Contents

Day 1

Problem 1. In a triangle ABC with a right angle at C, the angle bisector AL (where L is on segment BC) intersects the altitude CH at point K. The bisector of angle BCH intersects segment AB at point M. Prove that $CK = ML$. *(Alexey Doledenok)* ru

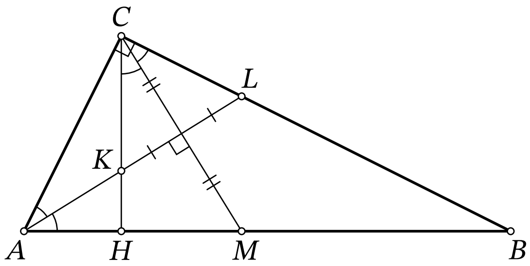


Figure 1: for the solution of problem 1

Solution. Since $\angle BCH = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAC$, then

$$\angle ACM = 90^\circ - \angle BCM = 90^\circ - \angle BAC/2 = 90^\circ - \angle CAL\,,$$

therefore the bisectors AL and CM are perpendicular (fig. 1). In the triangle ACM the line AL contains the bisector and the altitude, so AL is the perpendicular bisector to the segment CM. Similarly, in the triangle CKL the line CM contains the angle bisector and the altitude, so CM is the perpendicular bisector to KL. Then $CKML$ is a rhombus, so $CK = ML$. □

Marking scheme

Maximum of the following points is taken:

7 p. for a complete solution;

2 p. for proving $CK = CL$;

2 p. for proving $CL = ML$.

Problem 2. Does there exist a positive integer n such that all its digits (in the decimal system) are greater than 5, while all the digits of n^2 are less than 5? *(Nazar Agakhanov)* ru

Answer: no.

Solution. Assume that, on the contrary, there exists such n. Suppose that n consists of k digits, thus

$$10^k > n \geq \underbrace{666...6}_{k} = \frac{2}{3}(10^k - 1)\,.$$

If $n = \underbrace{666...6}_{k}$, then the last digit of n^2 equals 6. Otherwise,

$$10^k > n > \frac{2}{3} \cdot 10^k\,,$$

and, hence,

$$10^{2k} - 1 = \underbrace{999...9}_{2k} \geq n^2 > \frac{4}{9} \cdot 10^{2k} > \frac{4}{9} \cdot \underbrace{999...9}_{2k} = \underbrace{444...4}_{2k}.$$

Finally,

$$\underbrace{999...9}_{2k} \geq n^2 > \underbrace{444...4}_{2k},$$

which means that n^2 consist of $2k$ digits, and all its digits can not be less or equal than 4. $\square$

Marking scheme

Maximum of the following points is taken:

7 p. for a complete solution;

6 p. for an otherwise complete solution that contains minor arithmetic flaws, like computational errors in proofs of some rough estimates that are clearly true anyway.

4 p. for a correct proof of the key inequality $\underbrace{444...4}_{2k} < \underbrace{666...67}_{k}^2$, if the further logical part is absent or incorrect (for example, the total number of digits is not estimated properly or the solution is based on vague manipulations with digits).

3 p. for a correct and precise statement of the key inequality $\underbrace{444...4}_{2k} < \underbrace{666...67}_{k}^2$ and clear further logical part, but without a formal proof of this inequality.

1 p. for an attempt to prove an inequality that is similar in idea to the inequality $\underbrace{444...4}_{2k} < \underbrace{666...67}_{k}^2$.

The following advancement is not awarded with points:

0 p. for noticing that the first digit must be 6 and the last digit must be 8 or 9. The same goes for every specific finite prefix or suffix of the number (for example when all the possibilities for the first or the last 10 digits of the number are described).

Problem 3. Let $n > 1$ be a given integer. The Mint issues coins of n different values $a_1, a_2, ...,$ a_n, where each a_i is a positive integer (the number of coins of each value is unlimited). A set of values $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ is called *lucky,* if the sum $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ can be collected in a unique way (namely, by taking one coin of each value). ru

(a) Prove that there exists a lucky set of values $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ with

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < n2^n.$$

(b) Prove that every lucky set of values $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ satisfies

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n > n2^{n-1}.$$

(Ilya Bogdanov)

Solution of the part (a). We will show that the values $a_i = 2^n - 2^{n-i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, make a lucky set. Notice here that

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = n2^n - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = (n-1)2^n + 1 < n2^n .$$

Assume now that S is collected by some coins,

$$S = \sum_{k=1}^{p} a_{i_k} = p2^n - \sum_{k=1}^{p} 2^{j_k} ,$$

where $j_k = n - i_k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Since $S > (n-1)2^n$, we get $p \geq n$, and

$$\sum_{k=1}^{p} 2^{j_k} = (p - n + 1)2^n - 1 \equiv -1 \pmod{2^n} .$$

Without loss of generality, assume that $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_p$. We claim that $j_k \leq k - 1$ for all $k = 1, 2, \dots, n$. Arguing indirectly, choose a minimal $k \leq n$ such that $j_k \geq k$. Then

$$-1 \equiv \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \pmod{2^k},$$

which is impossible since

$$0 \leq \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \leq \sum_{s=1}^{k-1} 2^{s-1} = 2^{k-1} - 1 .$$

This contradiction verifies the claim.

Finally we get

$$(p - n + 1)2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2^{j_k} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{j_k} \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{n-1} = 2^n - 1 + (p - n)2^{n-1} ,$$

or $(p - n)2^n \leq (p - n)2^{n-1}$. This may happen only when $p = n$, and all inequalities turn into equalities, which yields $j_k = k - 1$. In other words, $S = a_1 + \dots + a_n$ is indeed the unique way to collect S by the suggested coins. □

Remark 1. A different way to verify the claim is to take the multiset $\{2^{j_1}, 2^{j_2}, \dots, 2^{j_p}\}$ and modify it repeatedly by merging two copies of some 2^j into a single instance of 2^{j+1}. When the process stops, all numbers in the multiset are distinct, and the sum is still congruent to -1 modulo 2^k, so that the multiset should contain all powers 2^0, ..., 2^{k-1}. Thus, at the end of the process, the multiset contains k numbers smaller than 2^k, and therefore it contained at least k such numbers before the process.

