Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Први разред – А категорија

1. Дате су три различите тачке A, B и C на правој ℓ и тачка O ван праве ℓ. Симетрале дужи OA, OB и OC образују троугао EFG. Доказати да тачке O, E, F и G леже на истој кружници.

2. Змија полази из горњег левог поља таблице $2\times n$, где је n природан број. Змија из једног поља може прећи у друго ако та два поља имају заједничку ивицу, али не сме посетити ниједно поље двапут. На колико начина змија може обићи сва поља таблице?

3. Наћи све троелементне скупове A који имају следећа два својства:

(i) Скуп A има бар два заједничка елемента са својим партитивним скупом $\mathcal{P}(A)$;

(ii) $3 \in A$.

(Подразумева се да ниједан скуп није елемент самог себе, нити елемент свог елемента.)

4. Нека је $m > 1$ природан број. Доказати да не постоји низ од 2^m узастопних природних бројева који сви имају тачно по m простих фактора, рачунајући и вишеструкост.
(На пример, број $8000 = 2^6 \cdot 5^3$ има $6 + 3 = 9$ простих фактора.)

5. Да ли је могуће поделити квадрат на конвексне петоуглове?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Други разред – А категорија

1. Квадар чије су ивице из једног темена међусобно различити природни бројеви сачињен је од белог материјала, обојен споља црвеном бојом, а затим изрезан на јединичне коцке. Познато је да је барем једна коцка скроз бела и да има више коцки са две црвене стране него са једном црвеном страном. Наћи димензије квадра.

2. Тачка M је средиште странице CD паралелограма $ABCD$, а тачке E и F редом подножја висина из темена A и B у троуглу ABM. Доказати да је $DE = CF$.

3. У Неправедној Краљевини Патуљака патуљци сваке године морају да чекају ред пред шалтером у Министарству Бесмислене Бирократије како би предали своје капе на годишњу инспекцију. Међутим, кад год се на крају реда појави плавокапи патуљак, он ће се безобзирно угурати у ред испред свих зеленокапих патуљака. Притом ће изазвати и инцидент у коме ће патуљак испред ког је стао бити ухапшен. Ухапшени патуљак остаје без могућности да тог дана преда своју капу.

На крају дана, током којег су у Министарство дошла 4 плавокапа и 4 зеленокапа патуљка, радник на шалтеру прави распоред свих предатих капа по редоследу предаје. Од доласка првог патуљка до одласка последњег ред ни у једном тренутку није био празан. Колико има различитих могућих распореда капа?

Капе истих боја сматрају се идентичним. Бити први у реду не значи нужно и моменталну услугу на шалтеру.

4. Природни бројеви a и b су такви да је $a + 101b$ дељиво са 103, а $a + 103b$ дељиво са 101. Колико најмање може бити $51a + b$?

5. Претпоставимо да је $A \subseteq \{0, 1, \ldots, 9\}$ скуп такав да се сваки природан број може представити у облику збира два ненегативна цела броја сачињена од цифара из скупа A. Колико најмање елемената може имати скуп A?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Трећи разред – А категорија

1. Решити неједначину

$$\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}\,.$$

2. Ако су p и q прости бројеви већи од 2, доказати да је

$$\left\lfloor \frac{p^q+q^p}{pq} \right\rfloor$$

паран број.

3. На кружници k су дате тачке A и B. Тангенте на кружницу у тачкама A и B секу се у тачки P. Нека је M средиште дужи AB. Кружница γ кроз тачке M и P сече кружницу k у тачкама C и D и поново сече дуж AB у тачки N. Доказати да се тангенте на кружницу k у тачкама C и D секу на дужи NP.

4. Одредити све парове природних бројева (a, b), при чему је $1 < a < b$, за које постоји скуп од b природних бројева са особином да је производ сваких a бројева међу њима дељив збиром тих a бројева.

5. Квадрат странице $2n$ је подељен на јединичне квадрате. Колико највише дијагонала јединичних квадрата је могуће нацртати тако да никоје две дијагонале немају заједничку тачку (чак ни теме)?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Четврти разред – А категорија

1. На страницама AB и AC једнакокраког троугла ABC ($AB = AC$) одабране су редом тачке D и E тако да важи $AD = BC = CE$ и притом је троугао ADE једнакокрак. Одредити све могуће вредности $\sphericalangle BAC$.

2. Таблицу $n \times 3$ потребно је попунити целим бројевима који нису сви нула тако да је сваки број једнак збиру суседних бројева умањеном за збир дијагонално-суседних бројева. Наћи све природне бројеве n за које је ово могуће.

Два поља су суседна ако имају заједничку страну, а дијагонално-суседна ако имају тачно једно заједничко теме.

3. На средишње поље шаховске табле $(2n+1) \times (2n+1)$ стављена је дама. У сваком потезу дама мора да се приближи ивици (тј. растојање од центра поља на којем је дама до центра најближег ивичног поља строго опада са сваким потезом). На колико начина дама може да стигне до ивице табле?

(У једном потезу дама се помера хоризонтално, вертикално или дијагонално за произвољан број поља.)

