ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА 2019/2020.

Решења

1A.1. За почетак, из $x\diamondsuit(y-x)$ одмах следи $|x-1| \leqslant 1$, па мора бити $x \geqslant 0$.

Означимо $|x-1| = d \geqslant 0$. Тада је $x = 1 \pm d$, али из услова $x\diamondsuit(y-x)$ добијамо и $d + |(y-x)-2| \leqslant 1$, тј. $|(y-x)-2| \leqslant 1-d$. Одавде следи $d \leqslant 1$ и $1+d \leqslant y-x \leqslant 3-d$.

На исти начин, из услова $x \diamondsuit (y+x)$ добијамо $1+d \leqslant y+x \leqslant 3-d$.

Међутим, сада из $y+x \leqslant 3-d$ и $y-x \geqslant 1+d$ следи $2x = (y+x)-(y-x) \leqslant (3-d)-(1+d) = 2-2d$, тј. $x \leqslant 1-d$. Према томе, $x = 1-d$, $y-x = 1+d$ и $y+x = 3-d$, одакле добијамо $y = 2$.

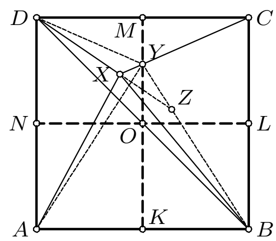
1A.2. Нека је k број црвених бројева унутар једног периода дужине d. Посматрајмо бројеве

$$\begin{array}{cccc} a+1 & a+2 & \ldots & a+d \\ b+1 & b+2 & \ldots & b+d \\ c+1 & c+2 & \ldots & c+d. \end{array}$$

У свакој врсти ове табеле има по k црвених бројева, што укупно даје $3k$ црвених бројева. С друге стране, свака од d колона садржи по један црвен број. Дакле, $d = 3k$.

1A.3. Одговор је унија дужи KM и LN, где су K, L, M и N редом средишта страница AB, BC, CD и DA. Ове тачке заиста задовољавају услов задатка: нпр. за X на дужи KM важи $AX{=}BX$ и $CX{=}DX$.

Претпоставимо да X није на дужима KM и LN. Без смањења општости, X лежи унутар $\triangle OMD$ или на дужи OD. Нека је $CX \cap OM = \{Y\}$ и $DX \cap BY = \{Z\}$. Како је $AY = BY$ и $CY = DY$, имамо неједнакости троугла:



(i) $AX + CX = AX + XY + CY > AY + CY = BY + DY$;

(ii) $BY + DY = BZ + YZ + DY \geqslant BZ + DZ$;

(iii) $BZ + DZ = BZ + XZ + DX \geqslant BX + DX$.

Комбиновањем ових неједнакости следи $AX + CX > BX + DX$.

Друго решење. Означимо са x, y, z и w редом растојања тачке X од правих DA, AB, BC и CD. По Питагориној теореми услов $AX + CX = BX + DX$ постаје

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+w^2} = \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{x^2+w^2}.$$

Квадрирање обеју страна и скраћивање даје $\sqrt{(x^2+y^2)(z^2+w^2)} = \sqrt{(y^2+z^2)(x^2+w^2)}$, што поновним квадрирањем постаје $(x^2+y^2)(z^2+w^2) = (y^2+z^2)(x^2+w^2)$, тј.

$$\cancel{x^2z^2} + x^2w^2 + z^2y^2 + \cancel{y^2w^2} = x^2y^2 + \cancel{x^2z^2} + \cancel{y^2w^2} + z^2w^2 \quad \Rightarrow$$
$$x^2w^2 - x^2y^2 - z^2w^2 + z^2y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(w^2-y^2) - z^2(w^2-y^2) = (x^2-z^2)(w^2-y^2) = 0.$$

Према томе, $x = z$ или $y = w$, што значи да тачка X лежи на једној од две средње линије квадрата. С друге стране, ако је $x = z$ или $y = w$, све горње једнакости тривијално важе.

1A.4. Одговор је *не*.

Претпоставимо супротно. Међу датих 2020 бројева бар један, а највише два су дељива са $2^{10} = 1024$. То значи да је најмањи заједнички садржалац за оба скупа дељив са 2^{10}, па сваки скуп садржи тачно по један број дељив са 2^{10}. Према томе, у једном скупу налази се број $2^{10}k$, а у другом $2^{10}(k+1)$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Међутим, тачно један од та два броја је дељив и са 2^{11}. Следи да ће најмањи заједнички садржалац у само једном од два скупа бити дељив са 2^{11}, што је контрадикција.