Remark 2. There are several working examples. E.g., one may set $a_1 = 2^{n-1}$ and $a_i = 2^n + 2^{i-2}$ for $i = 2, 3, \dots, n$.

Solution of the part (b). Let us show that $a_1 \geq 2^{n-1}$ in any lucky collection of n coins $a_1 < \dots < a_n$; this immediately yields $S = a_1 + \dots + a_n > na_1 \geq n2^{n-1}$.

Denote $a = a_1$, and let Σ be the multiset of all sums which can be collected using coins a_2, a_3, ..., a_n, each taken at most once; thus, Σ consists of exactly 2^{n-1} numbers (some of which may be equal to each other), the minimal of those numbers is 0, while the maximal one is $a_2 + a_3 + \dots + a_n$.

Assume that Σ contains two numbers, $S_1 \geq S_2$, which are congruent modulo a, so that $S_1 = S_2 + at$ for some integer $t \geq 0$. Then there exists an alternative way to collect S by the coins, namely

$$S = (S - S_1) + S_2 + at$$

(which means that we take the coins a_1, ..., a_n, remove the collection with sum S_1, add the collection with sum S_2, and add t coins of value a). This violates the luckiness.

Thus, Σ contains 2^{n-1} numbers pairwise incongruent modulo a, which yields $a \geq 2^{n-1}$. □

Marking scheme

The sum of the following points is taken:

3 p. for proving part (a). In the absence of a complete proof, the following advancement is awarded with points:

- 1 p. for providing an example of lucky set satisfying (per the jury's knowledge) the condition of part (a) for each n, but without correct proof that the example is indeed valid.

4 p. for proving part (b).

Day 2

Problem 4. Positive numbers a, b and c satisfy $a^2 = b^2 + bc$ and $b^2 = c^2 + ac$. Prove that $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. ru
(Vladimir Bragin)

Solution. We can rewrite the system in a following way

$$\begin{cases} a^2 = (b+c)b\,; \\ (b+c)(b-c) = ac\,. \end{cases}$$

Multiplying the second equation by b, we obtain

$$\begin{cases} a^2 = (b+c)b\,; \\ b(b+c)(b-c) = bac\,. \end{cases}$$

Next we replace $b(b+c)$ with a^2 in the second equation and get $a^2(b-c) = abc$.

Now we can divide both sides by a^2bc and obtain $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$. □

Another solution. By putting $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, the condition transforms to

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{yz}; \\ \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{xz}; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2z = x^2z + x^2y; \\ xz^2 = xy^2 + y^2z. \end{cases}$$

Transferring all terms to the right side and taking the sum of the two equations, we get

$$\begin{aligned} &0 = (x^2z + x^2y - y^2z) + (xy^2 + y^2z - xz^2) \quad \Rightarrow \\ &0 = x(xy + xz + y^2 - z^2) \quad \Rightarrow \\ &0 = x(y + z)(x + y - z). \end{aligned}$$

In the last product the factors x and $y + z$ are positive, so $x + y - z = 0$, and therefore

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = x + y = z = \frac{1}{c}. \qquad \square$$

A one-line solution.

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \cdot abc(b + c) = a(c^2 + ac - b^2) + c(b^2 + bc - a^2) = 0. \qquad \square$$

Note. Observe that $b + c > a > b > c$. If one constructs a triangle ABC with sides $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, the equations given in the problem statement will be equivalent to $\angle A = 2\angle B$ and $\angle B = 2\angle C$, respectively. It follows that $a : b : c = \sin(\frac{4\pi}{7}) : \sin(\frac{2\pi}{7}) : \sin(\frac{\pi}{7})$, which provides another way to obtain the desired identity.

Marking scheme

Any complete solution is awarded 7 points.

Problem 5. There is an empty table with 2^{100} rows and 100 columns. Alice and Eva take turns filling the empty cells of the first row of the table, Alice plays first. In each move, Alice chooses an empty cell and puts a cross in it; Eva in each move chooses an empty cell and puts a zero. When no empty cells remain in the first row, the players move on to the second row, and so on (in each new row Alice plays first). ru

The game ends when all the rows are filled. Alice wants to make as many different rows in the table as possible, while Eva wants to make as few as possible. How many different rows will be there in the table if both follow their best strategies? *(Denis Afrizonov)*

Answer: 2^{50}.

Solution. First, we prove that Eva can achieve there to be no more than 2^{50} different rows. Eva can divide every row into 50 "domino" rectangles 1×2. When Alice puts a cross in one cell of a domino, Eva puts a zero in another cell of the same domino. Upon the completion of each row every domino will be one of two types (cross-zero or zero-cross), so there will be no more than 2^{50} different rows.

Next, let us prove that Alice can achieve at least 2^{50} different rows. It is sufficient to show that as long as there are less than 2^{50} already filled rows, Alice can make the next row different from all the previous ones.

Consider the next ("new") row that the players fill out. Let's call *toxic* those rows among the previously filled ones that match the new row by the symbols that are already filled in it. (Thus, before Alice's first move in the new row, all the previously filled rows will be toxic.) Let us prove that with each of her moves, Alice can reduce the number of toxic rows by half. If initially this number was less than 2^{50}, then at the end it will be less than 1, that is, the new row will not match any of the previous ones.

Suppose that Alice and Eve have each made i moves in the new row. Let us denote the current number of toxic rows by T. Each of them matches a new row by i crosses; hence, $50-i$ crosses in a toxic row are located above empty cells of the new row. Then there are exactly $(50-i)T$ crosses in toxic rows over these empty cells. There are $100-2i$ empty cells; by the pigeonhole principle, there is an empty cell over which there are at most $\frac{1}{2}T$ crosses. This is the cell in which Alice should put a cross with her $(i+1)$-th move. □

Marking scheme

The sum of the following points is taken:

- 5 p. for proving that Alice can achieve $\geq 2^{50}$ different rows.
- 2 p. for proving that Eva can achieve $\leq 2^{50}$ different rows.

The following advancement is not awarded with points:

- 0 p. for the correct answer without further reasoning.

