61. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санкт Петербург, Русија ≪*на даљину*≫ – понедељак, 21. септембар 2020.

1. Дати су конвексан четвороугао $ABCD$ и тачка P у његовој унутрашњости. При томе важе следећи услови:

$$\sphericalangle PAD : \sphericalangle PBA : \sphericalangle DPA = 1:2:3 = \sphericalangle CBP : \sphericalangle BAP : \sphericalangle BPC.$$

Доказати да се следеће три праве секу у једној тачки: симетрале унутрашњих углова $\sphericalangle ADP$ и $\sphericalangle PCB$ и симетрала дужи AB. *(Пољска)*

2. Дати су реални бројеви a,b,c,d за које важи $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ и $a+b+c+d=1$. Доказати неједнакост

$$(a+2b+3c+4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

(Белгија)

3. Дато је $4n$ каменчића тежина $1,2,3,\ldots,4n$. Сваки каменчић обојен је једном од n боја и сваком бојом обојена су тачно четири каменчића. Доказати да каменчиће можемо поделити на две гомиле тако да важе оба следећа услова:

- Укупне тежине каменчића у свакој гомили су исте;
- Свака гомила садржи по два каменчића од сваке боје. *(Мађарска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

61. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Санкт Петербург, Русија ≪*на даљину*≫ **– уторак, 22. септембар 2020.**

4. Дат је природан број $n > 1$. На једној планини постоји n^2 станица које су на међусобно различитим висинама. Свака од две компаније које управљају жичарама, A и B, има k жичара; свака жичара омогућује превоз од једне станице до друге која је на већој висини (без успутних стајања). Свих k жичара компаније A имају k различитих почетних станица и k различитих крајњих станица, при чему жичара која има вишу почетну станицу има и вишу крајњу станицу. Исто важи и за компанију B. Кажемо да једна компанија *повезује* две станице ако је могуће из ниже стићи у вишу коришћењем једне или више жичара те компаније (при чему друга кретања између станица нису дозвољена).

Одредити најмањи природан број k за који сигурно постоје две станице које повезују обе компаније. *(Индија)*

5. Дат је шпил од $n > 1$ карата. На свакој карти је написан један природан број. Шпил има особину да је аритметичка средина бројева написаних на произвољном пару карата из шпила једнака геометријској средини бројева написаних на неком скупу који се састоји од једне или више карата из шпила.

За које n следи да бројеви написани на свим картама шпила морају бити једнаки? *(Естонија)*

6. Доказати да постоји позитивна константа c таква да важи следеће тврђење:

> Нека је $n > 1$ природан број и S скуп од n тачака у равни такав да је растојање између сваке две тачке скупа S барем 1. Тада следи да постоји права ℓ која раздваја S таква да је растојање од било које тачке скупа S до праве ℓ барем $cn^{-1/3}$.

(Права ℓ *раздваја* скуп тачака S ако нека дуж чији су крајеви у скупу S сече праву ℓ.)

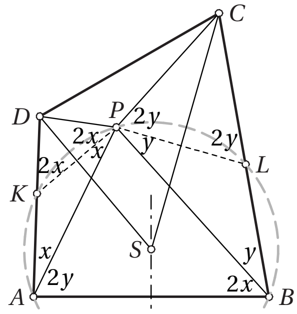
Напомена. За слабије резултате у којима је $cn^{-1/3}$ замењено са $cn^{-\alpha}$ могу се добити поени у зависности од вредности константе $\alpha > 1/3$. *(Тајван)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 бодова

РЕШЕЊА

1. Означимо $\sphericalangle PAD = x$ и $\sphericalangle CBP = y$.



Посматрајмо тачке K и L редом на полуправим DA и CB такве да је $DK = DP$ и $CL = CP$. Из $\sphericalangle ADP = 180^\circ - 4x$ следи $\sphericalangle DPK = \sphericalangle PKD = 2x = \sphericalangle PBA$, што значи да тачка K лежи на кругу ω описаном око $\triangle APB$. Аналогно, и тачка L лежи на кругу ω.

