понедељак, 21. септембар 2020

Задатак 1. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Тачка P је у унутрашњости $ABCD$. При томе важе следеће пропорције:

$$\sphericalangle PAD : \sphericalangle PBA : \sphericalangle DPA = 1 : 2 : 3 = \sphericalangle CBP : \sphericalangle BAP : \sphericalangle BPC.$$

Доказати да се следеће три праве секу у једној тачки: симетрале унутрашњих углова $\sphericalangle ADP$ и $\sphericalangle PCB$ и симетрала дужи AB.

Задатак 2. Дати су реални бројеви a, b, c, d за које важи $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ и $a + b + c + d = 1$. Доказати неједнакост

$$(a + 2b + 3c + 4d)\, a^a\, b^b\, c^c\, d^d < 1.$$

Задатак 3. Дато је $4n$ каменчића тежина $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Сваки каменчић обојен је једном од n боја и сваком бојом обојена су тачно четири каменчића. Доказати да каменчиће можемо поделити на две гомиле тако да важе оба следећа услова:

- Укупне тежине каменчића у свакој гомили су исте.
- Свака гомила садржи по два каменчића од сваке боје.

Време за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

уторак, 22. септембар 2020

Задатак 4. Дат је природан број $n > 1$. На једној планини постоји n^2 станица које су на међусобно различитим висинама. Свака од две компаније које управљају жичарама, A и B, има k жичара; свака жичара омогућује превоз од једне станице до друге која је на већој висини (без успутних стајања). Свих k жичара компаније A имају k различитих почетних станица и k различитих крајњих станица, при чему жичара која има вишу почетну станицу има и вишу крајњу станицу. Исто важи и за компанију B. Кажемо да једна компанија *повезује* две станице ако је могуће из ниже стићи у вишу коришћењем једне или више жичара те компаније (при чему друга кретања између станица нису дозвољена).

Одредити најмањи природан број k за који сигурно постоје две станице које повезују обе компаније.

Задатак 5. Дат је шпил од $n > 1$ карата. На свакој карти је написан један природан број. Шпил има особину да је аритметичка средина бројева написаних на произвољном пару карата из шпила једнака геометријској средини бројева написаних на неком скупу који се састоји од једне или више карата из шпила.

За које n следи да бројеви написани на свим картама шпила морају бити једнаки?

Задатак 6. Доказати да постоји позитивна константа c таква да важи следеће тврђење:

Нека је $n > 1$ природан број и $\mathcal{S}$ скуп од n тачака у равни такав да је растојање између сваке две тачке скупа $\mathcal{S}$ барем 1. Тада следи да постоји права ℓ која раздваја $\mathcal{S}$ таква да је растојање од било које тачке скупа $\mathcal{S}$ до праве ℓ барем $cn^{-1/3}$.

(Права ℓ *раздваја* скуп тачака $\mathcal{S}$ ако нека дуж чији су крајеви у скупу $\mathcal{S}$ сече праву ℓ.)

Напомена. За слабије резултате у којима је $cn^{-1/3}$ замењено са $cn^{-\alpha}$ могу се добити поени у зависности од вредности константе $\alpha > 1/3$.

Language: Serbian

Време за израду: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.