Problem 6. Consider a convex pentagon $ABCDE$. Let A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 be the intersection points of the pairs of diagonals BD and CE, CE and DA, DA and EB, EB and AC, AC and BD, respectively. Prove that if four of the five quadrilaterals AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E, EA_1E_1A are cyclic, then the fifth one is also cyclic. *(Nairi Sedrakyan, Yuliy Tikhonov)* ru

Solution 1. Suppose that the quadrangles AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E are cyclic. Then $\angle ABD = \angle AB_1E = \angle EBC$, therefore, $\angle ABE = \angle CBD$. Similarly, we get that $\angle BCA = \angle DCE$ and $\angle CDB = \angle EDA$.

Denote the lengths of the sides of the pentagon by a, b, c, d, e as shown in fig. 2. We multiply the side lengths of the triangles AED, BCD, BAE by b, e, c respectively; from the obtained triangles we can compose the shape shown in fig. 3a. We have $\angle NMP = \angle EDA = \angle CDB = \angle PKN$, therefore, the points M, N, P, K are concyclic. Similarly, we get that the points N, P, K, Q are concyclic. Hence, all five points M, N, P, K, Q are concyclic.

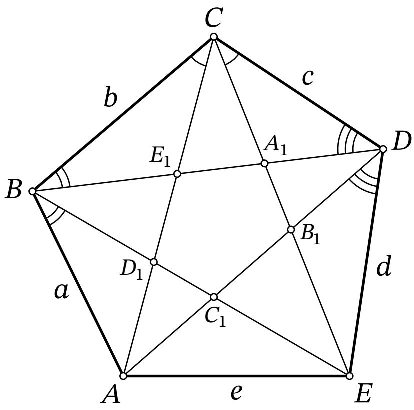


Figure 2: for the solution 1 of problem 6

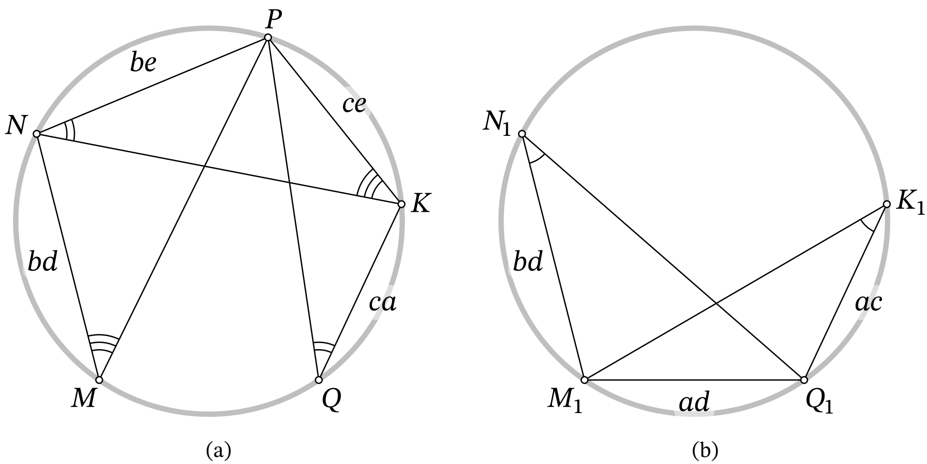


Figure 3: for the solution 1 of problem 6

Now we multiply the lengths of the sides of the triangles ABC and ECD by d and a, respectively; from the obtained triangles we can compose the figure shown in fig. 3b. It is clear that the points K_1, Q_1, M_1, N_1 are also concyclic.

It is enough to prove the equality of the arcs MN and M_1N_1, since in such case we have $\angle BAC = \angle M_1Q_1N_1 = \angle MPN = \angle DAE$, whence $\angle EAC = \angle BAD = \angle BA_1C$, that is, the quadrilateral AE_1A_1E is cyclic.

Note that $\angle BAD + \angle DEB = \angle BA_1C + \angle DE_1C = \pi - \angle ACE = \angle CAE + \angle AEC$, therefore $\angle BAC + \angle CED = \angle DAE + \angle BEA < \pi$. We have $\angle MPN + \angle QPK = \angle DAE + \angle BEA = \angle BAC + \angle CED = \angle M_1Q_1N_1 + \angle K_1M_1Q_1$. We get that $MN = M_1N_1$, $QK = Q_1K_1$ and $\widehat{MN} + \widehat{QK} = \widehat{M_1N_1} + \widehat{Q_1K_1} < 2\pi$.

Let us forget about the rest of the construction, except for the four arcs indicated in the last equality. We can move the arc QK along the circle so that its midpoint becomes diametrically opposite to the midpoint of the arc MN, and move Q_1K_1 similarly. Then $MN \parallel QK$ and $M_1N_1 \parallel Q_1K_1$, and isosceles trapezoids $MNKQ$ and $M_1N_1K_1Q_1$ are congruent, since they have the same lengths of the bases and the same angle between diagonals (the angle can be expressed as the half-sum of the arcs). Hence it follows that in the original construction $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{M_1N_1}$ as well. □

Remark. It is not hard to prove that the constructions in fig. 3 can in fact be perfectly aligned, coinciding at the corresponding points. For example, it is enough to notice that $\angle MPQ = \angle BCD - \angle DAE - \angle AEB = \angle BCD - \angle BC_1A = \angle BCA = \angle M_1N_1Q_1$.

Solution 2. As in the previous solution, suppose that the quadrilaterals AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E are cyclic and note the same three pairs of equal angles. Let us denote these angles by β, γ, δ (at the vertices B, C, D, respectively); in addition, we denote $\alpha = \angle BAC$, $\alpha_1 = \angle EAD$, $\varepsilon = \angle DEC$, $\varepsilon_1 = \angle BEA$ (fig. 4). It is enough to prove that $\alpha = \alpha_1$ and $\varepsilon = \varepsilon_1$, because the cyclicity of the quadrilateral AE_1A_1E will follow from $\angle EAC = \angle BAD = \angle BA_1C$.