1A.5. Одговор је $F = 3$ и достиже се само за тројку $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

Како је $\max\{x, 1-y\} \geqslant x$, $\max\{y, 2-z\} \geqslant y$ и $\max\{z, 3-x\} \geqslant z$, имамо $F \geqslant x+y+z$. Слично важи $F \geqslant (1-y)+(2-z)+(3-x) = 6-x-y-z$. Сабирањем следи $2F \geqslant 6$, тј. $F \geqslant 3$. Ова вредност се достиже само ако у свим наведеним неједнакостима важи знак једнакости, а то је само ако је $x = 1-y$, $y = 2-z$ и $z = 3-x$. Одавде лако добијамо $(x, y, z) = (1, 0, 2)$.

2A.1. Сваки број облика

$$\underbrace{22\ldots22}_{2n}\underbrace{11\ldots11}_{2^{2n}-4n}$$

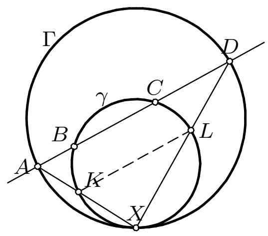
задовољава услов задатка. Заиста, он је очигледно дељив са 11, а збир и производ цифара су му једнаки 2^{2n}.

2A.2. Друга једначина је еквивалентна са $ab+ac+ad+bc+bd+cd = \frac{15}{2}$. Сада је

$$\begin{aligned}&(a-1)(b-1)+(a-1)(c-1)+(a-1)(d-1)+(b-1)(c-1)+(b-1)(d-1)+(c-1)(d-1)\\ &= ab+ac+ad+bc+bd+cd-3(a+b+c+d)+6 = -\tfrac{3}{2},\end{aligned}$$

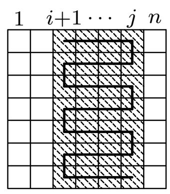
па је бар један од бројева $a-1$, $b-1$, $c-1$ и $d-1$ негативан, одакле следи тврђење.

2A.3. Нека праве XA и XD редом поново секу кружницу γ у тачкама K и L. Потенције тачака A и D у односу на кружницу γ дају нам $AB \cdot AC = AX \cdot AK$ и $DB \cdot DC = DX \cdot DL$.



С друге стране, хомотетија са центром X која слика круг Γ у γ пресликава праву ℓ у праву KL, те је $KL \parallel \ell$. Одатле је $\frac{AK}{DL} = \frac{AX}{DX}$, па је $\frac{AB \cdot AC}{DB \cdot DC} = \frac{AX \cdot AK}{DX \cdot DL} = \frac{AX^2}{DX^2}$.

2A.4. **(а)** За $i = 0, 1, \ldots, n$ означимо са S_i збир елемената у првих i колона. Бар два од ових збирова су конгруентна по модулу m, рецимо S_i и S_j $(i < j)$, те $m \mid S_j - S_i$, То значи да је збир свих бројева у колонама од $(i+1)$-ве до j-те дељив са m. Било који пут који обилази сва ова поља (такав постоји: видети слику) задовољава услов задатка.

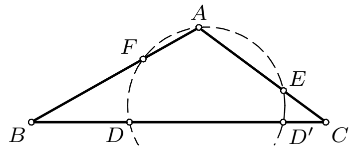


(б) Упишимо у поља прве врсте јединице, а у сва остала поља нуле. Збир бројева на сваком путу је између 1 и n, па није дељив са m.

2A.5. Тврђење доказујемо индукцијом по броју тачака n. Оно важи за $n \leqslant 5$. Заиста, ако има 5 тачака A, B, C, D, E и сваке две повезује дуж, можемо обојити дужи AB, BC, CD, DE, EA једном бојом, а преостале дужи другом. Претпоставимо да је $n \geqslant 6$ и да тврђење важи за мање од n тачака. Одаберимо тачку P из које излазе 4 дужи, рецимо PA, PB, PC, PD (ако такве тачке нема, можемо доцртати нове дужи). По индуктивној претпоставци, можемо обојити све дужи осим ове четири тако да услов задатка буде задовољен.

Ако су међу тачкама A, B, C, D сваке две спојене, онда између скупа $\{P, A, B, C, D\}$ и скупа свих осталих тачака нема дужи, па ова два скупа можемо обојити независно. С друге стране, ако нема нпр. дужи CD, онда PA и PB бојимо једном бојом тако да PAB не буде једнобојан троугао, а PC и PD другом бојом. Ово бојење задовољава услов.

3A.1. Означимо $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$.



Нека круг $ADEF$ поново сече страницу BC у тачки D'. Из потенције тачке B је $BA \cdot BF = BD \cdot BD'$, тј. $\frac{2}{3}c^2 = \frac{1}{3}a \cdot BD'$, што нам даје $BD' = \frac{2c^2}{a}$. Слично имамо $CA \cdot CE = CD \cdot CD'$, тј. $\frac{1}{3}b^2 = \frac{2}{3}a \cdot CD'$, што нам даје $CD' = \frac{b^2}{2a}$. Најзад, из услова $a = BD' + CD' = \frac{b^2+4c^2}{2a}$ следи $2a^2 = b^2 + 4c^2$.

