37. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Буштени, Румунија (онлајн) – 1. новембар 2020.

1. Дат је оштроугли троугао ABC у коме је $AB = AC$. Тачка D је средиште странице AC, а γ описана кружница троугла ABD. Тангента на кружницу γ у тачки A сече страницу BC у тачки E. Нека је O центар описане кружнице троугла ABE. Доказати да средиште дужи AO лежи на кружници γ. *(Уједињено Краљевство)*

2. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да за сваки природан број n важи:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ је квадрат природног броја и

(ii) n^3 је дељиво са $f(n)$. *(Албанија)*

3. Дат је природан број k. Одредити најмањи природан број $n \geqslant k+1$ за који у следећој игри може да се одигра бесконачно много потеза:

> Посматрајмо n кутија означених са $b_1, b_2, \ldots, b_n$, при чему за свако i кутија b_i у почетку садржи тачно i новчића. У сваком потезу извршавају се редом следећа три корака:
>
> • Изабере се $k+1$ кутија;
>
> • Од тих $k+1$ кутија изабере се једна, рецимо b_i. У ту кутију се дода i новчића, а из сваке од преосталих k кутија уклони се бар половина новчића.
>
> • Ако се нека од кутија испразни, игра се завршава. У супротном се прелази на следећи потез. *(Кипар)*

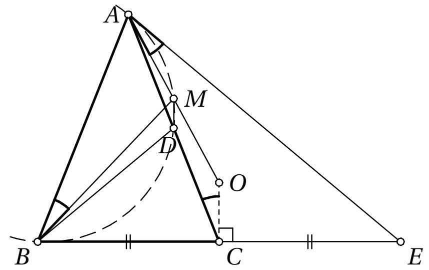
4. Нека је $a_1 = 2$. За сваки природан број n, нека је a_{n+1} најмањи природан број већи од a_n чији је број делилаца већи од броја делилаца броја a_n. Доказати да за само коначно много природних бројева n важи $2a_{n+1} = 3a_n$.

(С. Македонија)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Како је $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAE = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DBA = \sphericalangle BDC$ и $\sphericalangle ABE = \sphericalangle DCB$, троуглови ABE и DCB су слични. Одатле је $\frac{AB}{BE} = \frac{DC}{CB} = \frac{AB}{2CB}$, тј. $BE = 2BC$. То значи да је OC симетрала дужи BE.



Ако сада права AO сече круг ABD у тачки $M \neq A$, важи $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MAE = \sphericalangle OAE = 90° - \sphericalangle ABE = \sphericalangle OCA$. Следи да је $MD \parallel OC$, па је M средиште дужи AO.

2. Функција $f(x) = x^3$ задовољава услове - подсетимо се формуле $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Доказаћемо индукцијом да мора бити $f(n) = n^3$ за свако n. Јасно је да је $f(1) = 1$; претпоставимо да је $f(x) = x$ за $x = 1, 2, \dots, n-1$ $(n \geqslant 2)$. По услову (i) је

$$f(1) + \cdots + f(n-1) + f(n) = \left(\tfrac{n(n-1)}{2}\right)^2 + f(n) = \left(\tfrac{n(n-1)}{2} + k\right)^2$$

за неко $k \in \mathbb{N}$, те је $f(n) = k(n^2 - n + k)$. При томе је $k \leqslant n$ (иначе би било $f(n) > n^3$). Због (ii) такође важи $(n^2 - n + k) \mid n^3$. С друге стране, $n \leqslant \frac{n^3}{n^2-n+k} \leqslant \frac{n^3}{n^2-n+1} < n+1$, па мора бити $\frac{n^3}{n^2-n+k} = n$, тј. $k = n$ и $f(n) = n^3$. Овим је индуктивни корак готов.

Друго решење. Означимо $f(1) + \cdots + f(n) = x_n^2$, где је $x_n > 0$. Пошто је низ (x_n) строго растући, важи $x_n \geqslant n$. С друге стране,

$$x_n^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad x_n \leqslant \tfrac{n(n+1)}{2}. \qquad (*)$$

Нека је $n = p$ прост број. По претходном је $p < x_p + x_{p-1} \leqslant \frac{p(p+1)}{2} + \frac{p(p-1)}{2} = p^2$. С друге стране, $x_p + x_{p-1} \mid x_p^2 - x_{p-1}^2 = f(p) \mid p^3$, па је једина могућност $f(p) = p^2$ и према томе $x_p = \frac{p(p+1)}{2}$ и $x_{p-1} = \frac{p(p-1)}{2}$. Тада све неједнакости у $(*)$ морају бити једнакости, па је $f(i) = i^3$ за све $i \leqslant p$. То важи за свако p, па је $f(x) \equiv x^3$. Из $(*)$ следи и да ова функција задовољава услове задатка.