4. Постоје ли природни бројеви a, b, c и d такви да важи

$$a^2 + b^2 = 5cd \quad \text{и} \quad c^2 + d^2 = 5ab?$$

5. Бесконачан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ је такав да су сви бројеви

$$\frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{a_1 + a_2}{a_3}, \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_4}, \quad \ldots$$

цели и непарни. Доказати да је сваки број у низу, почев од неког, тачно двапут већи од претходног.

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Први разред – Б категорија

1. Доказати да ниједан број облика

$$2020\ldots20202$$

у децималном запису не може бити квадрат природног броја.

2. У једној школи се одржава турнир у стоном тенису на коме учествује 1001 ученик. У сваком кругу ученици су распоређени у парове; сваки пар игра меч и победник пролази у следећи круг (нема нерешених мечева). Ако у неком кругу има непаран број ученика, један жребом изабран ученик иде у наредни круг без борбе. Када остане само један ученик, он се проглашава победником и турнир се завршава.

Колико ће укупно мечева бити одиграно?

3. У пећини медитирају три монаха. Сваки од њих лаже два узастопна дана у недељи, а осталих дана говори истину. Никоја два монаха не лажу истог дана. У понедељак је један монах казао: „Јуче сам лагао”. Наредног дана надовезао се други монах: „А ја сам јуче лагао”. Ког дана у недељи ниједан монах не лаже?

4. Доказати да за ма које скупове A, B, C и D важи једнакост

$$\big((A \cup B) \setminus (C \cap D)\big) \setminus \big((A \cup C) \setminus (B \cap D)\big) = (B \setminus C) \setminus (A \setminus D).$$

5. Дужине трију висина у троуглу су 3, 4 и 5. Да ли је тај троугао оштроугли, правоугли или тупоугли?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Други разред – Б категорија

1. Шта је веће: $2^{100} + 3^{100}$ или 4^{100}?

2. У квадрату $ABCD$ странице 1, тачке M и N су редом средишта страница BC и CD. Израчунати полупречник r круга уписаног у троугао AMN.

3. За које вредности параметра m графици функција

$$y = 3x - m \quad \text{и} \quad y = (m+1)x^2 + x + 1$$

имају тачно једну заједничку тачку?

4. Наћи све парове природних бројева (a, b) у којима је $a > b$ и важи

$$\text{НЗС}(a, b) - \text{НЗД}(a, b) = 2019.$$

5. Три папагаја - Пера, Мика и Лаза - чуче за округлим столом. Један од њих увек лаже, а остала два увек говоре истину. Игра *Истине и лажи* започиње тако што један од њих дâ изјаву (папагај лажов би лагао, а остали би рекли истину). Следећи у смеру казаљке на сату треба да понови ту изјаву, затим следећи понови његову, и тако у круг редом. Међутим, при томе папагај лажов неће поновити изјаву свог претходника, већ ће изрећи њену негацију.

Испоставило се да су прва и 2019-та изјава гласиле истоветно: „Пера је лажов!”. Да ли је Пера заиста лажов?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако за неки коначан скуп A важи $|A \triangle \mathcal{P}(A)| = 1$, доказати да је $|A| \leqslant 1$.
(Са $X \triangle Y$ означена је *симетрична разлика* скупова X и Y, тј. $X \triangle Y = (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)$.)

2. Претпоставимо да је x природан број такав да бројеви x и x^2 имају исти k-тоцифрени завршетак. Доказати да тада сви степени броја x имају исти k-тоцифрени завршетак.

3. Решити једначину:

$$4 \sin^3 x = \sin x + \cos x.$$

4. У једној школи се одржава турнир у стоном тенису. У сваком кругу ученици су распоређени у парове; сваки пар игра меч и победник пролази у следећи круг (нема нерешених мечева). Ако у неком кругу има непаран број ученика, један жребом изабран ученик иде у наредни круг без борбе. Када остане само један ученик, он се проглашава победником и турнир се завршава.
Колико ће укупно мечева бити одиграно, ако је учествовало:

(а) 2020 ученика? (б) n ученика, где је n произвољан природан број?

5. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$ са основицом AB и $AB : CD = 2 : 1$. Тачка M је средиште дијагонале AC, а тачка N пресек праве BM и дужи AD. Доказати да је

$$P(ABM) : P(NMCD) = 3 : 2.$$

($P(\mathcal{A})$ означава површину многоугла $\mathcal{A}$.)

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

18. јануар 2020.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако котангенси углова неког троугла чине аритметички низ, доказати да онда квадрати страница тог троугла такође чине аритметички низ.

2. Доказати да за природне бројеве a и b важи

$$\text{НЗД}(a,b) + \text{НЗС}(a,b) = a + b$$

ако и само ако је један од бројева a и b дељив другим.

3. Постоји ли полином са целим коефицијентима чија је једна нула $x_1 = \sqrt{2018} + \sqrt{2019}$?

4. Наћи сва решења једначине

$$P(x) = 2x^3 - (5+6i)x^2 + 9ix + 1 - 3i = 0,$$

ако је познато да је бар једно њено решење реално.

5. Пред Марком су три гомиле са 21, 45 и 33 колачића. Он на њима врши измене једног од следећа два типа, једну по једну:

(1°) одабере гомилу са парним бројем колачића (ако таква постоји) и подели је на два једнака дела, или

(2°) споји две гомиле у једну.

Ако Марко успе да направи гомилу са само једним колачићем, сме да га поједе. Може ли он икада појести колачић?

Време за рад: 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.