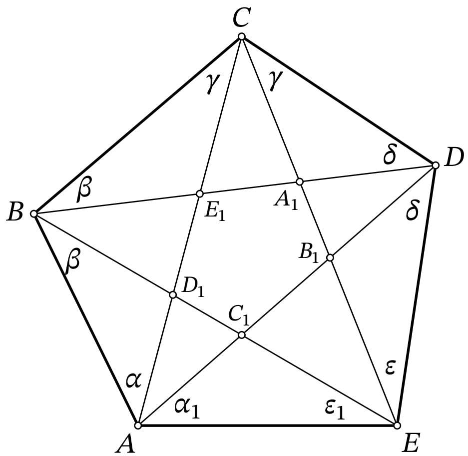


Figure 4: for the solution 2 of problem 6

For this, in turn, it is sufficient to establish that

$$\alpha + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon_1 < \pi \quad \text{и} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon_1}.$$

Indeed, considering triangles with pairs of angles α, ε and α_1, ε_1, it is easy to see that under this condition, their third angles are equal, as are the ratios of the sides adjacent to them, and the required equality of angles follows from the similarity of triangles.

As noted in the previous solution, $\alpha + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon_1 < \pi$ follows from $\angle BAD + \angle DEB = \angle BA_1C + \angle DE_1C = \pi - \angle ACE = \angle CAE + \angle AEC$.

As for the ratios of the sines, we can multiply five theorems of sines:

$$1=\frac{EA}{AB}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{DE}{EA}=\frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon_1}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sin\delta}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon_1}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha}. \qquad \square$$

Solution 3. Let us introduce complex coordinates on the plane (in an arbitrary way) and identify vectors with complex numbers.

We will use the fact that the quadrilateral AE_1A_1E is cyclic if and only if

$$\frac{\overrightarrow{AE_1}\cdot\overrightarrow{A_1E}}{\overrightarrow{E_1A_1}\cdot\overrightarrow{EA}}\in\mathbb{R}.$$

Moreover, the vectors in this condition can be replaced by collinear vectors; this will not change the realness of the expression.

Denote $z_1=\overrightarrow{AC}$, $z_2=\overrightarrow{BD}$, $z_3=\overrightarrow{CE}$, $z_4=\overrightarrow{DA}$, $z_5=\overrightarrow{EB}$. Then the above condition can be rewritten as

$$\frac{z_1\cdot z_3}{z_2(z_1+z_3)}\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow\quad\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_3}\right)z_2\in\mathbb{R}\quad\Leftrightarrow$$
$$(w_1+w_3)\cdot\overline{w_2}\in\mathbb{R},$$

where $w_i=z_i^{-1}$. For each of the rest of the five quadrilaterals its cyclicity will be equivalent to a similar condition, with a cyclic shift of indices. (For the rest of the proof we consider indices modulo 5.)

But the sum of all five expressions appearing in these conditions is always a real number:

$$\sum_{k=1}^{5}(w_k+w_{k+2})\cdot\overline{w_{k+1}}=\sum_{k=1}^{5}(w_k\cdot\overline{w_{k+1}}+w_{k+1}\cdot\overline{w_k})\in\mathbb{R},$$

which follows from $u\cdot\overline{v}+\overline{u}\cdot v\in\mathbb{R}$. This means that if four summands are real, then the fifth is also real. $\square$

Solution 4.[1] As in the first two solutions, suppose that the quadrilaterals AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E are cyclic and note the same three pairs of equal angles. In particular, denote $\gamma=\angle BCA=\angle ECD$; choose the sign of signed angles so that $\angle(EC,DC)=+\gamma$.

Denote by C_2 the intersection point of the lines BA and DE (fig. 5). Observe that

$$\angle(DE,BA)=\angle(DA,BA)+\angle(DE,DA)=\angle(EC,DB)+\angle(DB,DC)=\angle(EC,DC)=\gamma\neq 0,$$

which means that those lines indeed intersect. Moreover, those are the rays BA and DE that intersect (and not AB and ED), since otherwise $\angle AC_2E=\pi-\gamma>\angle ACE$ would lead to a contradiction.

[1] based on the solutions found (independently) by participants Boris Stanković and Mijail Guttierrez after the contest.

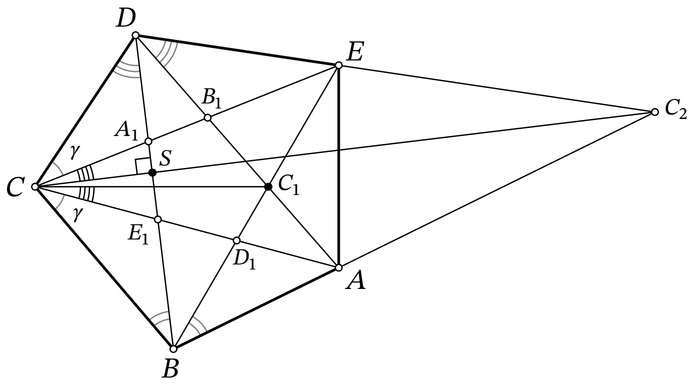


Figure 5: for the solution 4 of problem 6

By isogonal line lemma we get that CC_1 and CC_2 are isogonals with respect to angle BCD. Denote by S the intersection point of the lines CC_2 and BD. Observe that points C_1 and S lie on isogonals with respect to each of the angles ABC, BCD, CDE. It follows that C_1 and S are isogonal conjugate points with respect to the quadrilateral CBC_2D (one can prove this by considering the reflections of C_1 about the sides of the quadrilateral, and showing that they lie on a circle with center S).

But then we have $\angle CSB + \angle DSC_2 = \pi$ (a known property of points that have an isogonal conjugate with respect to a quadrilateral), which in this case means $CC_2 \perp BD$.

All that remains is to calculate some angles:

$$\angle AA_1E = \angle ABB_1 = \angle ABE + \angle EBB_1 = \angle DBC + \angle C_1CB_1 = \angle DBC + \angle E_1CC_2 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma\,,$$
$$\angle AE_1E = \angle D_1DE = \angle ADE + \angle D_1DA = \angle CDB + \angle D_1CC_1 = \angle CDB + \angle C_2CA_1 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma\,. \quad \square$$

Marking scheme

Maximum of the following points is taken:

7 p. for a complete solution;

3 p. for reducing the problem to the relation

$$\frac{AD_1}{BD_1} \cdot \frac{BE_1}{CE_1} \cdot \frac{CA_1}{DA_1} \cdot \frac{DB_1}{EB_1} \cdot \frac{EC_1}{AC_1} = 1\,. \tag{*}$$

2 p. for showing

$$\sin\angle BAC : \sin\angle DEC = \sin\angle EAD : \sin\angle BEA\,. \tag{**}$$

(Can also be expressed as a double ratio of sines that equals 1.)