У нашем случају је $BC = 26$.

3A.2. Како је $|z|^2 = z\overline{z}$ и $|w|^2 = \overline{w}$, сабирање датих једначина даје

$$4 + 2i = z\overline{z} + zw + w\overline{w} + \overline{zw} + z + \overline{w} = (z + \overline{w})(\overline{z} + w) + z + \overline{w} = |z + \overline{w}|^2 + (z + \overline{w}).$$

Ако означимо $z+\overline{w} = a+bi$, добићемо $4+2i = a^2+b^2+a+bi$, одакле је $b = 2$ и $a^2+b^2+a = 4$, тј. $a \in \{-1, 0\}$. Испитаћемо оба случаја.

(1°) $a = 0$. Тада је $z + \overline{w} = 2i$, тј. $\overline{w} = 2i - z$, па је $\overline{z} + w = -2i$. Сада прва једначина даје

$$2 + 6i = z(\overline{z} + w) + \overline{w} = 2i - (1 + 2i)z \quad \text{и одатле} \quad z = -2 \ \text{ и } \ w = 2 - 2i.$$

(2°) $a = -1$. Тада је $z + \overline{w} = -1 + 2i$, тј. $\overline{w} = -1 + 2i - z$, па је $\overline{z} + w = -1 - 2i$. Сада је

$$2 + 6i = (-1-2i)z + \overline{w} = -1 + 2i - (2 + 2i)z \quad \text{и одатле} \quad z = -\tfrac{3+4i}{2+2i} = \tfrac{-7-i}{4} \ \text{ и } \ w = \tfrac{3-9i}{4}.$$

Према томе, решења (z, w) су $(-2,\ 2-2i)$ и $(\frac{-7-i}{4}, \frac{3-9i}{4})$.

3A.3. За почетак, ако је број $3\,806\,130$ четвороцифрен у основи b, онда је $b^3 \leqslant 3\,806\,130 < b^4$. Груба оцена даје $40 \leqslant b \leqslant 160$ (заправо, $45 \leqslant b \leqslant 156$).

Број $3\,806\,130$ се раставља на просте чиниоце као $2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}17^2{\cdot}439$. Нека је он четвороцифрени палиндром у основи b, тј. $3\,806\,130 = \langle x, y, y, x\rangle_b = x(b^3+1)+y(b^2+b) = (b+1)\big((b^2-b+1)x+by\big)$. Имамо $b + 1 \mid 3\,806\,130$, што даје као једине могућности $b \in \{50, 84, 101\}$. Остаје само мало рачуна:

$$3\,806\,130 = \langle 30, 22, 22, 30\rangle_{50} = \langle 6, 35, 35, 6\rangle_{84} = \langle 3, 70, 11, 46\rangle_{101}.$$

Дакле, одговор су бројевни системи са основама 50 и 84.

3A.4. Заменом места y и x добијамо $xf(f(y)) = \frac{f(f(x)+f(y))}{f(x+y)} = yf(f(x))$, одакле је $\frac{f(f(x))}{x} = \frac{f(f(y))}{y} = c$ константно, тј.

$$f(f(x)) = cx \quad \text{за све } x.$$

Следи да је f бијекција и да важи $f(cx) = f(f(f(x))) = cf(x)$. Сада заменом $(x, y) = (1, \frac{1}{c})$ у једначину из задатка добијамо

$$f(f(1) + f(\tfrac{1}{c})) = 1 \cdot f(f(\tfrac{1}{c}))f(1 + \tfrac{1}{c}) = 1 \cdot c \cdot \tfrac{1}{c}f(1 + \tfrac{1}{c}) = f(1 + \tfrac{1}{c}).$$

Бијективност даје $(1+\frac{1}{c})f(1) = f(1)+f(\frac{1}{c}) = 1+\frac{1}{c}$, одакле је $f(1) = 1$. Следи $c = f(f(1)) = 1$, па је $f(f(x)) = x$. Најзад, уметањем $y = f(x)$ у полазну једначину добијамо $f(x + f(x)) = xf(x)f(x + f(x))$, па је $xf(x) = 1$, тј. $f(x) = \frac{1}{x}$ за све x.
Лако се проверава да је функција $f(x) = \frac{1}{x}$ заиста решење.

3A.5. Означимо скупове са A и B.

