Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Први разред – А категорија

1. Позитивни бројеви a, b, c, d, e су такви да је

$$a(b+c) = b(c+d) = c(d+e) = d(e+a) = e(a+b).$$

Доказати да је $a = b = c = d = e$.

2. Два играча играју следећу игру: они наизменично записују по једну цифру, редом слева надесно, при чему ниједан играч не сме поновити већ искоришћену цифру. Игра се завршава после шест потеза. Први играч побеђује ако је тако добијен шестоцифрени број сложен, а други ако је прост. Који играч има победничку стратегију?

3. Дат је природан број n такав да $6 \mid n$. Доказати да постоји конвексан n-тоугао чији су сви углови једнаки и који се може поделити на фигуре следећа два типа:

(1°) правилне k-тоуглове за неко $k < n$;

(2°) троугаоне одсечке $A_1A_2A_3$ правилног ℓ-тоугла $A_1A_2\ldots A_\ell$ за неко $\ell < n$.

4. Одредити све ненегативне целе бројеве n и цифре a, b и c за које је број

$$M = \overline{1\underbrace{0\ldots0}_{n}a\underbrace{0\ldots0}_{n}b\underbrace{0\ldots0}_{n}c}$$

производ три узастопна природна броја.

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао ABC површине 2020. Максим и Мина играју следећу игру: најпре Максим одабере тачку P на страници AB (може и теме), затим Мина бира тачку Q на страници BC, и најзад Максим бира тачку R на страници CA. Колику највећу површину троугла PQR Максим може да обезбеди независно од Мининог потеза?

2. Реални бројеви x, y и z задовољавају једнакост

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1.$$

Одредити најмању могућу вредност броја x.

3. Да ли постоји бесконачно дугачак низ простих бројева са особином да је сваки члан низа осим првог једнак двоструком претходном увећаном или умањеном за 1?

(На пример, такву особину има низ $2, 3, 5, 11, 23, 47$, али он се не може продужити.)

4. Колико највише поља шаховске табле (8×8) се може одабрати тако да ни са једног одабраног поља коњ не може стићи на друго са мање од 4 скока?

(По шаховским правилима, коњ једним скоком стиже на поље удаљено две врсте и једну колону или две колоне и једну врсту.)

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све комплексне бројеве $z = a + bi$ такве да су a и b цели бројеви и да важи

$$z^{2020} + |z| = \overline{z} + 2^{2020}.$$

2. Фигура *паук* креће се по шаховској табли (8×8) тако што у сваком потезу скочи три реда десно и два горе, или два реда лево и један доле. Паука имамо право да поставимо било где. Колико највише потеза ова фигура може да направи?

3. Нека је n природан број, а p и q природни бројеви већи од 1. Број m је (p, q, n)-*псеудопалиндром* ако постоје природни бројеви a_0 и a_n и ненегативни цели бројеви $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, сви мањи и од p и од q, такви да је

$$m = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_p = (a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n)_q + 1.$$

Наћи све (p, q, n)-псеудопалиндроме у којима је $n \geqslant 2^{q-1} - 1$.
(Са $x = (d_k \dots d_1 d_0)_b$ означава се запис броја $x \in \mathbb{N}$ у основи b, тј. $x = d_k b^k + \dots + d_1 b + d_0$.)

4. Тачка P унутар оштроуглог троугла ABC је таква да је $\sphericalangle APB = 2\sphericalangle ACB$. Тачке P_a и P_b су редом симетричне тачки P у односу на праве BC и AC. Права P_aP_b сече описани круг троугла ABC у тачкама M и N, при чему су тачке P_a и P_b између M и N. Доказати да је $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPN$.

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Четврти разред – А категорија

1. Постоји ли нелинеарна реална функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која има изводе било ког реда и при томе је
$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{за све} \quad n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in \mathbb{R}?$$

2. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да важи $f(x) \leqslant x^2$ за све $x \in \mathbb{N}$ и
$$m + n \mid f(m) - f(n) \quad \text{за све} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

3. Две подударне кружнице k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2 редом секу се у тачкама A и B. Произвољна права кроз тачку A поново сече кружнице k_1 и k_2 редом у тачкама C и D. Нормале из O_1 и O_2 на праву CD редом секу тангенте у тачки A на кругове k_1 и k_2 у тачкама E и F. Даље, нормале из тачака E и F на праве O_1D и O_2C редом секу се у тачки P. Најзад, тачке Q и R су редом подножја нормала из D на O_1P и из C на O_2P.

Доказати да центар O описаног круга троугла PQR лежи на правој AB.

4. Дато је $6n$ тачака на кружници, означених са $A_1, \ldots, A_{6n}$ у цикличном поретку, где је $n \geqslant 2$ природан број. Свака од тачака $A_1, A_2, A_{2n+1}, A_{2n+2}, A_{4n+1}, A_{4n+2}$ обојена је плаво ако јој је индекс паран, а црвено ако је непаран. Свака од осталих тачака A_i обојена је црвено ако јој је индекс i паран, а плаво ако је непаран.