3. Одговор је $n = 2^k + k - 1$.

Нека је $n = 2^k + k - 1$. Посматраћемо само кутије $b_{n-k}, b_{n-k+1}, \dots, b_n$, претходно их подесивши тако да имају редом $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$ новчића. У сваком кораку бирамо кутију са само једним новчићем и у њу додајемо $2^k - 1$ новчића ($2^k - 1 \leqslant n - k$; вишак занемарујемо), а из сваке од преосталих k кутија уклањамо по половину новчића. Тако ће након сваког потеза ових $k+1$ кутија имати $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$ новчића неким редом, те се игра никад неће завршити.

Нека је сада $n < 2^k + k - 1$, где је $k > 1$ (случај $k = 1$ је тривијалан). Посматрајмо збир

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \log_2 n_i \rfloor, \quad \text{где је } n_i \text{ број новчића у кутији } b_i.$$

У сваком потезу, k сабирака у овој суми опада за 1, а расте сабирак $\lfloor \log_2 n_j \rfloor$ када у кутију b_j додамо j новчића. Међутим, за $n_j \leqslant 2^k - k + 1$ важи $\lfloor \log_2(n_j + j) \rfloor \leqslant k$, док је у супротном $\lfloor \log_2(n_j + j) \rfloor = k + 1 < \lfloor \log_2 n_j \rfloor + k$. Дакле, прираштај сабирка

$\lfloor \log_2 n_j \rfloor$ није већи од k, а једнак је k само ако је $n_j = 1$ и $j \geqslant 2^k - 1$. Следи да сума S не може порасти, а да не би бескрајно опадала, почев од неког тренутка мораћемо да додајемо само у кутије b_j са индексом $j \geqslant 2^k - 1$. Таквих кутија има највише k. Према томе, у сваком потезу вадићемо новчиће из бар једне од првих $2^k - 2$ кутија, притом никад не додајући у њих, те ћемо неку од њих неминовно једном испразнити, чиме ће се игра окончати.

4. Подсетимо се да је број делилаца природног броја x са канонском факторизацијом $x = \prod_{i=1} p_i^{r_i}$ једнак $\tau(x) = \prod_{i=1}^{k}(r_i + 1)$.

Претпоставимо да је $a_n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ и $a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$, где су $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \cdots < p_k$ прости бројеви. По дефиницији броја a_{n+1}, бројеви $\frac{9}{8} a_n$ и $\frac{4}{3} a_n$ (ако су цели) не могу имати више од $\tau(a_n)$ делилаца (иначе би и они били у низу (a_i)):

$$r_1 \geqslant 3 \quad \Rightarrow \quad (r_1 - 2)(r_2 + 3)R = \tau(\tfrac{9}{8} a_n) \leqslant \tau(a_n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1)R \quad \Rightarrow \quad 2r_1 \leqslant 3r_2 + 7,$$

$$r_2 \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad (r_1 + 3)r_2 R = \tau(\tfrac{4}{3} a_n) \leqslant \tau(a_n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1)R \quad \Rightarrow \quad 2r_2 \leqslant r_1 + 1,$$

где је $R = \prod_{i=3}^{k}(r_i + 1)$. За $r_1 \geqslant 4$ важи и $r_2 \geqslant 1$, па ове две неједнакости дају $r_1 \leqslant 17$. Сви бројеви мањи од a_n имају мање од $\tau(a_n)$ делилаца (иначе a_n не би био у низу). Између осталог, ако је $r_\ell > 0$ и $p_\ell > 2^m$ за неко ℓ и m, онда је

$$(r_1 + m + 1) r_\ell Q = \tau\Big(\frac{2^m}{p_\ell} a_n\Big) < \tau(a_n) = (r_1 + 1)(r_\ell + 1)Q \quad \Rightarrow \quad m r_\ell < r_1 + 1 \leqslant 18,$$

где је $Q = \prod_{i \notin \{1,\ell\}}(r_i + 1)$. Одавде је $r_i \leqslant 17$ за свако i и $r_i = 0$ кад год је $p_i > 2^{18}$. Према томе, $a_n < M^{17}$, где је M производ свих простих бројева мањих од 2^{18}, тј. оваквих чланова низа a_n има коначно много.

Напомена. Низ (a_n) је познат као низ *најсложенијих бројева* (*highly composite numbers*). Још је Ердош (*On highly composite numbers*, J. London Math. Soc., Vol.19, 1944) доказао да је $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Бројева n за које је $a_{n+1} = \frac{3}{2} a_n$ има тачно 54, од којих је највећи $n = 1348$; при томе је $a_{1348} = \frac{L(211)L(19)}{11 \cdot 13}$, где је $L(n) = \text{нзс}(1, 2, \ldots, n)$.