(а) Посматрајмо $k = \min\{|x - y| \mid x \text{ и } y \text{ су из истог скупа}\}$. Нека су $a, b \in A$такви да је $b-a = k$. Одаберимо елемент $c \in A\setminus\{a, b\}$. Постоје m и n (не нужно различити) у скупу B такви да је $a+c \leqslant 2m \leqslant a+c+1$ и $b+c \leqslant 2n \leqslant b+c+1$, а тада је $2(n-m) \leqslant b-a+1 = k+1$. Дакле, ако је $k > 1$, онда је $0 < n - m \leqslant \frac{k+1}{2} < k$, противно избору броја k. Према томе, мора бити $k = 1$, али тада постоји број $m \in B$ такав да је $2m \in \{a+b, a+b+1\} = \{2b-1, 2b\}$, па је $m = b$, што је контрадикција. Дакле, одговор је *не*.

(б) Одговор је *да*, а услове задовољавају $A = \{1, 3, 5\}$ и $B = \{2, 4, 6\}$.

4A.1. Нека су $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ елементи скупа S и нека је $a = a_n$. Посматрајмо

$$x = a_1+a_2+\cdots+a_{n-1} + a_{n+1}+\cdots+a_m, \quad \text{где је} \quad m > n.$$

Очигледно је $f(x) \geqslant m-1$ и $f(x+a_n) \geqslant m$. С друге стране, како је $x < \sum_{i=1}^{m} a_i$ и $x+a_n < \sum_{i=1}^{m+1} a_i$, имамо $f(x) = m-1$ и $f(x+a_n) = m$. Према томе, број x задовољава услов задатка (за свако $m > n$).

4A.2. Директно се налази $a_2 = \frac{7}{2}$, $a_3 = \frac{10}{3}$ и $a_4 = \frac{13}{4}$. Индукцијом се једноставно доказује да је $a_n = \frac{3n+1}{n}$. Заиста, ако је $a_{n-1} = \frac{3n-2}{n-1}$, онда је

$$a_n = \frac{4n^2 \cdot \frac{3n-2}{n-1} - 1}{\frac{3n-2}{n-1} + 4n^2 - 2} = \frac{4n^2(3n-2) - (n-1)}{3n-2+(4n^2-2)(n-1)} = \frac{(3n+1)(2n-1)^2}{n(2n-1)^2} = \frac{3n+1}{n}.$$

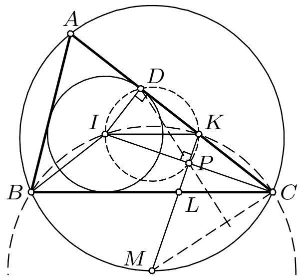
Према томе, $a_{2020} = \frac{6061}{2020}$.

Друго решење. Израз за a_n је еквивалентан са

$$\frac{1}{a_n - 1} - \frac{1}{a_{n-1} - 1} = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Сумирањем по $n = 2, 3, \ldots, 2020$ добијамо $\frac{1}{a_{2020}-1} = \frac{1}{a_1-1} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8082} = \frac{2020}{4041}$, тј. $a_{2020} = \frac{6061}{2020}$.

4A.3. Пошто је $\sphericalangle IBC = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \sphericalangle KCB$, трапез $BCKI$ је једнакокрак. Штавише, важи $\sphericalangle CIK = \sphericalangle ICB = \sphericalangle KCI$, па је $IK = CK = BI$. Познато је да је $MI = MB = MC$, па је M центар описаног круга трапеза $BCKI$ и $MK \perp CI$.



Означимо са P средиште дужи KL. Како је $\sphericalangle CLK = \sphericalangle IKL = \sphericalangle LKC$, четвороугао $IKCL$ је ромб, па је $\sphericalangle IPK = 90^\circ = \sphericalangle IDK$. Следи да је четвороугао $JDKP$ тетиван, па је $\sphericalangle CDP = \sphericalangle KDP = \sphericalangle KIP = 90^\circ - \sphericalangle MKI = 90^\circ - \sphericalangle MCK$, тј. $DP \perp MC$, чиме је тврђење доказано.

4A.4. Број $14!! \cdot 33!!$ је дељив са 2^{11} и са 5^5, али не са 5^6. Следи да се овај број завршава с тачно пет нула:

$$N = 53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = \overline{22a\,6b3\,493\,6c9\,d96\,8e4\,f10\,6g4\,h00\,000}.$$

Овај број је дељив и са 9 и 11, па нам критеријум дељивости овим бројевима даје $9 \mid 82+S$ и $11 \mid S-52$, тј. $S \equiv 8 \pmod 9$ и $S \equiv 8 \pmod{11}$, где је $S = a+b+c+d+e+f+g+h$. Одавде је $S \equiv 8 \pmod{99}$, па због $0 \leqslant S \leqslant 72$ следи $S = 8$.