The following advancements are not awarded with points:

0 p. for incomplete computations (coordinates, complex numbers, vectors, trigonometry, etc.)

0 p. for just angle chasing (in particular, for proving $\angle ABE = \angle CBD$, etc.);

0 p. for applying sine law, Ceva theorem, etc., unless it leads to (**);

0 p. for applying power-of-a-point theorem, unless it leads to (*).

День 1

Задача 1. В треугольнике ABC с прямым углом C биссектриса AL (где L лежит на отрезке BC) и высота CH пересекаются в точке K. Биссектриса угла BCH пересекает отрезок AB в точке M. Докажите, что $CK = ML$. *(Alexey Doledenok)* en

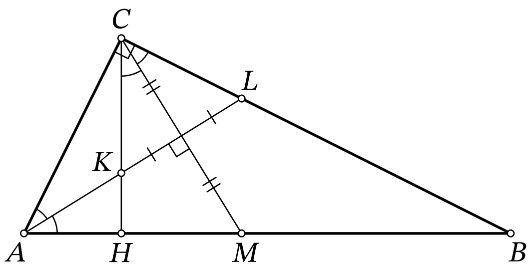


Рис. 6: к решению задачи 1

Решение. Поскольку $\angle BCH = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAC$, то

$$\angle ACM = 90^\circ - \angle BCM = 90^\circ - \angle BAC/2 = 90^\circ - \angle CAL\,,$$

то есть биссектрисы AL и CM перпендикулярны (рис. 6). В треугольнике ACM прямая AL содержит биссектрису и высоту, поэтому AL является серединным перпендикуляром к отрезку CM. Аналогично в треугольнике CKL прямая CM содержит биссектрису и высоту, поэтому CM является серединным перпендикуляром к KL. Тогда $CKML$ — ромб, откуда $CK = ML$. □

Задача 2. Существует ли такое целое положительное число n, что все его цифры (в десятичной записи) больше 5, а все цифры числа n^2 меньше 5? *(Nazar Agakhanov)* en

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что, напротив, существует такое n. Пусть n состоит из k цифр, так что

$$10^k > n \geqslant \underbrace{666\ldots6}_{k} = \frac{2}{3}(10^k - 1)\,.$$

Если $n = \underbrace{666\ldots6}_{k}$, то последняя цифра числа n^2 равна 6. Иначе

$$10^k > n > \frac{2}{3}\cdot 10^k\,,$$

и, следовательно,

$$10^{2k} - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{2k} \geqslant n^2 > \frac{4}{9}\cdot 10^{2k} > \frac{4}{9}\cdot \underbrace{999\ldots9}_{2k} = \underbrace{444\ldots4}_{2k}\,.$$

Таким образом,

$$\underbrace{999...9}_{2k} \geqslant n^2 > \underbrace{444...4}_{2k},$$

значит, n^2 состоит из $2k$ цифр, при этом все эти цифры не могут оказаться меньшими или равными 4. $\square$

Задача 3. Дано целое число $n > 1$. Монетный двор выпускает монеты n различных номиналов $a_1, a_2, ..., a_n$, где каждый номинал a_i — целое положительное число (количество монет каждого номинала не ограничено). Множество номиналов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ назовем *удачным*, если сумму $a_1 + a_2 + ... + a_n$ можно набрать монетами ровно одним способом (а именно, взяв по одной монете каждого номинала). en

(a) Докажите, что существует такое удачное множество номиналов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, что

$$a_1 + a_2 + ... + a_n < n2^n.$$

(b) Докажите, что для любого удачного множества номиналов $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > n2^{n-1}.$$

(Ilya Bogdanov)

Решение части (a). Покажем, что номиналы $a_i = 2^n - 2^{n-i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, составляют удачное множество. Для начала заметим, что

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = n2^n - \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = (n-1)2^n + 1 < n2^n .$$

Предположим теперь, что S набирается некоторыми монетами:

$$S = \sum_{k=1}^{p} a_{i_k} = p2^n - \sum_{k=1}^{p} 2^{j_k} ,$$

где $j_k = n - i_k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Поскольку $S > (n-1)2^n$, получаем $p \geqslant n$, и

$$\sum_{k=1}^{p} 2^{j_k} = (p - n + 1)2^n - 1 \equiv -1 \pmod{2^n}.$$

Без ограничения общности считаем, что $j_1 \leqslant j_2 \leqslant ... \leqslant j_p$. Докажем, что $j_k \leqslant k-1$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$. Рассуждая от противного, выберем минимальное $k \leqslant n$ такое, что $j_k \geqslant k$. Тогда

$$-1 \equiv \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \pmod{2^k}, ,$$

что невозможно, так как

$$0 \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} 2^{j_s} \leqslant \sum_{s=1}^{k-1} 2^{s-1} = 2^{k-1} - 1\,.$$

Противоречие.

В итоге получаем

$$(p-n+1)2^n - 1 = \sum_{k=1}^{n} 2^{j_k} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{j_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} + \sum_{k=n+1}^{p} 2^{n-1} = 2^n - 1 + (p-n)2^{n-1}\,,$$

или $(p-n)2^n \leqslant (p-n)2^{n-1}$. Такое может быть, только если $p = n$ и все неравенства обращаются в равенства, откуда $j_k = k-1$. Другими словами, $S = a_1 + \ldots + a_n$ — действительно единственный способ собрать S предложенными монетами. $\square$

Замечание 1. Другой способ проверить утверждение — это рассмотреть мультимножество $\{2^{j_1}, 2^{j_2}, \ldots, 2^{j_p}\}$ и последовательно менять его, объединяя две копии некоторого 2^j в один экземпляр 2^{j+1}. Когда процесс останавливается, все числа в мультимножестве оказываются различны, а сумма по-прежнему сравнима с -1 по модулю 2^k, так что мультимножество должно содержать все степени 2^0, ..., 2^{k-1}. Таким образом, в конце процесса мультимножество содержит k чисел, меньших 2^k, и, следовательно, оно содержало не менее k таких чисел до запуска процесса.