Симетрале углова ADP и PCB су уједно и симетрале дужи PK и PL, те се оне секу у центру S круга ω, а јасно је да је $SA = SB$.

2. Како је на основу тежинске неједнакости између средина $a^a b^b c^c d^d \leqslant a\cdot a + b\cdot b + c\cdot c + d\cdot d = a^2+b^2+c^2+d^2$, довољно је доказати неједнакост

$$(a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2) < 1 = (a+b+c+d)^3, \tag{$*$}$$

а она се доказује једноставним развијањем обеју страна. Наиме,

$$\begin{aligned}(a+b+c+d)^3 &= (a+3b+3c+3d)(a^2+b^2+c^2+d^2)\\ &\quad + 2(a-b)b^2 + 2(a-c)c^2 + 2(a-d)d^2 + 6(abc+abd+acd+bcd)\\ &\geqslant (a+2b+3c+4d)(a^2+b^2+c^2+d^2).\end{aligned}$$

Напомена. Неједнакост $(*)$ се може доказати на много начина. Означимо са L леву страну. За почетак, важи $a+2b+3c+4d \leqslant a+3b+3c+3d = 3-2a$.

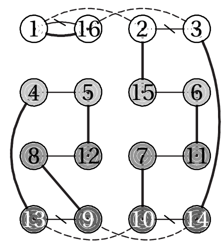
- ако је $a < \frac{1}{2}$, имамо $a^2+b^2+c^2+d^2 \leqslant a(a+b+c+d) = a$, те је $L \leqslant a(3-2a) = 1-(1-2a)(1-a) < 1$.
- ако је $a \geqslant \frac{1}{2}$, имамо $a^2+b^2+c^2+d^2 < a^2+(b+c+d)^2 = a^2+(1-a)^2 = 1-2a+2a^2$, те је $L < (3-2a)(1-2a+2a^2) = 1-2(1-a)^2(2a-1) \leqslant 1$.

3. Довољно је сачинити гомилу од n парова каменчића укупне тежине $4n+1$ тако да свака боја буде заступљена тачно двапут.

Посматрајмо граф $\mathcal{G}$ са n темена која одговарају бојама. За сваки пар каменчића са збиром тежина $4n+1$ нацртајмо једну грану између њихових боја. Граф $\mathcal{G}$ може имати петље и вишеструке гране, али свако његово теме имаће степен 4. Тражена гомила одговараће подграфу овог графа у коме свих n темена имају степен 2, па треба конструисати један такав подграф.

Пошто свако теме има паран степен, у свакој повезаној компоненти графа $\mathcal{G}$ можемо да нађемо Ојлеров циклус и обојимо његове гране наизменично црно и бело. Пошто се у сваком темену графа $\mathcal{G}$ састају по две црне и беле гране, подграф одређен црним гранама има сва темена степена 2, чиме је циљ испуњен.

Друго решење. Два каменчића спојићемо *дебелом* граном ако је збир њихових маса $4n+1$. Осим тога, у свакој боји поделићемо каменчиће произвољно у два пара који ће представљати *танке* гране. Овако каменчићи чине граф $\mathcal{G}$ у коме из сваког темена излазе по једна дебела и танка грана (допуштене су и дупле гране). Овај граф је унија дисјунктних циклуса чије су гране наизменично дебеле и танке. Сваки циклус садржи 0, 2 или 4 каменчића у свакој боји.



Приметимо да, ако се ниједна боја не јавља у два циклуса, онда су дужине свих циклуса дељиве са 4. У том случају довољно је из сваког циклуса распоредити дебеле гране (заједно са теменима) наизменично на леву и десну гомилу. Заиста, тако ће свака танка грана имати по једно теме на обема гомилама.

Остаје случај када у некој боји имамо две танке гране, рецимо ab и cd, у два различита циклуса. Заменом ових двеју грана (исто танким) гранама ac и bd можемо да спојимо та два циклуса. Настављањем овог поступка коначно ћемо добити граф $\mathcal{G}$ у коме се свака боја јавља само у једном циклусу.

4. *Одговор:* n^2-n+1.