Даље, како $64 \mid N/10^5$, шестоцифрени завршетак $\overline{106\,g4h}$ овог броја је дељив са 64. При томе знамо да је $h \neq 0$, па због дељивости са 4 имамо $h \in \{4, 8\}$.

Ако је $h = 4$, онда би из $S = 8$ и $8 \mid \overline{g44}$ следило $g \in \{1, 3\}$, али ниједан од завршетака $\overline{106\,144}$ и $\overline{106\,344}$ није дељив са 64. Ово као једину могућност оставља $h = 8$, а због $S = 8$ следи $a{=}b{=}c{=}d{=}e{=}f{=}g{=}0$. Све у свему, „израчунали" смо:

$$53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = 220\,603\,493\,609\,096\,804\,010\,604\,800\,000.$$

4A.5. Доказаћемо индукцијом по M да, ако је $a_2 \leqslant a_1 = M$, онда је дужина низа највише $\frac{3M+1}{2}$. То је тачно за $M \leqslant 2$. Претпоставимо да је $M > 2$ и да тврђење важи за $a_1 < M$.

(1°) Ако је $\frac{M}{2} \leqslant a_2 \leqslant M$, онда је $a_3 < a_2$, па је дужина низа почев од a_2 не већа од $\frac{3a_2+1}{2} \leqslant \frac{3M-2}{2}$. Укупна дужина је највише $\frac{3M-2}{2} + 1 < \frac{3M+1}{2}$.

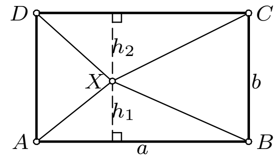
(2°) Ако је $2 \leqslant a_2 \leqslant \frac{M}{2}$, онда је $a_4 < a_3 \leqslant M-2$, па је дужина низа почев од a_3 највише $\frac{3a_3+1}{2} \leqslant \frac{3M-5}{2}$, а укупна дужина највише $\frac{3M-5}{2} + 2 < \frac{3M+1}{2}$.

(3°) Ако је $a_2 = 1$, добија се низ $M, 1, M-1, M-2, 1, M-3, \ldots$ дужине $\lfloor \frac{3M+1}{2} \rfloor$.

Индукција је завршена. Према томе, како је $a_2 \leqslant a_1 \leqslant 2020$ или $a_3 \leqslant a_2 \leqslant 2020$, низ има највише $\lfloor \frac{3 \cdot 2020+1}{2} \rfloor + 1 = 3031$ чланова. Ова дужина се достиже за низ

$$2019, 2020, 1, 2019, 2018, 1, 2017, 2016, 1, \ldots, 5, 4, 1, 3, 2, 1, 1.$$

1Б.1. Ако је $AB = a$ и $BC = b$, а h_1 и h_2 редом висине из темена X у троугловима XAB и XCD, онда је $h_1 + h_2 = b$ и $P_{XAB} + P_{XCD} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}P_{ABCD}$.



На исти начин важи и $P_{XBC} + P_{XDA} = \frac{1}{2}P_{ABCD}$. Према томе, $P_{XDA} = P_{XAB} + P_{XCD} - P_{XBC} = 15 + 17 - 16 = 16$.

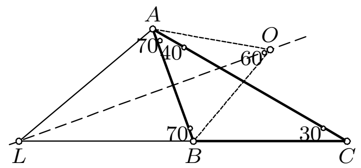
1Б.2. Како је збир првих пет цифара не већи од $5 \cdot 9 = 45$, последња цифра је 6 или 8.

Ако је последња цифра 6, једина могућност је број 999996.

Ако је последња цифра 8, првих пет цифара могу бити четири деветке и седмица неким редом (5 могућности), или три деветке и две осмице ($\binom{5}{2} = 10$ могућности).

Према томе, тражених бројева има $1 + 5 + 10 = 16$.

1Б.3. Како је $\sphericalangle A = 40^\circ$, имамо $\sphericalangle LAB = \frac{180^\circ - \sphericalangle A}{2} = 70^\circ = \sphericalangle LBA$. Према томе, троугао LAB је једнакокрак и $LA = LB$, а како је такође $OA = OB$, права LO је симетрала дужи AB. При томе су троуглови LOA и LOB подударни (три пара једнаких страница), па је $\sphericalangle AOL = \sphericalangle BOL = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB = 30^\circ$.



1Б.4. Добијени седмоцифрени број, који лежи између 2 020 000 и 2 020 999, мора да буде дељив са $8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$. Како је $2\,020\,000 = 2550 \cdot 792 + 400$, једини такав број је $2551 \cdot 792 = 2\,020\,392$.