Замечание 2. Есть несколько рабочих примеров. Например, можно взять $a_1 = 2^{n-1}$ и $a_i = 2^n + 2^{i-2}$ для $i = 2, 3, \ldots, n$.

Решение части (b). Покажем, что $a_1 \geqslant 2^{n-1}$ в любом удачном наборе $a_1 < \ldots < a_n$ из n монет; это сразу дает $S = a_1 + \ldots + a_n > na_1 \geqslant n2^{n-1}$.

Обозначим $a = a_1$. Пусть Σ — мультимножество всех сумм, которые можно собрать с помощью монет a_2, a_3, ..., a_n, используя их не более чем по одному разу; таким образом, Σ состоит ровно из 2^{n-1} чисел (некоторые из которых могут быть равны друг другу); минимальное из этих чисел — 0, а максимальное — $a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

Предположим, что Σ содержит два числа $S_1 \geqslant S_2$, сравнимых друг с другом по модулю a, так что $S_1 = S_2 + at$ для некоторого целого $t \geqslant 0$. Тогда существует альтернативный способ собрать S монетами, а именно

$$S = (S - S_1) + S_2 + at$$

(что означает, что мы берем монеты a_1, ..., a_n, удаляем набор с суммой S_1, добавляем набор с суммой S_2 и добавляем t монет номиналом a). Это противоречит удачности.

Таким образом, Σ содержит 2^{n-1} чисел, попарно несравнимых по модулю a, что дает $a \geqslant 2^{n-1}$. $\square$

День 2

Задача 4. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 = b^2 + bc$ и $b^2 = c^2 + ac$. Докажите, что $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. en

(Vladimir Bragin)

Решение. Перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{cases} a^2 = (b+c)b\,; \\ (b+c)(b-c) = ac\,. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на b, получаем

$$\begin{cases} a^2 = (b+c)b\,; \\ b(b+c)(b-c) = bac\,. \end{cases}$$

Заменяя $b(b+c)$ на a^2 во втором уравнении, приходим к $a^2(b-c) = abc$.

Теперь осталось разделить обе части на a^2bc и получить $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}$. $\square$

Другое решение. Если обозначить $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, условие перепишется в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{yz}\,; \\ \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{xz}\,; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y^2z = x^2z + x^2y\,; \\ xz^2 = xy^2 + y^2z\,. \end{cases}$$

Перенося все слагаемые в правую часть и складывая два уравнения, получаем

$$\begin{gathered} 0 = (x^2z + x^2y - y^2z) + (xy^2 + y^2z - xz^2) \quad \Rightarrow \\ 0 = x(xy + xz + y^2 - z^2) \quad \Rightarrow \\ 0 = x(y+z)(x+y-z)\,. \end{gathered}$$

В последнем произведении множители x и $y+z$ положительны, поэтому $x + y - z = 0$, откуда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = x + y = z = \frac{1}{c}\,.$$

$\square$

Решение в одну строку.

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \cdot abc(b+c) = a(c^2 + ac - b^2) + c(b^2 + bc - a^2) = 0\,.$$

$\square$

Замечание. Нетрудно понять, что $b + c > a > b > c$. Если построить треугольник ABC со сторонами $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, то уравнения, данные в условии задачи, окажутся эквивалентны $\angle A = 2\angle B$ и $\angle B = 2\angle C$ соответственно. Отсюда получаем $a : b : c = \sin(\frac{4\pi}{7}) : \sin(\frac{2\pi}{7}) : \sin(\frac{\pi}{7})$, что даёт ещё один способ доказать искомое равенство.

Задача 5. В пустой таблице 2^{100} строк и 100 столбцов. Алиса и Ева по очереди заполняют пустые клетки первой строки таблицы; Алиса ходит первой. Каждым ходом Алиса выбирает пустую клетку и ставит в неё крестик, а Ева каждым ходом выбирает пустую клетку и ставит нолик. После того, как в первой строке не остаётся пустых клеток, игроки переходят ко второй строке, и так далее (в каждой новой строке Алиса ходит первой). en

Игра заканчивается, когда все строки заполнятся. Алиса хочет, чтобы различных строк в таблице было как можно больше, а Ева — как можно меньше. Сколько различных строк будет в таблице, если обе будут действовать наилучшим для себя образом?

(Denis Afrizonov)

Ответ: 2^{50}.

Решение. Сначала докажем, что Ева может добиться того, чтобы различных строк было не больше 2^{50}. Пусть она разобьёт каждую строку на 50 прямоугольников 1×2 (доминошек). Каждый раз, когда Алиса ставит крестик в одну из клеток какой-то доминошки, Ева будет ставить нолик в другую клетку этой доминошки. Тогда в любой строке каждая доминошка разбиения может быть только одного из двух типов (крестик-нолик или нолик-крестик), поэтому различных вариантов строк не более 2^{50}.

Теперь докажем, что Алиса может получить не менее 2^{50} различных строк. Для этого достаточно показать, что пока заполнено менее чем 2^{50} строк, при заполнении следующей строки Алиса может действовать так, чтобы эта строка получилась отличной от всех предыдущих.

Рассмотрим очередную («новую») строку, которую заполняют игроки. Назовём *токсичными* те строки из всех ранее заполненных, которые совпадают с новой по уже проставленным в ней символам. (Таким образом, до первого хода Алисы в новой строке токсичными будут все ранее заполненные строки.) Докажем, что каждым своим ходом Алиса может уменьшать количество токсичных строк в два раза. Если изначально это количество было меньше 2^{50}, то в конце оно окажется меньше 1, то есть новая строка не будет совпадать ни с одной из предыдущих.

