ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ СРБИЈЕ
ЗА ЕВРОПСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ ЗА ДЕВОЈКЕ

Београд, 17. новембар 2019.

1. Означимо

$$A=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{10+\sqrt{n}} \quad \text{и} \quad B=\sum_{n=1}^{99}\sqrt{10-\sqrt{n}}.$$

Доказати да је $A=(\sqrt{2}+1)B$.

2. Дат је оштроугли троугао ABC у коме је $\sphericalangle BAC=\alpha$. Тачка O је центар описаног круга овог троугла, H ортоцентар, а F средиште странице AB. Тачка P унутар троугла је таква да је

$$\sphericalangle APF=\alpha \quad \text{и} \quad \sphericalangle APB=180^\circ-\alpha.$$

Доказати да је $\sphericalangle HPO=180^\circ-\alpha$.

3. Нека је n природан број. Доказати да постоје највише два пара природних бројева (a,b) таквих да је $a+b$ степен двојке (тј. $a+b=2^k$ за неки цео број $k\geqslant 0$) и $a^2+b=n$.

4. Дат је природан број n. Одредити (у зависности од n) најмањи природан број m за који је могуће обојити тачно n поља бесконачне квадратне табле тако да важи следећи услов:

- Сваки правоугаоник са страницама дуж линија табле коме су два супротна угаона поља обојена садржи највише m обојених поља.

Време за рад: 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

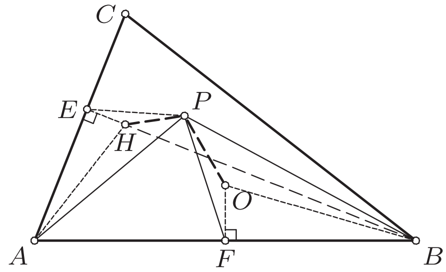
1. Приметимо да важи $\left(\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}}\,\right)^2 = 20+2\sqrt{100-n}$, тј.

$$\sqrt{10+\sqrt{n}}+\sqrt{10-\sqrt{n}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{10+\sqrt{100-n}} \quad \text{за} \quad 0 \leqslant n \leqslant 100.$$

Сумирањем по $n = 1, 2, \ldots, 99$ добијамо $A + B = A\sqrt{2}$, тј. $A = (\sqrt{2}+1)B$.

2. Означимо са E подножје висине троугла из B. Како је $\sphericalangle AEH = \sphericalangle BFO = 90^\circ$ и $\sphericalangle AHE = \sphericalangle BCA = \sphericalangle BOF$, важи $\triangle AEH \sim \triangle BFO$.

Даље, пошто је $FA = FB = FE$, имамо $\sphericalangle AEF = \sphericalangle FAE = \sphericalangle APF$, па је четвороугао $AEPF$ тетиван и одатле $\sphericalangle AEP = 180^\circ - \sphericalangle PFA = \sphericalangle BFP$. Осим тога, из $\sphericalangle EPF = 180^\circ - \sphericalangle FAE = 180^\circ - \alpha = \sphericalangle APB$ следи $\sphericalangle EPA = \sphericalangle FPB$. Према томе, важи и $\triangle AEP \sim \triangle BFP$.



Дакле, четвороуглови $AEHP$ и $BFOP$ су слични, па је $\sphericalangle FPO = \sphericalangle EPH$. Одавде је $\sphericalangle HPO = \sphericalangle EPF = 180^\circ - \alpha$.

3. Нека је $a + b = 2^k$. $c + d = 2^l$ и $a^2 + b = c^2 + d = n$, при чему је $l > k$. Одузимањем следи

$$2^k(2^{l-k}-1) = 2^l - 2^k = c - a + d - b = c - a + a^2 - c^2 = (a-c)(a+c-1).$$

Претпоставимо да су a и c исте парности. Тада је $a + c - 1$ непаран број, па $2^k \mid a - c$. С друге стране, $0 < a - c < a + b = 2^k$, што је немогуће.

Према томе, у свака два различита пара (a, b) и (c, d) бројеви a и c морају имати различите парности, па таквих парова може бити највише два.

4. Одговор је $m = 1$ за $n = 1$ и $m = [\frac{n}{5}] + 2$ за $n \geqslant 2$.

Посматрајмо најмањи правоугаоник $\mathcal{P}$ са страницама дуж линија који садржи сва обојена поља. Он уз сваку своју страницу има бар по једно обојено поље. Одаберимо редом обојена поља A, B, C и D уз доњу, десну, горњу и леву страницу правоугаоника $\mathcal{P}$. За $n \geqslant 2$ можемо узети $A \neq C$ и $B \neq D$ (али може бити нпр. $A = B$). Са $\mathcal{P}_{XY}$ означавамо правоугаоник чија су два супротна угаона поља X и Y. Тада правоугаоници $\mathcal{P}_{AB}$, $\mathcal{P}_{BC}$, $\mathcal{P}_{CD}$, $\mathcal{P}_{DA}$ и $\mathcal{P}_{AC}$ у унији садрже свих n обојених поља. При томе се поља A и C налазе у по три од ових пет правоугаоника, а поља B и D у по два. Следи да је $5m - 6 \geqslant n$, тј. $m \geqslant [\frac{n}{5}] + 2$.

Да бисмо показали да се ова оцена достиже, довољно је да конструишемо пример за $n = 5k + 4$ и $m = k + 2$, где је $k \geqslant 0$ цео број. Једна могућност је приказана на слици. Заиста, сваки правоугаоник који садржи нека обојена поља средишњег квадрата $k \times k$ (којих има k) може садржати још највише два обојена поља, док сваки други правоугаоник садржи највише $k + 1$ обојених поља из једног квадрата странице $k + 1$ и још једно из другог таквог квадрата.