Друго решење. Нека је тражени број $\overline{2020abc}$. Цифра c мора бити парна. Критеријуми дељивости са 9 и 11 дају $9 \mid 4{+}a{+}b{+}c$ и $11 \mid 4{+}a{-}b{+}c$. Следи да је $a{+}b{+}c \in \{5, 14, 23\}$ и $a{-}b{+}c \in \{-4, 7\}$. Притом се бројеви $a{+}b{+}c$ и $a{-}b{+}c$ разликују за $2b$, те морају имати исту парност.

Ако је $a{-}b{+}c = -4$, мора бити $a{+}b{+}c = 14$, одакле следи $b = 9$ и $a + c = 5$, па је $\overline{abc} \in \{\overline{194}, \overline{392}, \overline{590}\}$. Провером налазимо решење 2 020 392.

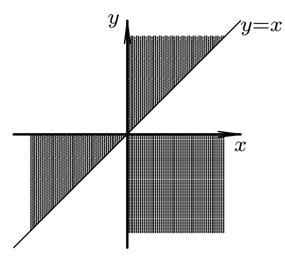
Ако је $a{-}b{+}c = 7$, мора бити $a{+}b{+}c = 23$, одакле следи $b = 8$ и $a + c = 15$, па је $\overline{abc} \in \{\overline{788}, \overline{986}\}$. Провером не налазимо ниједно решење.

1Б.5. Означимо са a и b редом бројеве радника у првој и другој смени, а са n број планираних дана. Услов задатка нам даје једначине

$$6n(a - b) = 240, \quad na = (n + 2)(a - 5), \quad nb = (n + 2)(b - 4).$$

Развијањем друге и треће једначине добијамо $2a - 5n - 10 = 2b - 4n - 8 = 0$, тј. $a = \frac{5}{2}(n+2)$ и $b = 2(n + 2)$, тако да прва једначина постаје $240 = 6n \cdot \frac{1}{2}(n + 2)$, тј. $n(n + 2) = 80$. Једино решење ове једначине у скупу природних бројева је $n = 8$. Следи да је $a = 25$ и $b = 20$, тј. у првој смени има 25 радника, а у другој 20.

2Б.1. У првом и трећем квадранту је $xy > 0$, па множењем са xy услов задатка постаје $x < y$.



У другом и четвртом квадранту је $xy < 0$, па се множењем са xy мења знак, тј. услов задатка постаје $x > y$.

Тражени скуп је приказан на слици (осе и права $x = y$ не припадају скупу).

2Б.2. Троцифрени бројеви састављени од цифара a, b и c су $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ и $\overline{cba}$, а њихов збир је $222(a+b+c)$. Једини број дељив са 222 између 2700 и 3100 је $222 \cdot 13 = 2886$, одакле закључујемо да је $a + b + c = 13$.

Цифра a не може бити 9 (следило би $\overline{abc} = 922$, што отпада). Ако је $a = 8$, могући бројеви $\overline{abc}$ су 814 и 832. Према томе, одговор је 832.

2Б.3. Означимо $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$. Претпоставимо да троугао ABC није једнакостраничан: рецимо, $\alpha \neq \beta$. Из тетивности четвороуглова $ABDC$ и $BCEA$ следи $\sphericalangle BDC = 180^\circ - \alpha$ и $\sphericalangle CEA = 180^\circ - \beta$, па су то два различита угла сваког од троуглова BDC, CEA и AFB. Међутим, ово је немогуће, јер је $(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) > 180^\circ$.

2Б.4. Из датих једначина имамо

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 - y^2 + xz - yz = (x-y)(x+y+z),\\
0 &= xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1),\\
0 &= x^2 - z^2 + xy + yz = (x+z)(x+y-z).
\end{aligned}$$

Друга једначина даје $x = 1$ или $y = 1$.

(1°) Ако је $x = y = 1$, трећа једначина даје $z \in \{-1, 2\}$.

(2°) Ако је $y \neq x = 1$, из прве једначине је $x + y + z = 0$, тј. $z = -1 - y$, што заменом у трећу даје $-y(2 + 2y) = 0$, тј. $y \in \{-1, 0\}$.

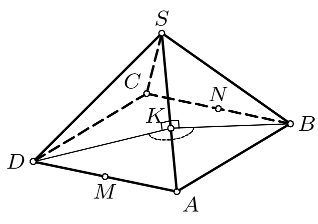
(3°) Ако је $x \neq y = 1$, из прве једначине опет следи $z = -1 - x$, што заменом у трећу даје $-(2 + 2x) = 0$, тј. $x = -1$ и $z = 0$.

Овако смо добили пет решења (x, y, z): $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$ и $(-1, 1, 0)$. Директно се проверава да су то заиста решења.