Пусть Алиса и Ева сделали по i ходов в новой строке. Обозначим текущее соличество токсичных строк за T. Каждая из них совпадает с новой строкой по i крестикам; значит, $50-i$ крестиков в токсичной строке расположены над пустыми клетками новой строки. Тогда всего в токсичных строках над этими пустыми клетками ровно $(50-i)T$ крестиков. Самих пустых клеток при этом $100-2i$; по принципу Дирихле найдется такая пустая клетка, над которой не более $\frac{1}{2}T$ крестиков. В неё Алисе и следует поставить крестик своим $(i+1)$-м ходом. □

Задача 6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — точки пересечения пар диагоналей BD и CE, CE и DA, DA и EB, EB и AC, AC и BD соответственно. Докажите, что если четыре из пяти четырехугольников AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E, EA_1E_1A вписанные, то и пятый тоже вписанный. *(Nairi Sedrakyan, Yuliy Tikhonov)* en

Решение 1. Пусть четырехугольники AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E вписанные. То-где $\angle ABD = \angle AB_1E = \angle EBC$, следовательно, $\angle ABE = \angle CBD$. Аналогично получаем, что $\angle BCA = \angle DCE$ и $\angle CDB = \angle EDA$.

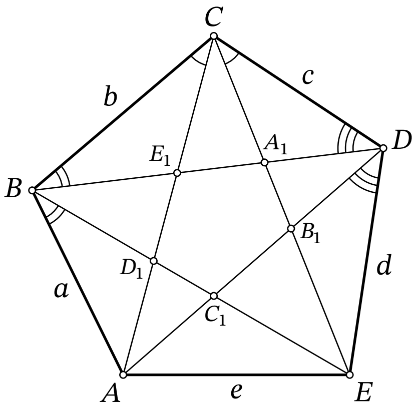
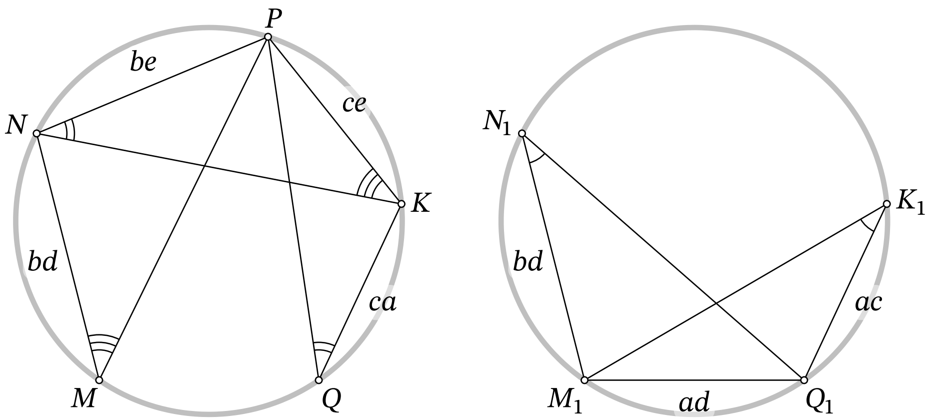


Рис. 7: к решению 1 задачи 6



(a) (b)

Рис. 8: к решению 1 задачи 6

Обозначим длины сторон пятиугольника за a, b, c, d, e как показано на рис. 7. Длины сторон треугольников AED, BCD, BAE умножим на b, e, c соответственно; из полученных треугольников составим фигуру, показанную на рис. 8a. Имеем $\angle NMP = \angle EDA = \angle CDB = \angle PKN$, следовательно, точки M, N, P, K лежат на одной окружности. Аналогично получаем, что точки N, P, K, Q лежат на одной окружности. Значит, все пять точек M, N, P, K, Q лежат на одной окружности.

Теперь длины сторон треугольников ABC и ECD умножим на d и a соответственно. Из полученных треугольников составим фигуру, показанную на рис. 8b. Ясно, что точки K_1, Q_1, M_1, N_1 тоже лежат на одной окружности.

Достаточно доказать равенство дуг MN и M_1N_1, так как в этом случае $\angle BAC = \angle M_1Q_1N_1 = \angle MPN = \angle DAE$, откуда $\angle EAC = \angle BAD = \angle BA_1C$, то есть четырёхгольник AE_1A_1E вписан.

Заметим, что $\angle BAD + \angle DEB = \angle BA_1C + \angle DE_1C = \pi - \angle ACE = \angle CAE + \angle AEC$, следовательно, $\angle BAC + \angle CED = \angle DAE + \angle BEA < \pi$. Имеем $\angle MPN + \angle QPK = \angle DAE + \angle BEA = \angle BAC + \angle CED = \angle M_1Q_1N_1 + \angle K_1M_1Q_1$. Получаем, что $MN = M_1N_1$, $QK = Q_1K_1$ и $\overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{QK} = \overset{\frown}{M_1N_1} + \overset{\frown}{Q_1K_1} < 2\pi$.

Забудем про всю остальную конструкцию, кроме четырёх дуг, указанных в последнем равенстве. Сдвинем дугу QK вдоль окружности так, чтобы её середина стала диаметрально противоположна середине дуги MN; аналогично поступим с Q_1K_1. Тогда $MN \parallel QK$ и $M_1N_1 \parallel Q_1K_1$, и равнобедренные трапеции $MNKQ$ и $M_1N_1K_1Q_1$ равны по двум основаниям и углу между диагоналями (углы выражаются как полусумма дуг). Отсюда следует, что и в изначальной конструкции $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{M_1N_1}$. □

Замечание. Нетрудно доказать, что конструкции на рис. 8 на самом деле полностью совмещаются по соответствующим точкам. Например, для этого достаточно заметить, что $\angle MPQ = \angle BCD - \angle DAE - \angle AEB = \angle BCD - \angle BC_1A = \angle BCA = \angle M_1N_1Q_1$.

Решение 2. Как и предыдущем решении, предположим, что четырёхугольники AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E вписанные и отметим те же три пары равных углов. Обозначим эти углы за β, γ, δ (при вершинах B, C, D соответственно); кроме того, обозначим $\alpha = \angle BAC$, $\alpha_1 = \angle EAD$, $\varepsilon = \angle DEC$, $\varepsilon_1 = \angle BEA$ (рис. 9). Достаточно доказать, что $\alpha = \alpha_1$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$: тогда вписанность четырёхугольника AE_1A_1E будет следовать из $\angle EAC = \angle BAD = \angle BA_1C$.