Скуп $3n$ дужи је *магичан* ако свака дуж има по један црвен и плав крај и никоје две дужи немају заједничку тачку (ни теме). Колико има магичних скупова дужи?

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Први разред – Б категорија

1. Тачке A, B, C, D и E на кружници су такве да су $ABCD$, $ACBE$ и $DEBC$ трапези чије су дуже основице редом AB, AC и DE. Ако су дијагонале трапеза $ABCD$ међусобно нормалне, одредити углове троугла ABE.

2. Доказати да је број
$$21! + 3! + 2020! + n!$$
сложен за сваки природан број n.

3. У равни је дат конвексан четвороугао. Конструисати квадрат чија је површина једнака површини четвороугла.

4. Дата је формула
$$F = \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow t\big) \Rightarrow \big((r \Rightarrow t) \Rightarrow (s \Rightarrow t)\big).$$
Одредити сва исказна слова $x \in \{p, q, r, s, t\}$ са особином да, кад год је $x = \top$, важи и $F = \top$.

5. У доњем левом угаоном пољу табле са 6 врста и 3 колоне стоји фигура. У једном потезу фигура може да се помери за једно поље нагоре или надесно.

Нека је A број путања фигуре које завршавају у неком пољу крајње десне колоне, а B број путања које завршавају у неком пољу крајње горње врсте. Шта је веће: A или B?

(Путања може садржати и потезе дуж крајње десне колоне или крајње горње врсте.)

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Други разред – Б категорија

1. Циркус се састоји од шесторо људи и три слона: Јоце, Жике и Персе. Они треба да путују у четири различита камиона. У сваком камиону мора бити бар по један човек (слонови не возе), али два слона не могу да стану у један камион. Са слоницом Персом у камиону мора да буде бар двоје људи. Других ограничења нема. На колико начина се цео циркус може распоредити у камионе?

2. Нека је O обим, а P површина датог троугла. Доказати да важи $O^2 \geqslant 18P$.

3. За које вредности реалног параметра p систем

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x^2 + y^2 + p^2 = 2x + 2py \end{cases}$$

има бар једно реално решење?

4. Дато је осам дужи чије су дужине не мање од 100 и не веће од 2020. Доказати да се међу овим дужима могу одабрати три тако да буду странице неког троугла.

5. Доказати да број

$$21! + 3! + 2020! + n!$$

није потпун квадрат ни за један природан број n.

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

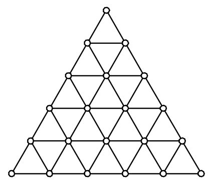
ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Трећи разред – Б категорија

1. Да ли постоје цифре $x > 0$ и y такве да је број $\overline{xxxyyy}$ потпун квадрат?

2. Једнакостранични троугао странице 5 подељен је на 25 јединичних троуглова као на слици. У свако од темена јединичних троуглова уписан је природан број. Ако је збир бројева у теменима сваког јединичног троугла дељив са 3, доказати да је збир бројева у теменима сваког једнакостраничног троугла састављеног од јединичних такође дељив са 3.



3. У простору су дате три некопланарне праве кроз тачку O. Колико има правих кроз тачку O које са овим трима правим заклапају једнаке углове?

4. Доказати да важи

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}}}}{\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots\sqrt{6}}}}} > \frac{1}{\sqrt{6}},$$

где се у бројиоцу појављује 2020 корена, а у имениоцу 2019.

5. На шаховској табли (8×8) у другом реду стоји осам пиона исте боје. Анка и Бранка наизменично померају по једног пиона по шаховским правилима. Прва игра Анка. Побеђује играч који први дотера једног пиона на осми ред табле. Ако оба играча играју савршено, ко ће победити?

(По шаховским правилима сви пиони иду право напред, и то за по једно поље; изузетак су пиони у другом реду коју могу да се помере за једно или два поља напред.)

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

22. август 2020.

Четврти разред – Б категорија

1. Да ли је број
$$a = \sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{3\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}\sin\frac{7\pi}{18}\sin\frac{9\pi}{18}$$
рационалан или ирационалан?

2. **(а)** Доказати да се од 9 узастопних чланова аритметичке прогресије увек може саставити магичан квадрат 3×3.

(б) Показати да постоји и магичан квадрат 3×3 чији су сви чланови различити, а у растућем поретку не чине аритметичку прогресију.

(У *магичном квадрату* збир бројева у свакој врсти, свакој колони и обема дијагоналама је исти.)

3. Одредити све природне бројеве x и y и ненегативне целе бројеве a, b и c такве да важе следеће једнакости:
$$x^2 + y^2 + x + y + 1 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c,$$
$$x^3 + y^3 - x - y + 2 = 2^c \cdot 3^b \cdot 5^a.$$

4. Конструисати троугао ABC ако су дати његов угао α, висина h_a и тежишна дуж t_a из темена A.

5. Означимо са $p(n)$ производ цифара природног броја n у декадном запису. Наћи све природне бројеве n такве да је
$$p(n) = n^2 - 21n - 40.$$

Време за рад: 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 бодова.