2Б.5. **(а)** Ако су један или оба броја a и b непарни, број $ab - 5a + 7b$ ће такође бити непаран. Пошто је на табли само један број паран, никада нећемо записати други паран број, па тако ни број 2020.

(б) У ствари, сви новонастали бројеви даваће остатак 2 при дељењу са 3. Заиста, кад год макар један од бројева a и b даје остатак 2 при дељењу са 3, број $(a + 7)(b - 5) = ab - 5a + 7b - 35$ биће дељив са 3, тако да ће $ab - 5a + 7b$ давати остатак 2. Према томе, ни број 2019 није могуће дописати.

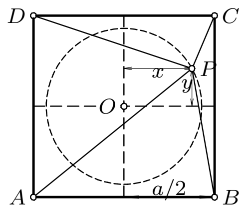
3Б.1. Нека је K подножје висине из D у троуглу SAD. Пошто је $\triangle SAD \cong \triangle SAB$, тачка K је уједно и подножје висине из B у $\triangle SAD$. Угао θ између страна SAD и SAB заправо је $\sphericalangle BKD$.



По услову задатка, ако су M и N редом средишта ивица AD и BC, троугао SMN је једнакостраничан, тј. $SM = SN = MN = a$. Како је $AM = \frac{1}{2}a$, Питагорина теорема нам даје $SA = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Даље, површина троугла SAD је $\frac{1}{2}SM \cdot AD = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}SA \cdot DK$, одакле је $DK = BK = \frac{2}{\sqrt{5}}a = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$. Како је $BD = a\sqrt{2}$, угао θ налазимо по косинусној теореми у $\triangle BKD$: $\cos\theta = \frac{KB^2 + KD^2 - BD^2}{2KB \cdot KD} = \frac{\frac{4}{5} + \frac{4}{5} - 2}{2 \cdot \frac{4}{5}} = -\frac{1}{4}$.

3Б.2. Прве две цифре $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ могу се одабрати на $5 \cdot 6 = 30$ начина. Међу шест бројева $\overline{ab0}, \overline{ab1}, \ldots, \overline{ab5}$ тачно два су дељива са пет ($\overline{ab0}$ и $\overline{ab5}$) и тачно два су дељива са три. Према томе, тражених бројева дељивих са 3, као и оних дељивих са 5, има по 60.

3Б.3. Кроз тачку O нацртајмо праве p и q редом паралелне правим AB и BC. Означимо растојања тачке P од правих p и q редом са x и y. Тада је $x^2+y^2=r^2$ и



$$\begin{aligned} &PA^2+PB^2+PC^2+PD^2 \\ =\ &\big((\tfrac{a}{2}+x)^2+(\tfrac{a}{2}+y)^2\big)+\big((\tfrac{a}{2}-x)^2+(\tfrac{a}{2}+y)^2\big) \\ &+\big((\tfrac{a}{2}-x)^2+(\tfrac{a}{2}-y)^2\big)+\big((\tfrac{a}{2}+x)^2+(\tfrac{a}{2}-y)^2\big) \\ =\ &2a^2+4x^2+4y^2=2a^2+4r^2. \end{aligned}$$

Друго решење. Имамо $PA^2=\big(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA}\big)^2=PO^2+OA^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}=r^2+\frac{1}{2}a^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OA}$. Сабирајући ову и аналогне једнакости за PB^2, PC^2 и PD^2 налазимо

$$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2=4r^2+2a^2+2\overrightarrow{PO}\cdot\overbrace{\cancel{\big(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\big)}}^{\vec{0}}=2a^2+4r^2.$$

3Б.4. Услов задатка за $(a,b,c,d)=(n,n{+}3,n{+}1,n{+}2)$ и $(a,b,c,d)=(n,n{+}2,n{+}1,n{+}3)$ даје нам

$$\begin{aligned} \cos 3x-\cos(2n{+}3)x&=2\sin nx\sin(n{+}3)x=2\sin(n{+}1)x\sin(n{+}2)x=\cos x-\cos(2n{+}3)x, \\ \cos 2x-\cos(2n{+}2)x&=2\sin nx\sin(n{+}2)x=2\sin(n{+}1)x\sin(n{+}3)x=\cos 2x-\cos(2n{+}4)x. \end{aligned}$$

Из прве једнакости следи $\cos x=\cos 3x$, тј. $0=\cos x-\cos 3x=2\sin x\sin 2x$. Према томе, $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ или $x=k\pi$ за неко $k\in\mathbb{Z}$.

Из друге једнакости следи $0=\cos(2n{+}2)x-\cos(2n{+}4)x=2\sin x\sin(2n{+}3)x$. Међутим, за $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ово не важи, јер је $|\sin x|=|\sin(2n{+}3)x|=1$.