Следећи пример показује да за $k=n^2-n$ услов не мора бити задовољен:

- жичаре компаније A возе од станице i до $i+1$ кад год $n\nmid i+1$;
- жичаре компаније B возе од станице i до $i+n$ кад год је $i\leqslant n^2-n$.

Претпоставимо сада да је $k\geqslant n^2-n+1$. *Линијама* зовемо максималне низове станица у којима сваке две узастопне повезују жичаре исте компаније. Линија може бити и једночлана. Прве станице линија компаније A су оне у које не води ниједна жичара те компаније, а таквих има $n^2-k\leqslant n-1$. Следи да компанија A, а слично и компанија B, има највише $n-1$ линија. Бар једна линија компаније B има више од $\frac{n^2-1}{n-1}=n+1$ станица, а неке две од њих морају припадати и истој линији компаније A. Дакле, обе компаније повезују те две станице.

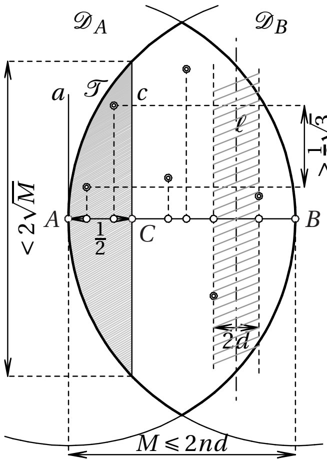
Напомена. Исти доказ ради и ако је број станица N: тада је одговор $N-\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1$.

5. *Одговор:* за свако n.

Означимо бројеве са $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ и претпоставимо да нису сви једнаки. Пошто дељење свих бројева константом чува особину шпила, можемо да сматрамо не умањујући општост да ниједан прост број не дели све бројеве.

Одаберимо прост број $p\mid a_n$. Постоји индекс i такав да $p\nmid a_i$ и $p\mid a_{i+1},a_{i+2},\ldots,a_n$. По услову задатка, број $\frac{a_i+a_n}{2}>a_i$ је геометријска средина неколико бројева, од којих је бар један већи од a_i и самим тим дељив са p. Следи да је и број $\frac{a_i+a_n}{2}$ дељив са p, тј. да $p \mid a_i$, што је контрадикција.

6. Одаберимо тачке $A, B \in S$ за које је растојање $M = AB$ максимално. Читав скуп S лежи у пресеку дискова $\mathcal{D}_A(A, M)$ и $\mathcal{D}_B(B, M)$.



Ортогоналне пројекције тачака скупа S деле дуж AB на $n-1$ дужи. Ако највећа од тих дужи има дужину $2d$, онда њена симетрала ℓ раздваја скуп S, а све тачке из S су на растојању бар d од праве ℓ. Приметимо да је $M \leqslant (n-1) \cdot 2d < 2nd$.

Нека је C тачка на дужи AB таква да је $AC = \frac{1}{2}$, а a и c редом нормале на праву AB у тачкама A и C. Пошто су пројекције тачака скупа S на међусобном растојању највише $2d$, бар $\frac{1}{4d}$ њих лежи на дужи AC. Дакле, бар $k = \lceil \frac{1}{4d} \rceil$ тачака из S лежи у делу $\mathcal{T}$ диска $\mathcal{D}_B$ између правих a и c.

Област T је кружни одсечак дужине $2\sqrt{M^2 - (M-\frac{1}{2})^2} < 2\sqrt{M}$. С друге стране, пошто су сваке две од k тачака из $S \cap \mathcal{T}$ на растојању бар 1, њихове пројекције на праву c су на растојању бар $\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следи да је $(k-1)\frac{\sqrt{3}}{2} < 2\sqrt{M}$, тј. $k < 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{M} < 4\sqrt{M}$. Све у свему,

$$\frac{1}{4d} < k < 4\sqrt{M} < 4\sqrt{2nd}, \quad \text{тј.} \quad d > \frac{1}{8\sqrt[3]{n}},$$

па се у формулацији задатка може узети $C = \frac{1}{8}$.