# 37. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Буштени, Румунија (онлајн)
1. новембар 2020.

**1. задатак.**

Дат је оштроугли троугао $ABC$ у коме је $AB = AC$. Тачка $D$ је средиште странице $AC$, а $\gamma$ описана кружница троугла $ABD$. Тангента на кружницу $\gamma$ у тачки $A$ сече страницу $BC$ у тачки $E$. Нека је $O$ центар описане кружнице троугла $ABE$. Доказати да средиште дужи $AO$ лежи на кружници $\gamma$.

**2. задатак.**

Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да за сваки природан број $n$ важи:

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ је квадрат природног броја и

(ii) $n^3$ је дељиво са $f(n)$.

**3. задатак.**

Дат је природан број $k$. Одредити најмањи природан број $n \geqslant k+1$ за који у следећој игри може да се одигра бесконачно много потеза:

> Посматрајмо $n$ кутија означених са $b_1, b_2, \ldots, b_n$, при чему за свако $i$ кутија $b_i$ у почетку садржи тачно $i$ новчића. У сваком потезу извршавају се редом следећа три корака:
>
> **(1)** Изабере се $k+1$ кутија;
>
> **(2)** Од тих $k+1$ кутија изабере се једна, рецимо $b_i$. У ту кутију се дода $i$ новчића, а из сваке од преосталих $k$ кутија уклони се бар половина новчића.
>
> **(3)** Ако се нека од кутија испразни, игра се завршава. У супротном се прелази на следећи потез.

**4. задатак.**

Нека је $a_1 = 2$. За сваки природан број $n$, нека је $a_{n+1}$ најмањи природан број већи од $a_n$ чији је број делилаца већи од броја делилаца броја $a_n$. Доказати да за само коначно много природних бројева $n$ важи $2a_{n+1} = 3a_n$.

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 10 бодова.