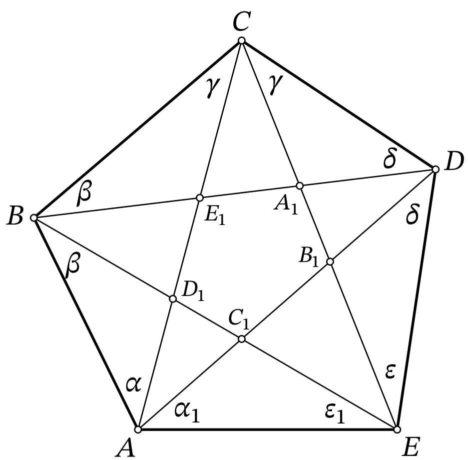


Рис. 9: к решению 2 задачи 6

Для этого, в свою очередь, достаточно установить, что

$$\alpha + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon_1 < \pi \quad \text{и} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon_1}\,.$$

Действительно, рассмотрев треугольники с парами углов α, ε и α_1, ε_1, нетрудно видеть, что при таком условии их третьи углы равны, как и отношения прилегающих к ним сторон, и нужные нам равенства углов следуют из подобия треугольников.

Как отмечено в предыдущем решении, $\alpha + \varepsilon = \alpha_1 + \varepsilon_1 < \pi$ следует из $\angle BAD + \angle DEB = \angle BA_1C + \angle DE_1C = \pi - \angle ACE = \angle CAE + \angle AEC$.

А чтобы доказать равенство отношений синусов, мы перемножим пять теорем синусов:

$$1 = \frac{EA}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{DE}{EA} = \frac{\sin\beta}{\sin\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\delta} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha}\,. \quad \square$$

Решение 3. Введём на плоскости произвольным образом комплексные координаты; векторы будем идентифицировать с комплексными числами.

Воспользуемся тем фактом, что четырехугольник AE_1A_1E вписан тогда и только тогда, когда

$$\frac{\overrightarrow{AE_1} \cdot \overrightarrow{A_1E}}{\overrightarrow{E_1A_1} \cdot \overrightarrow{EA}} \in \mathbb{R}\,.$$

Более того, векторы в этом условии можно заменять на коллинеарные им, действительность выражения от этого не изменится.

Обозначим $z_1 = \overrightarrow{AC}$, $z_2 = \overrightarrow{BD}$, $z_3 = \overrightarrow{CE}$, $z_4 = \overrightarrow{DA}$, $z_5 = \overrightarrow{EB}$. Тогда указанное условие можно переписать как

$$\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2(z_1 + z_3)} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_3}\right) z_2 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$(w_1 + w_3) \cdot \overline{w_2} \in \mathbb{R}\,,$$

где $w_i = z_i^{-1}$. Вписанность остальных четырёхугольников, перечисленных в условии, будет эквивалентна аналогичным условиям, записанным с циклическим сдвигом индексов. (Далее в решении индексы рассматриваем по модулю 5.)

Но сумма всех пяти выражений, фигурирующих в этих условиях, всегда является действительным числом:

$$\sum_{k=1}^{5} (w_k + w_{k+2}) \cdot \overline{w_{k+1}} = \sum_{k=1}^{5} (w_k \cdot \overline{w_{k+1}} + w_{k+1} \cdot \overline{w_k}) \in \mathbb{R}\,,$$

что следует из $u \cdot \overline{v} + \overline{u} \cdot v \in \mathbb{R}$. Значит, если четыре слагаемых действительны, то и пятое тоже. $\square$

Решение 4.[2] Как и в первых двух решениях, предположим, что четырехугольники AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E вписанные и отметим те же три пары равных углов. В частности, обозначим $\gamma = \angle BCA = \angle ECD$; знаки направленных углов выберем так, чтобы $\angle(EC, DC) = +\gamma$.

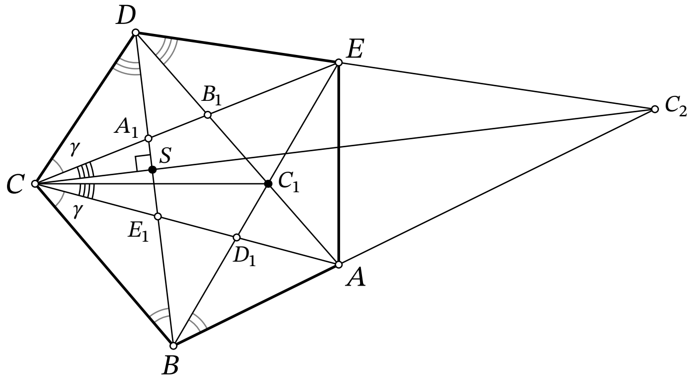


Рис. 10: к решению 4 задачи 6

Обозначим за C_2 точку пересечения прямых BA и DE (рис. 10). Заметим, что

$$\angle(DE, BA) = \angle(DA, BA) + \angle(DE, DA) = \angle(EC, DB) + \angle(DB, DC) = \angle(EC, DC) = \gamma \neq 0\,,$$

то есть эти прямые действительно пересекаются. Более того, пересекаются именно лучи BA и DE (а не AB и ED), так как иначе $\angle AC_2E = \pi - \gamma > \angle ACE$ привело бы к противоречию.

По лемме об изогоналях мы получаем, что CC_1 и CC_2 — изогонали относительно угла BCD. Обозначим за S точку пересечения прямых CC_2 и BD. Заметим, что точки C_1 и S лежат на изогоналях относительно каждого из углов ABC, BCD, CDE. Отсюда следует, что C_1 и S являются изогонально сопряженными точками относительно четырехугольника CBC_2D (это можно доказать, рассмотрев отражения C_1 относительно сторон этого четырехугольника и показав, что они лежат на окружности с центром S).

Но тогда $\angle CSB + \angle DSC_2 = \pi$ (известное свойство точек, у которых есть изогонально сопряженная относительно четырехугольника), что в данном случае означает $CC_2 \perp BD$.

Остается только посчитать углы:

$$\angle AA_1E = \angle ABB_1 = \angle ABE + \angle EBB_1 = \angle DBC + \angle C_1CB_1 = \angle DBC + \angle E_1CC_2 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma\,,$$
$$\angle AE_1E = \angle D_1DE = \angle ADE + \angle D_1DA = \angle CDB + \angle D_1CC_1 = \angle CDB + \angle C_2CA_1 = \tfrac{\pi}{2} - \gamma\,. \quad \square$$

[2] на основе решений, найденных (независимо) участниками Boris Stanković и Mijail Guttierrez после соревнования