За $x=k\pi$ услов задатка је задовољен, јер је $\sin ax=\sin bx=\sin cx=\sin dx=0$. То је и једино решење задатка.

3Б.5. Знамо да n и $S(n)$ дају исти остатак при дељењу са 9, тј. $S(n)=n-9k$ за неки цео број k. Дата једначина постаје $n(n-9k-1)=2020$, па број $n(n-1)=2020+9nk=1+3(673+3nk)$ даје остатак 1 при дељењу са 3. Међутим, ово је немогуће јер, када n даје остатке 0, 1 и 2 при дељењу са 3, број $n(n-1)$ даје редом остатке 0, 0 и 2.

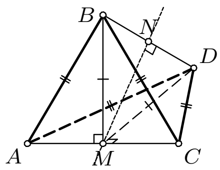
Према томе, једначина нема решења.

4Б.1. Дати скуп делимо у четири подскупа:

$$\{6\},\quad B=\{2,4,8,10\},\quad C=\{3,9\}\quad \text{и}\quad D=\{1,5,7\}.$$

Тражена пресликавања сликају 6 у 6, затим B у $B\cup\{6\}$ (што се може учинити на 5^4 начина), C у $C\cup\{6\}$ (3^2 начина) и D било где у A (10^3 начина). То укупно даје $5^4\cdot 3^2\cdot 10^3=5\,625\,000$ пресликавања.

4Б.2. Троуглови BAC и DAC су подударни, па су њихове одговарајуће тежишне дужи BM и DM једнаке. То значи да је MBD једнакокраки троугао, а MN његова висина, тј. $MN\perp BD$. На исти начин се доказује и да је $MN\perp AC$.



4Б.3. Записаћемо једначину у облику $(x-3)\log_2 x=-x^2+4x-3=(1-x)(x-3)$. Очигледно је $x=3$ једно решење. За $x\neq 3$ дељењем са $x-3$ добијамо $\log_2 x=1-x$, тј.

$$f(x)=1,\quad \text{где је}\quad f(x)=x+\log_2 x.$$

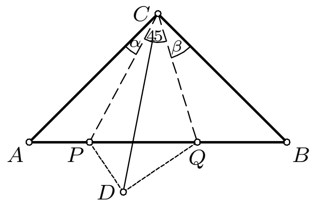
Видимо да је једно решење ове једначине $x=1$. С друге стране, функција $f(x)$ је строго растућа, па је $f(x)>1$ за $x>1$ и $f(x)<1$ за $0<x<1$, тако да других решења нема. Дакле, једина решења су $x=1$ и $x=3$.

4Б.4. Означимо $\sphericalangle ACP=\alpha$ и $\sphericalangle BCQ=\beta=45^\circ-\alpha$. Како је $\sphericalangle CQP=45^\circ+\beta=90^\circ-\alpha$, синусна теорема у $\triangle ACP$ и $\triangle CPQ$ даје $\frac{AP}{\sin\alpha}=\frac{CP}{\sin 45^\circ}$ и $\frac{PQ}{\sin 45^\circ}=\frac{CP}{\sin(90^\circ-\alpha)}=\frac{CP}{\cos\alpha}$, тј.

$$AP=CP\frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ}=PQ\frac{\cos\alpha}{\sin 45^\circ}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 45^\circ}=PQ\sin 2\alpha.$$

На исти начин добија се и $BQ=PQ\sin 2\beta=PQ\cos 2\alpha$. Сада се једнакост $AP^2{+}QB^2=PQ^2$

своди на тривијалну: $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$.



Друго решење. Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на праву CP. Тада је $\triangle CPD \cong \triangle CPA$, па је $DP = AP$. Штавише, $\sphericalangle DCQ = 45^\circ - \sphericalangle PCD = 45^\circ - \sphericalangle ACP = \sphericalangle QCB$. То заједно са $CD = CA = CB$ и $CQ = CQ$ даје $\triangle CQD \cong \triangle CQB$, па је $DQ = BQ$.

Најзад, из $\sphericalangle PDC = \sphericalangle PAC = 45^\circ$ и $\sphericalangle CDQ = \sphericalangle CBQ = 45^\circ$ следи $\sphericalangle PDQ = 90^\circ$. Сада је $PQ^2 = DP^2 + DQ^2 = AP^2 + BQ^2$.

4Б.5. Из једначине следи да број $x^3 + (x+1)^3 = 2021 + 9y$ даје остатак 5 при дељењу са 9. Међутим, куб целог броја при дељењу са 9 увек даје један од остатака 0, 1 и 8, па $x^3 + (x+1)^3$ може дати само остатке $0, 1, 2, 7, 8$. Према томе, једначина нема решења.