(b^2+c^2-a^2) + (a^2+b^2-c^2) = 2(c^2+a^2-b^2)$, тј. $a^2 + c^2 = 2b^2$, па a^2, b^2 и c^2 заиста чине аритметички низ.

4Б.2. Означимо $d = \text{НЗД}(a,b)$ и $a = da_1$, $b = db_1$, при чему је $\text{НЗД}(a_1,b_1) = 1$. Тада је $\text{НЗС}(a,b) = da_1b_1$, па дата једнакост постаје

$$da_1b_1 + d = da_1 + db_1, \quad \text{тј.} \quad 0 = da_1b_1 - da_1 - db_1 + d = d(a_1-1)(b_1-1).$$

Следи да је $a_1 = 1$ или $b_1 = 1$, тј. $a = d \mid b$ или $b = d \mid a$.

4Б.3. Приметимо да је $\left(x_1 - \sqrt{2018}\right)^2 = 2019$, тј. $x_1^2 - 1 = 2x_1\sqrt{2018}$.
Квадрирањем добијамо $(x_1^2-1)^2 - 4\cdot 2018x_1^2 = x_1^4 - 8074x_1^2 + 1 = 0$, па је x_1 нула полинома

$$P(x) = x^4 - 8074x^2 + 1.$$

Напомена. Четири нуле добијеног полинома $P(x)$ су $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2018} \pm \sqrt{2019}$.

4Б.4. Нека је x_1 реално решење дате једначине. Имагинарни део броја $P(x_1)$ је $-6x_1^2 + 9x_1 - 3$, па је $0 = -6x_1^2 + 9x_1 - 3 = -3(2x_1-1)(x_1-1)$, одакле следи $x_1 = 1$ или $x_1 = \frac{1}{2}$. Лако се проверава да је заиста $P(\frac{1}{2}) = 0$, те је $x_1 = \frac{1}{2}$. Сада дељењем са $2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$ налазимо

$$P(x) = (2x-1)\big(x^2 - (2+3i)x - 1 + 3i\big).$$

Остаје да се реши једначина $f(x) = x^2 - (2+3i)x - 1 + 3i = 0$. Допуњавањем до квадрата добијамо $f(x) = \left(x - 1 - \frac{3}{2}i\right)^2 + \frac{1}{4}$, одакле следи $\left(x - 1 - \frac{3}{2}i\right)^2 = -\frac{1}{4}$, тј. $x = 1 + \frac{3}{2}i \pm \frac{1}{2}i$.
Тако добијамо сва три решења: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1 + i$ и $x_3 = 1 + 2i$.

Напомена. Једначина $f(x) = 0$ се може решити и применом уобичајене формуле за решења квадратне једначине: $x_{2,3} = \frac{2+3i+\sqrt{(2+3i)^2-4(3i-1)}}{2} = \frac{2+3i\pm\sqrt{-1}}{2} = \frac{2+3i\pm i}{2}$. Ипак, то је у овом решењу избегнуто јер, строго узевши, квадратни корен на скупу $\mathbb{C}$ није дефинисан.

4Б.5. Гомилу на којој је број колачића дељив са три назваћемо *тројном.*

У почетном стању све гомиле су тројне. Ово својство ће заувек остати на снази. Заиста, поделом тројне гомиле на два једнака дела, као и спајањем двеју тројних гомила, опет се добијају тројне гомиле. Како "гомила" са само једним колачићем није тројна, Марко је неће моћи направити.