Language: **Serbian**

Day: **1**

16.04.2020.

Zadatak 1. Prirodni brojevi a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} zadovoljavaju jednakost

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \quad \text{za } n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Dokazati da je bar jedan od brojeva a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_{3030} deljiv sa 2^{2020}.

Zadatak 2. Odrediti sve uređene 2020-torke $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ nenegativnih realnih brojeva za koje su sva tri sledeća uslova zadovoljena:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) postoji uređena 2020-torka $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ koja je permutacija $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ tako da važi

$$\sum_{i=1}^{2020} \left((x_i + 1)(y_i + 1)\right)^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutacija uređene n-torke je uređena n-torka koja sadrži iste elemente, ali ti elementi mogu biti poređani drugim redom. Na primer, $(2, 1, 2)$ je permutacija $(1, 2, 2)$, i one su obe permutacije $(2, 2, 1)$. Primetimo da je svaka uređena n-torka permutacija same sebe.

Zadatak 3. Neka je $ABCDEF$ konveksan šestougao takav da važi $\angle A = \angle C = \angle E$, $\angle B = \angle D = \angle F$, i simetrale (unutrašnjih) uglova $\angle A$, $\angle C$ i $\angle E$ seku se u jednoj tački.

Dokazati da se simetrale (unutrašnjih) uglova $\angle B$, $\angle D$ i $\angle F$ takođe moraju seći u jednoj tački.

U tekstu se koristi skraćena oznaka $\angle A = \angle FAB$. I ostali unutrašnji uglovi šestougla označeni su slično.

Language: Serbian

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.

Da bi takmičenje proteklo u fer uslovima, molimo vas da ne pominjete zadatke na internetu ili društvenim mrežama do subote 18.04. u 23:59.

17.04.2020.

Zadatak 4. Permutaciju prirodnih brojeva 1, 2, ..., m zovemo *svežom* ako ne postoji prirodan broj $k < m$ takav da su prvih k brojeva permutacije baš brojevi 1, 2, ..., k u nekom redosledu. Neka je f_m broj svežih permutacija brojeva 1, 2, ..., m.

Dokazati da $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ važi za sve $n \geq 3$.

Na primer, ako je $m = 4$, *onda je permutacija* $(3, 1, 4, 2)$ *sveža, a* $(2, 3, 1, 4)$ *nije.*

Zadatak 5. Neka je ABC trougao u kome važi $\angle BCA > 90°$. Kružnica Γ opisana oko trougla ABC ima poluprečnik R. Postoji tačka P u unutrašnjosti duži AB takva da $PB = PC$ i dužina PA je R. Simetrala duži PB seče Γ u tačkama D i E.

Dokazati da je P centar upisane kružnice trougla CDE.

Zadatak 6. Neka je $m > 1$ prirodan broj. Niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je dat sa $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$, i za sve $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Odrediti sve prirodne brojeve m za koje je svaki element datog niza potpun kvadrat.

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 bodova.

Da bi takmičenje proteklo u fer uslovima, molimo vas da ne pominjete zadatke na internetu ili društvenim mrežama do subote 18.04. u 23:59.