5. Олимпијада метропола

Математика · Први дан: 17.12.2020.

1. задатак. У троуглу ABC с правим углом у темену C, симетрала угла AL (где L лежи на дужи BC) сече висину CH у тачки K. Симетрала угла BCH сече дуж AB у тачки M. Доказати да је $CK = ML$.

2. задатак. Постоји ли природан број n чије су све цифре (у декадном систему) веће од 5, али су притом све цифре броја n^2 мање од 5?

3. задатак. Дат је природан број $n > 1$. Ковница новца издаје новчиће n различитих апоена $a_1, a_2, \dots, a_n$, где су бројеви a_i природни (број новчића сваког апоена је неограничен). Скуп апоена $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ зовемо *срећним* ако се сума $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ може сакупити на тачно један начин (узимањем сваког апоена по једном).

(а) Доказати да постоји срећан скуп апоена $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ у коме је

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < n \cdot 2^n.$$

(б) Доказати да за сваки срећан скуп апоена $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ важи

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > n \cdot 2^{n-1}.$$

5. Олимпијада метропола

Математика · Други дан: 19.12.2020.

4. задатак. Позитивни бројеви a, b и c су такви да важи $a^2 = b^2 + bc$ и $b^2 = c^2 + ac$. Доказати да је $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

5. задатак. Дата је празна таблица са 2^{100} врста и 100 колона. Мира и Соња наизменично попуњавају празна поља прве врсте, при чему Мира игра прва. Мира у сваком потезу бира празно поље и у њега уписује крстић, а Соња у свом потезу бира празно поље и уписује кружић. Кад попуне прву врсту, прелазе на другу, и тако даље (у свакој врсти Мира игра прва).

Игра се завршава када се све врсте попуне. Мира настоји да направи што више различитих врста у таблици, док Соња настоји да их буде што мање. Ако обе играју најбоље могуће, колико ће различитих врста бити у таблици?

6. задатак. У конвексном петоуглу $ABCDE$ тачке A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1 су редом пресеци парова дијагонала (BD, CE), (CE, DA), (DA, EB), (EB, AC) и (AC, BD). Ако су међу пет четвороуглова AB_1A_1B, BC_1B_1C, CD_1C_1D, DE_1D_1E и EA_1E_1A нека четири тетивна, доказати да је и пети тетиван.