ДОДАТНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ СРБИЈЕ ЗА БАЛКАНСКУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 7. октобар 2020.

1. Нека су a, b, c и d позитивни бројеви за које важи $a+b+c+d=4$. Доказати неједнакост:

$$\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{\left(b+\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{\left(c+\sqrt{d}\right)^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{\left(d+\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}\leqslant 16.$$

(Монголија 2014.)

2. Тачка I је центар уписаног круга троугла ABC. Права AI сече описану кружницу Ω троугла ABC у тачки $M\neq A$. Тачка J је симетрична тачки I у односу на средиште D странице BC. Права MJ сече кружницу Ω у тачки $P\neq M$. Доказати да је једна од дужи PA, PB, PC једнака збиру остале две. *(Кина 1993.)*

3. Дат је природан број n. На таблу $2n\times 2n$ постављено је k правоугаоника димензија $1\times n$ тако да се никоја два не преклапају, али није могуће поставити још један такав правоугаоник без преклапања. Одредити најмању могућу вредност броја k. *(Бразил: Олимпијска освета 2014.)*

4. Наћи све парове позитивних рационалних бројева (x,y) таквих да важи

$$x^y\cdot y^x=y^y.$$

(фолклор)

Време за рад: 270 минута.

Сваки задатак вреди 10 поена.

РЕШЕЊА

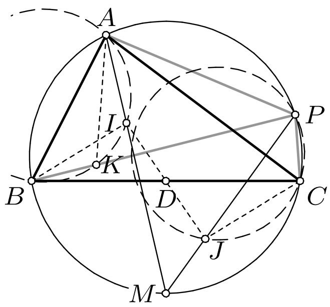
1. За произвољне позитивне бројеве x и y важи $\sqrt{x^2-xy+y^2} \geqslant \frac{x+y}{2}$ и по Коши-Шварцовој неједнакости важи $\left(x+\sqrt{y}\right)^2 \leqslant (x+y)(x+1)$, па је

$$\frac{\left(x+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x^2-xy+y^2}} \leqslant 2(x+1).$$

Према томе,

$$\frac{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{\left(b+\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{\left(c+\sqrt{d}\right)^2}{\sqrt{c^2-cd+d^2}}+\frac{\left(d+\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{d^2-da+a^2}}$$
$$\leqslant 2(a+1)+2(b+1)+2(c+1)+2(d+1)=16.$$

2. Радимо са оријентисаним угловима по модулу 180°. Пошто је $JC = BI$ и $\sphericalangle JPC = \sphericalangle MAC = \sphericalangle BAI$, описани кругови троуглова JPC и ABI су подударни.



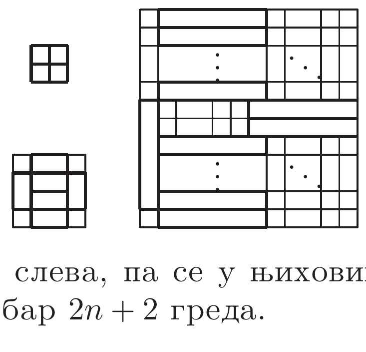
Посматрајмо тачку K на полуправој PB такву да је $PK = PA$. Како је $\sphericalangle AKB = 180^\circ - \sphericalangle PKA = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle APK = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = \sphericalangle AIB$, тачка K лежи на кругу ABI. Одатле је $\sphericalangle IKP = \sphericalangle IAB = \sphericalangle MAB = \sphericalangle MPK$, тј. $IK \parallel JP$. Такође је $BI \parallel CJ$, па је $\sphericalangle BIK = \sphericalangle CJP$. Следи да су тетиве BK и PC у круговима BAI и JPC једнаке, тј. $PB = PK \pm KB = PA \pm PC$.

<u>*Друго решење.*</u> Уз распоред као на слици, тврђење $BP - CP = AP$ је еквивалентно са $\sin\sphericalangle BMP - \sin\sphericalangle CMP = \sin\sphericalangle IMP$. Како је $MB = MC = MI$, довољно је доказати да је $[BMP] - [CMP] = [IMP]$. Међутим,

$$[BMP] = [BMDP] + [DMP] = [CMDP] + [DMP] = [CMP] + 2[DMP],$$

па је $[BMP] - [CMP] = 2[DMP] = [IMP]$, чиме је доказ завршен.

3. Слика показује да се може постићи $k = 2n + 2$ за $n \in \{1, 2\}$, односно $k = 2n+1$ за $n \geqslant 3$. Показаћемо да је то и одговор.



Правоугаонике ћемо звати *водоравним*, односно *усправним гредаама*. Претпоставимо да је постављено $k < 2n + 2$ греда на тражени начин. Не умањујући општост, сматрајмо да усправних греда има највише n. Бар једна греда је усправна. Заиста, ако су све водоравне, оне покривају бар два поља прве колоне слева, па се у њиховим врстама морају налазити две греде, а тада има бар $2n + 2$ греда.

Нека се, без смањења општости, у s-тој колони слева ($s \leqslant n$) налази усправна греда P. По услову задатка, свака колона правоугаоника $n\times(s-1)$ лево од P сече бар једну греду, но та греда не може бити водоравна, одакле следи да свака колона лево од P садржи бар по једну усправну греду. Слично, ако t-та колона здесна ($t \leqslant n$) садржи усправну греду, онда и свака колона десно од ње такође садржи усправну греду. Дакле, $s+t \leqslant n$, тј. колоне без усправних греда чине појас ширине бар n. У том појасу свака врста мора да садржи водоравну греду. Према томе, има тачно $2n$ водоравних и једна усправна греда, што је укупно $2n+1$.

За $n = 2$ овај број се не може достићи. Наиме, тада једина усправна греда лежи у крајњој левој колони, а бар два поља крајње десне колоне морају бити покривена водоравним гредама, те лево од њих има места за још једну усправну.

4. Ако означимо $t = \frac{y}{x}$, једначина се своди на $x^{tx} \cdot t^x x^x = t^{tx} x^{tx}$, тј. $x = t^{t-1}$. Остаје да се испита када је t^{t-1} рационалан број.

Ако је $t = \frac{a}{b}$ као нескратив разломак, онда је $x = (\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{b}}$, па како су $a-b$ и b узајамно прости, и a и b су b-ти степени. Како је $b \leqslant 2^b$ за све $b \in \mathbb{N}$, мора бити $b = 1^b = 1$. Тада је $x = a^{a-1}$ и $y = a^a$, где је $a \in \mathbb{N}$.